Materi

=== LINGKARAN ===

Persamaan Garis Singgung Sekutu 2 Buah Lingkaran

Oleh:

Anang Wibowo, S.Pd

Revisi 2020

Blog : s.id/matikzone Geogebra: s.id/geogebra Telegram: t.me/matikzone Drive: v.gd/matikzone

PERSAMAAN GARIS SINGGUNG SEKUTU DUA LINGKARAN

A. Pendahuluan

Didalam materi irisan kerucut, ada pembahasan tentang Lingkaran, Elips, Parabola, dan Hiperbola. Pada awal penerapan kurikulum 2013, keempat materi ini diberikan semua untuk jenjang SMA mata pelajaran matematika peminatan. Namun seiring berjalannya waktu, ada perubahan kurikulum dan materi yang diajarkan hanya lingkaran saja.

Pada lingkaran, hanya ada satu garis singgung yang dapat ditarik melalui satu titik pada lingkaran, ada dua buah garis singgung yang dapat ditarik jika diketahui gradiennya dan ada dua garis singgung yang dapat ditarik dari satu titik di luar lingkaran. Setidaknya itulah yang dapat kita tentukan, dan materi inilah yang selama ini diajarkan di SMA/MA kelas XI IPA pada Bab Lingkaran, sub bab Menentukan persamaan garis singung lingkaran. Dengan rincian sebagai berikut:

a. Menentukan persamaan garis singgung melalui titik pada lingkaran,
b. Menentukan persamaan garis singgung jika gradiennya diketahui, dan
c. Menentukan persamaan garis singgung lingkaran melalui titik di luar lingkaran.

Muncul pertanyaan, bagaimanakah dengan persamaan garis singgung sekutu dua lingkaran, apakah bisa kita tentukan? Mengapa selama ini yang dibahas hanya sebatas menentukan panjang garis singgung sekutu dua lingkaran, yang mana materi ini telah dibahas di tingkat SMP?

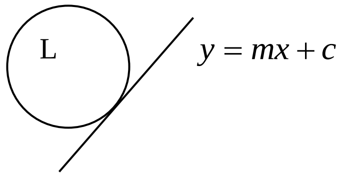
Berdasar rasa keingintahuan penulis mengenai masalah ini, maka penulis mencoba mencari pembahasan persamaan garis singgung sekutu 2 lingkaran ini dari berbagai sumber, namun tidak ada yang memberikan penjelasan secara utuh dan lengkap, bahkan dari sumber berbahasa asing. Untuk itu penulis dengan keterbatahan ilmu yang ada, penulis mencoba membahasnya. Berikut ini adalah pembahasan, bagaimana kita menentukan persamaan garis singgung sekutu dua lingkaran. Setidaknya pembahasan ini bisa kita jadikan sebagai bahan pengayaan bagi siswa yang sudah menuntaskan kegiatan belajarnya, terutama bab lingkaran.

B. Teori Pendukung

Garis Singgung Lingkaran

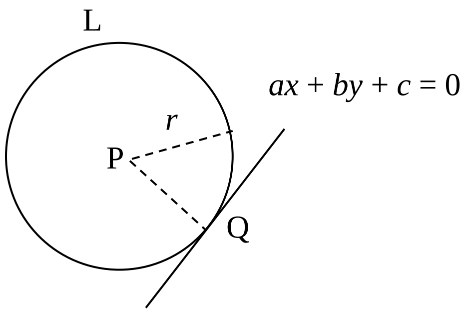
Garis singgung lingkaran adalah garis yang memotong lingkaran tepat pada satu titik dan titik tersebut dinamakan titik singgung lingkaran.

Garis $y = mx + c$ menyinggung lingkaran L jika nilai D = 0. Dimana D adalah diskriminan persamaan kuadrat yang diperoleh setelah mensubtitusikan $y = mx + c$ ke persamaan lingkaran.

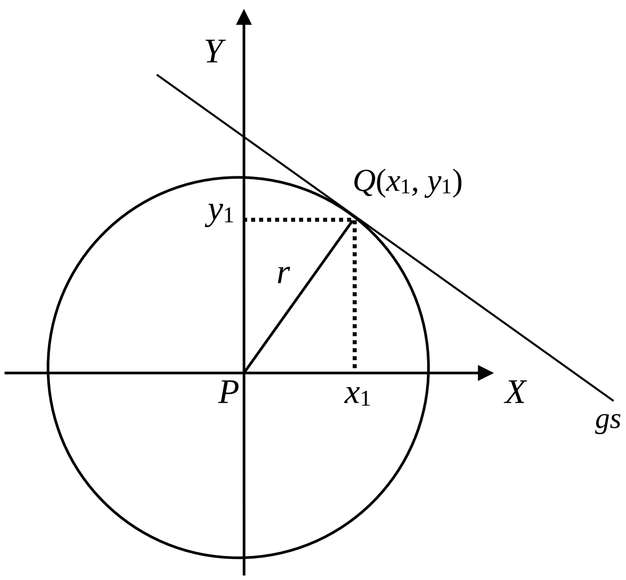


Atau

Garis $ax + by + c = 0$ menyinggung lingkaran L jika $d = r$, dengan d adalah jarak titik pusat lingkaran $P(x_1,\ y_1)$ terhadap garis singgung $ax + by + c = 0$ dan r adalah jari-jari lingkaran, dimana $d = |PQ| = \left|\dfrac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$.



Persamaan Garis Singgung Lingkaran Melalui Titik Pada Lingkaran



Dari gambar, $m_{PQ} = \dfrac{y_1}{x_1}$

PQ tegak lurus *gs*, maka

$$m_{PQ}\ m_{gs} = -1 \Rightarrow m_{gs} = -\frac{x_1}{y_1}$$

Persamaan garis singgung melalui $Q(x_1,\ y_1)$ adalah:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

$$y_1(y - y_1) = -x_1(x - x_1)$$

$$y_1 y - {y_1}^2 = -x_1 x + {x_1}^2$$

$$x_1 x + y_1 y = {x_1}^2 + {y_1}^2$$

Karena Q(x_1, y_1) pada lingkaran, maka $x_1^2 + y_1^2 = r^2$, sehingga persamaan garis singgungnya adalah: $x_1x + y_1y = r^2$

Dengan sistem bagi adil, lingkaran $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ mempunyai persamaan garis singgung:

$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$

dan untuk lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ mempunyai persamaan garis singgung:

$x_1x + y_1y + \frac{A}{2}(x + x_1) + \frac{B}{2}(y + y_1) + C = 0$

Persamaan Garis Singgung Suatu Lingkaran Jika Gradiennya Diketahui

Misalkan persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ adalah $y = mx + c$,
Subtitusi *y* ke persamaan lingkaran

$$x^2 + (mx+c)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + m^2x^2 + 2mcx + c^2 - r^2 = 0$$
$$\Rightarrow (1+m^2)x^2 + 2mcx + (c^2 - r^2) = 0$$

Garis menyinggung lingkaran jika D = $b^2 - 4ac = 0$

$$(2mc)^2 - 4(1+m^2)(c^2 - r^2) = 0$$
$$\Rightarrow 4m^2c^2 - 4c^2 - 4m^2c^2 + 4r^2 + 4m^2r^2 = 0$$
$$\Rightarrow -c^2 + r^2 + m^2r^2 = 0$$
$$\Rightarrow c^2 = r^2 + m^2r^2$$
$$\Rightarrow c^2 = r^2(1+m^2)$$
$$\Rightarrow c = \pm r\sqrt{(1+m^2)}$$

Maka persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ dengan gradien *m*adalah:

$$y = mx + c$$
$$= mx \pm r\sqrt{1+m^2}$$

Dengan sistem bagi adil, untuklingkaran $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ akan diperoleh persamaan garis singgung:

$$y - b = m(x-a) \pm r\sqrt{1+m^2}$$

Sehingga gradien garis singgung lingkaran $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ yang melalui titik $T(x_1, y_1)$ di luar lingkaran dapat kita tentukan dengan rumus:

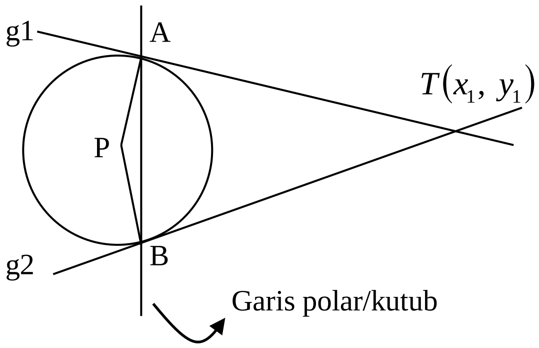
$$y_1 - b = m(x_1 - a) \pm r\sqrt{1+m^2}$$

Langkah-langkah mencari persamaan garis singgung lingkaran adalah:

1. Menentukan gradien garis singgung lingkaran.
2. Gunakan rumus persamaan garis melalui suatu titik, misalnya $T(x_1,\ y_1)$ dan diketahui gradiennya (m). Persamaannya adalah: $y - y_1 = m(x - x_1)$

Persamaan Garis Polar/Kutub

Dari satu titik di luar lingkaran, dapat ditarik dua buah garis singgung pada lingkaran tersebut. Garis yang menghubungkan kedua titik singgung disebut garis polar atau garis kutub.



A dan B adalah titik singgung, juga titik potong garis polar dengan lingkaran.

Misal A $(x_A,\ y_A)$ maka PGS di titik singgung A adalah $x_A x + y_A y = r^2$ …….(1)

B $(x_B,\ y_B)$ maka PGS di titik singgung B adalah $x_B x + y_B y = r^2$ …….(2)

Sehingga persamaan garis

AT adalah $x_A x_1 + y_A y_1 = r^2$ ……….(3)

BT adalah $x_B x_1 + y_B y_1 = r^2$ ……….(4)

Kurangkan (3) dengan (4), diperoleh

$$(x_A - x_B)x_1 + (y_A - y_B)y_1 = 0 \Rightarrow \frac{(y_A - y_B)}{(x_A - x_B)} = -\frac{x_1}{y_1}$$

Gradien garis AB adalah $\frac{(y_A - y_B)}{(x_A - x_B)} = -\frac{x_1}{y_1}$ dan garis AB melalui titik A maka persamaan garis AB adalah

$$y - y_A = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_A) \Rightarrow \quad y_1 y - y_1 y_A = -x_1 x + x_1 x_A$$

$$\Rightarrow \quad x_1 x + y_1 y = x_1 x_A + y_1 y_A$$

$$\Rightarrow \quad x_1 x + y_1 y = r^2$$

Jadi,persamaan garis polar AB pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ adalah: $x_1 x + y_1 y = r^2$

Uuntuk lingkaran $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ mempunyai persamaan garis polar:
$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$

Dan untuk lingkaran $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ persamaan garis polarnya adalah:
$x_1x+y_1y+\frac{A}{2}(x+x_1)+\frac{B}{2}(y+y_1)+C=0$

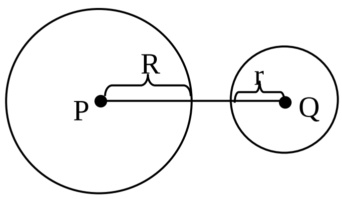
Langkah-langkah mencari persamaan garis singgung lingkaran adalah:

1. Tentukan persamaan garis polarnya.
2. Subtitusi persamaan garis polar ke persamaan lingkaran, untuk mencari titik A dan B sebagai titik singgung lingkaran.
3. Gunakan rumus Persamaan Garis Singgung melalui titik pada lingkaran untuk mencari persamaan garis singgungnya.

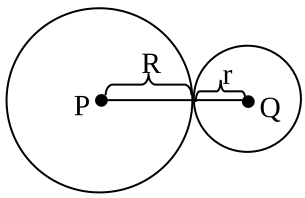
Kedudukan Dua Lingkaran:

Kedudukan dua lingkaran ada lima kemungkinan, yaitu:

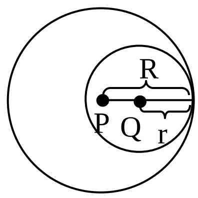
a). Saling Asing Luar/ Tidak Berpotongan Luar, jika R + r < PQ
b). Bersinggungan Luar, jika R + r = PQ
c). Bersinggungan Dalam, jika R – r = PQ
d). Saling Asing Dalam / Tidak Berpotongan Dalam, jika R – r > PQ
e). Berpotongan, jika R – r < PQ < R + r



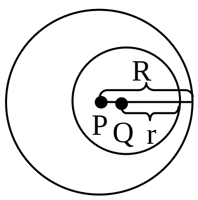
SalingAsingLuar



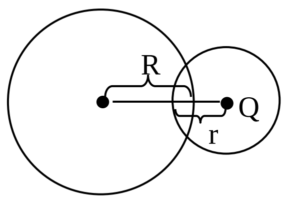
BersinggunganLuar



BersinggunganDalam



SalingAsingDalam



Berpotongan

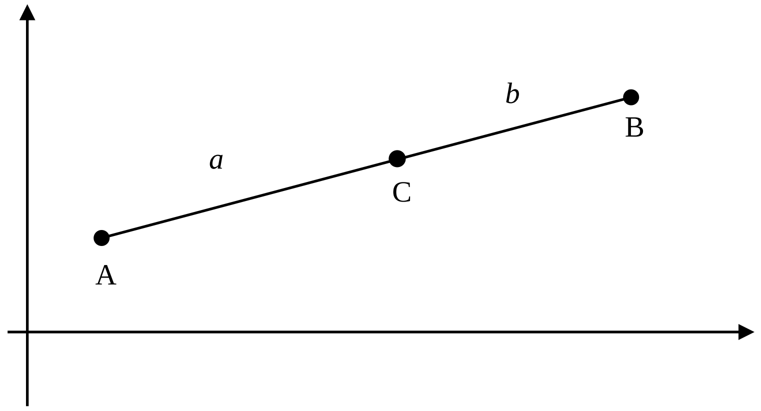
Dua lingkaran mempunyai garis singgung sekutu dalam jika kedudukan dua lingkaran tersebut saling asing luar, atau bersinggungan luar. Dua lingkaran mempunyai garis singgung sekutu dalam jika $R+r\leq PQ$.

Dua lingkaran mempunyai garis singgung sekutu luar jika kedudukan dua lingkaran tersebut saling asing luar, bersinggungan luar, bersinggungan dalam, atau berpotongan. Dua lingkaran mempunyai garis singgung sekutu luar jika $R - r \leq PQ$.

Titik Bagi Ruas Garis AB

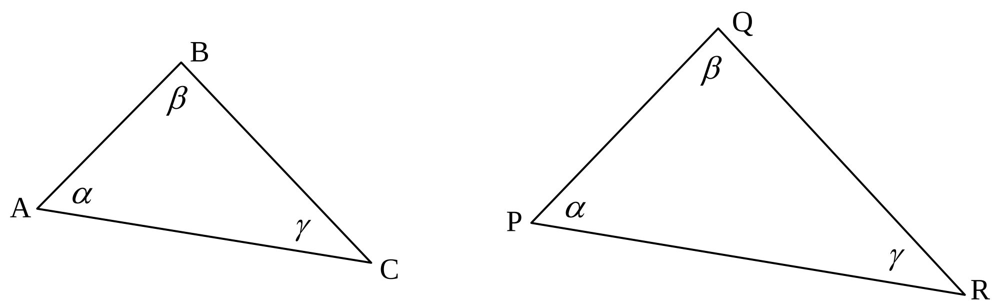
Koordinat titik bagi ruas garis AB yaitu titik C, dimana AC : CB = *a* : *b* adalah

$$C(x_C,\ y_C) = C\left(\frac{ax_B + bx_A}{a+b},\ \frac{ay_B + by_A}{a+b}\right)$$



Dua Segitiga yang Sebangun

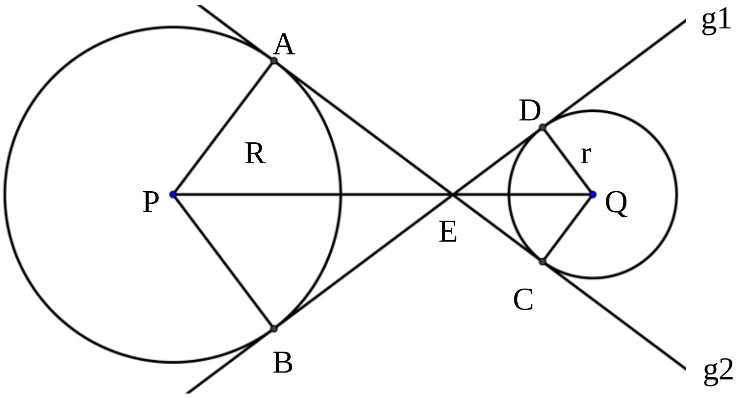
Dua segitiga dikatakan sebangun jika sudut-sudut yang bersesuaian sama besar dan perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian adalah sama. Perhatikan gambar, segitiga *ABC* sebangun dengan segitiga *PQR*, maka $\angle A = \angle P,\ \angle B = \angle Q,\ \angle C = \angle R$ dan $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}$



C. Persamaan Garis Singgung Sekutu Dua Lingkaran

Persamaan garis singgung sekutu dua lingkaran dapat ditentukan dengan menentukan terlebih dulu titik potong kedua garis singgung, kemudian menentukan persamaan garis singgung lingkaran melalui suatu titik di luar lingkaran. Adapun lingkaran yang akan digunakan, bisa memilih lingkaran pertama atau lingkaran kedua. Titik potong kedua garis singgung adalah:

Garis Singgung Sekutu Dalam

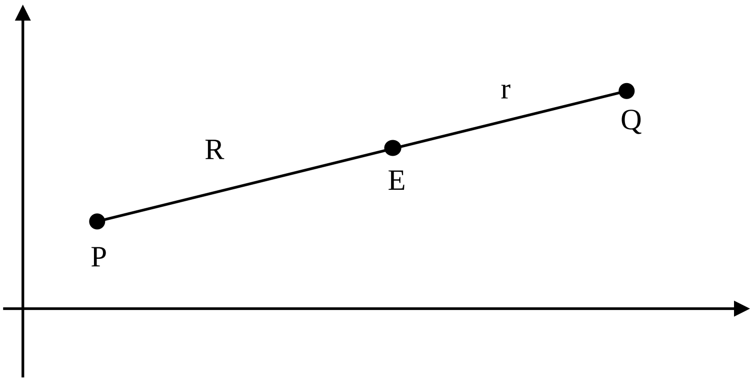


Perhatikan gambar di atas!

ΔPBE sebangun dengan ΔQDE, karena $\angle PBE = \angle QDE = 90^0$ dan $\angle PEB = \angle QED$ (saling bertolak belakang) mengakibatkan $\angle BPE = \angle DQE$, sehingga

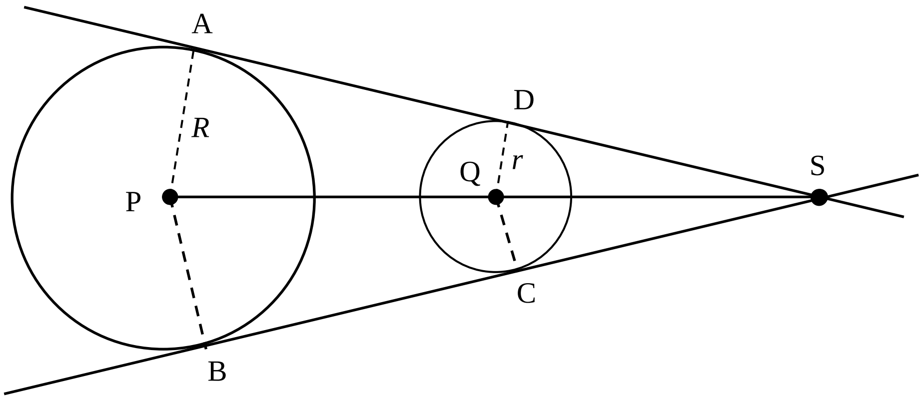
$$\frac{PE}{QE} = \frac{PB}{QD} = \frac{R}{r} \quad atau \quad PE : QE = R : r\,.$$

Titik E adalah titik potong kedua garis singgung, titik E membagi garis PQ dengan perbandingan $PE : EQ = R : r$



Maka koordinat titik E adalah $E\left(\frac{Rx_Q + rx_P}{R + r}, \frac{Ry_Q + ry_P}{R + r}\right)$

Garis Singgung Sekutu Luar, jika *R* > *r*.

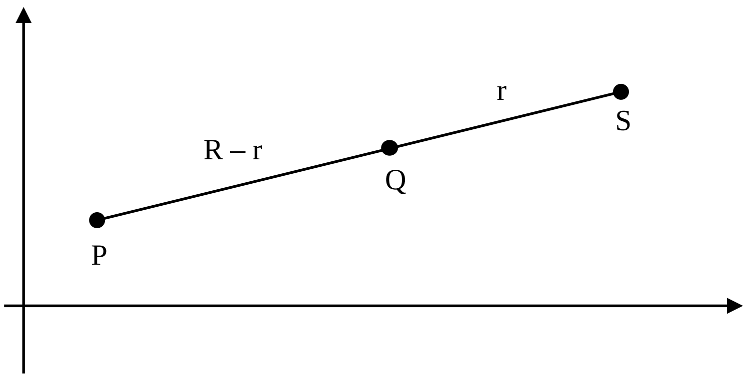


Perhatikan gambar di atas!

ΔPBS sebangun dengan ΔQCS, karena $\angle PBS = \angle QCS = 90^0$ dan $\angle PSB = \angle QSC$ (saling berhimpit) mengakibatkan $\angle BPS = \angle CQS$, sehingga

$$\frac{PQ+QS}{QS} = \frac{PB}{QC} = \frac{R}{r} \Rightarrow \frac{PQ}{QS} + 1 = \frac{R}{r} \quad \Rightarrow \frac{PQ}{QS} = \frac{R-r}{r};\ R > r$$

Titik S adalah titik potong kedua garis singgung, yang perupakan perpanjangan garis PQ dengan perbandingan $PQ : QS = (R-r) : r;\ R > r$ sehingga



$$Q(x_Q,\ y_Q) = Q\left(\frac{(R-r)x_S + rx_P}{(R-r)+r},\ \frac{(R-r)y_S + ry_P}{(R-r)+r} \right)$$

diperoleh:

$$\Rightarrow x_Q = \frac{(R-r)x_S + rx_P}{(R-r)+r} \Rightarrow \qquad Rx_Q = (R-r)x_S + rx_P$$

$$\Rightarrow (R-r)x_S = Rx_Q - rx_P$$

$$\Rightarrow \qquad x_S = \frac{Rx_Q - rx_P}{(R-r)}$$

dan

$$\Rightarrow y_Q = \frac{(R-r)y_S + ry_P}{(R-r)+r} \Rightarrow \qquad Ry_Q = (R-r)y_S + ry_P$$

$$\Rightarrow (R-r)y_S = Ry_Q - ry_P$$

$$\Rightarrow \qquad y_S = \frac{Ry_Q - ry_P}{(R-r)}$$

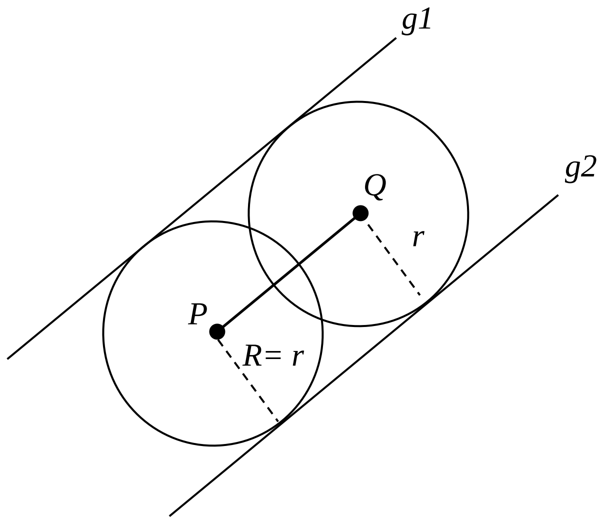
Sehingga kita peroleh koordinat titik S adalah

$$S(x_S,\ y_S) = S\left(\frac{Rx_Q - rx_P}{R-r},\ \frac{Ry_Q - ry_P}{R-r}\right)$$

Dalam menentukan persamaan garis singgung lingkaran melalui titik di luar lingkaran kita menggunakan persamaan garis polar atau dengan menentukan gradien garis singgungnya terlebih dulu.

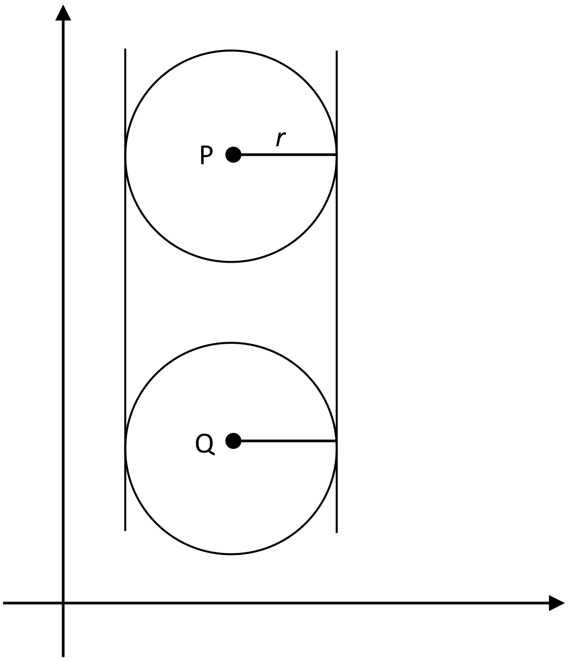
Garis Singgung Sekutu Luar, jika *R* = *r*.

Jika $R = r$ (jari-jari kedua lingkaran sama), maka kedua garis singgung sekutu sejajar dan tidak mempunyai titik potong. Kedua garis singgung sejajar dengan garis PQ, yaitu garis yang menghubungkan kedua pusat lingkaran. Sehingga diperoleh $m_{gs} = m_{PQ} = \dfrac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$.



Persamaan garis singgung sekutunya kita kita tentukan dengan menggunakan persamaan garis singgung lingkaran jika diketahui gradiennya. Persamaan garis singgung dengan gradien m untuk lingkaran $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ adalah $y-b=m(x-a)\pm r\sqrt{1+m^2}$.

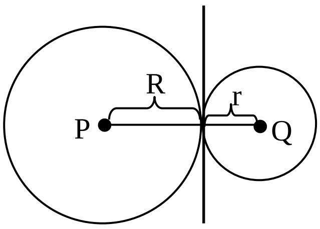
Garis Singgung Sekutu Luar, jika $R = r$ dan absis titik pusat kedua lingkaran sama.



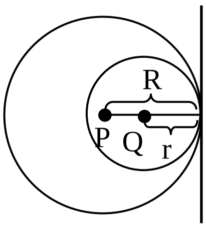
Jika R = r dan $x_P = x_Q$ maka persamaan garis singgung persekutuan luarnya adalah

$$x = x_P + r \text{ dan } x = x_P - r$$

Dua Lingkaran yang Bersinggungan



Bersinggungan Luar



Bersinggungan Dalam

Titik $E\left(\dfrac{Rx_Q+rx_P}{R+r}, \dfrac{Ry_Q+ry_P}{R+r}\right)$ pada lingkaran yang bersinggungan luar, merupakan titik potong kedua lingkaran sekaligus titik singgung dari garis singgung sekutu dalam. Titik $S\left(\dfrac{Rx_Q-rx_P}{R-r}, \dfrac{Ry_Q-ry_P}{R-r}\right)$ pada dua lingkaran yang bersinggungan dalam, juga merupakan titik potong kedua lingkaran sekaligus titik singgung dari garis singgung sekutu luar. Titik E dan titik S adalah titik singgung sekutu. Sehingga persamaan garis singgung sekutunya dapat ditentukan dengan rumus menentukan persamaan garis singgung lingkaran melalui titik pada lingkaran.

D. Soal dan Pembahasannya

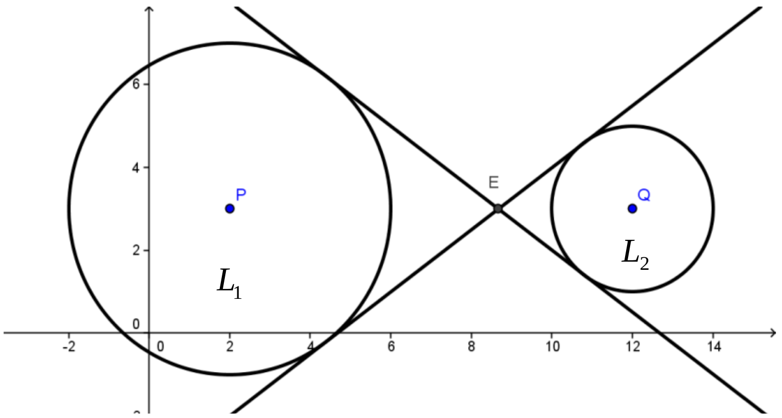
Pada pembahasan soal di bawah, untuk soal pertama kita akan menentukan gradien garis singgung terlebih dulu, kemudian mencari persamaan garis singgung sekutunya dengan menggunakan lingkaran pertama, juga dengan lingkaran kedua. Untuk soal kedua kita gunakan kedua cara namun dengan lingkaran yang sama yaitu menggunakan lingkaran pertama. Soal ketiga dan keempat adalah contoh soaldengan karakteristik khusus.

Soal Pertama:

Tentukan persamaan garis singgung sekutu dalam $L_1 \equiv (x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$ dan $L_2 \equiv (x-12)^2 + (y-3)^2 = 4$.

Jawab:

$3x + 4y - 38 = 0$ $\qquad$ $3x - 4y - 14 = 0$



$L_1 \equiv (x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$ mempunyai pusat P(2, 3) dan jari-jari $R = 4$

$L_2 \equiv (x-12)^2 + (y-3)^2 = 4$ mempunyai pusat Q(12, 3) dan jari-jari $r = 2$

Hubungan dua lingkaran

$$\left.\begin{array}{l} PQ=\sqrt{(12-2)^2+(3-3)^2}=\sqrt{100}=10 \\ R+r=4+2=6 \\ R-r=4-2=2 \end{array}\right\} R+r<PQ \quad dan \quad R-r<PQ$$

Maka L1 dan L2 saling asing luar dan mempunyai garis singgung sekutu dalam dan luar.

Diketahui bahwa koordinat titik $E\left(\dfrac{Rx_Q+rx_P}{R+r},\ \dfrac{Ry_Q+ry_P}{R+r}\right)$, sehingga kita peroleh

koordinat titik E adalah: $E\left(\dfrac{4.12+2.2}{4+2},\ \dfrac{4.3+2.3}{4+2}\right)=E\left(\dfrac{52}{6},\ \dfrac{18}{6}\right)=E\left(\dfrac{26}{3},\ 3\right)$

Cara 1: Menggunakan Lingkaran Pertama.

Persamaan garis singgung lingkaran dengan gradien *m* pada L1 adalah:

$$y-y_P=m(x-x_P)\pm R\sqrt{1+m^2}\Rightarrow y-3=m(x-2)\pm 4\sqrt{1+m^2}$$

Garis singgung melalui titik $E\left(\dfrac{26}{3},\ 3\right)$

$$\begin{aligned} y-3=m(x-2)\pm 4\sqrt{1+m^2} \Rightarrow\quad & 3-3=m\left(\frac{26}{3}-2\right)\pm 4\sqrt{1+m^2} \\ \Rightarrow\quad & 0=\frac{20}{3}m\pm 4\sqrt{1+m^2} \\ \Rightarrow\quad & \pm 4\sqrt{1+m^2}=\frac{20}{3}m \\ \Rightarrow\quad & 16+16m^2=\frac{400m^2}{9} \\ \Rightarrow\quad & 144+144m^2=400m^2 \\ \Rightarrow\quad & 256m^2=144 \\ \Rightarrow\quad & 16m^2=9 \\ \Rightarrow\quad & m^2=\frac{9}{16} \\ \Rightarrow\quad & m=\pm\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Persamaan garis dengan gradien *m* dan melalui $E\left(\dfrac{26}{3},\ 3\right)$ adalah: $y-3=m\left(x-\dfrac{26}{3}\right)$

$$Untuk\ \ m = \frac{3}{4} \Rightarrow \qquad y - 3 = \frac{3}{4}\left(x - \frac{26}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad y - 3 = \frac{3}{4}x - \frac{26}{4}$$

$$\Rightarrow 3x - 4y - 14 = 0$$

$$Untuk\ \ m = -\frac{3}{4} \Rightarrow \qquad y - 3 = -\frac{3}{4}\left(x - \frac{26}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad y - 3 = -\frac{3}{4}x + \frac{26}{4}$$

$$\Rightarrow 3x + 4y - 38 = 0$$

Jadi, persamaan garis singgung sekutu dalam L1 dan L2 adalah:

- $g_1 \equiv 3x - 4y - 14 = 0$
- $g_2 \equiv 3x + 4y - 38 = 0$

Cara 2: Menggunakan Lingkaran Kedua.

Persamaan garis singgung lingkaran dengan gradien *m* pada L2 adalah:

$$y - y_Q = m(x - x_Q) \pm r\sqrt{1 + m^2} \Rightarrow y - 3 = m(x - 12) \pm 2\sqrt{1 + m^2}$$

Garis singgung melalui titik $E\left(\frac{26}{3},\ 3\right)$

$$y - 3 = m(x - 12) \pm 2\sqrt{1 + m^2} \Rightarrow \qquad 3 - 3 = m\left(\frac{26}{3} - 12\right) \pm 2\sqrt{1 + m^2}$$

$$\Rightarrow \qquad 0 = -\frac{10}{3}m \pm 2\sqrt{1 + m^2}$$

$$\Rightarrow \quad \pm 2\sqrt{1 + m^2} = -\frac{10}{3}m$$

$$\Rightarrow \qquad 4 + 4m^2 = \frac{100m^2}{9}$$

$$\Rightarrow \quad 36 + 36m^2 = 100m^2$$

$$\Rightarrow \qquad 64m^2 = 36$$

$$\Rightarrow \qquad 16m^2 = 9$$

$$\Rightarrow \qquad m^2 = \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow \qquad m = \pm\frac{3}{4}$$

Persamaan garis dengan gradien *m* dan melalui $E\left(\frac{26}{3},\ 3\right)$ adalah: $y - 3 = m\left(x - \frac{26}{3}\right)$

$$Untuk\ \ m = \frac{3}{4} \Rightarrow \qquad y - 3 = \frac{3}{4}\left(x - \frac{26}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad y - 3 = \frac{3}{4}x - \frac{26}{4}$$

$$\Rightarrow 3x - 4y - 14 = 0$$

$$Untuk\ \ m = -\frac{3}{4} \Rightarrow \qquad y - 3 = -\frac{3}{4}\left(x - \frac{26}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad y - 3 = -\frac{3}{4}x + \frac{26}{4}$$

$$\Rightarrow 3x + 4y - 38 = 0$$

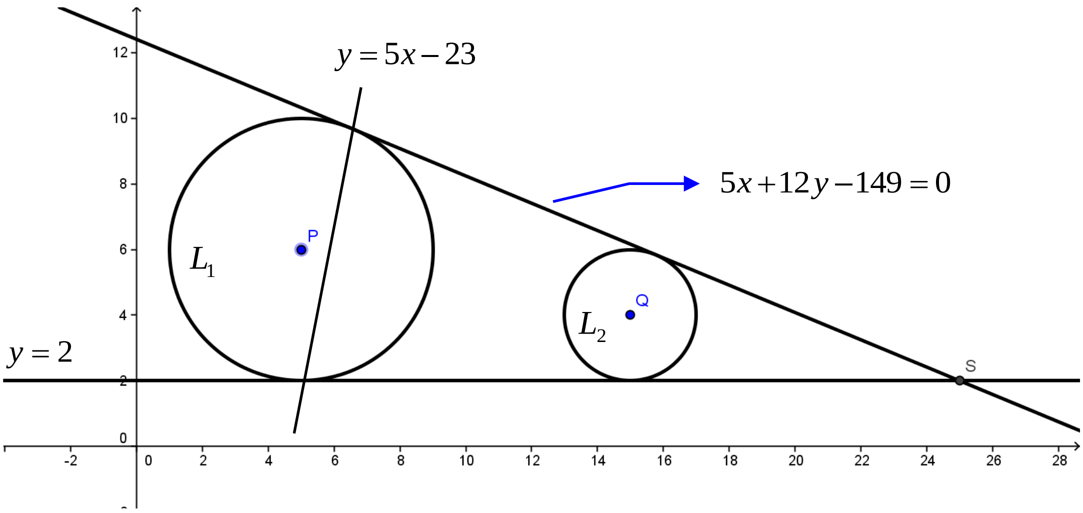
Jadi, persamaan garis singgung sekutu dalam L1 dan L2 adalah:

- $g_1 \equiv 3x - 4y - 14 = 0$
- $g_2 \equiv 3x + 4y - 38 = 0$

Soal Kedua:

Tentukan persamaan garis singgung sekutu luar lingkaran $L_1 \equiv (x-5)^2 + (y-6)^2 = 16$ dan $L_2 \equiv (x-15)^2 + (y-4)^2 = 4$.

Jawab:



$L_1 \equiv (x-5)^2 + (y-6)^2 = 16$ mempunyai pusat P(5, 6) dan jari-jari $R = 4$

$L_2 \equiv (x-15)^2 + (y-4)^2 = 4$ mempunyai pusat Q(15, 4) dan jari-jari $r = 2$

Hubungan dua lingkaran

$$\left.\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(15-5)^2+(4-6)^2} = \sqrt{100+4} = \sqrt{104} \\ R+r &= 4+2 = 6 \\ R-r &= 4-2 = 2 \end{aligned}\right\} R+r < PQ \quad dan \quad R-r < PQ$$

Maka L1dan L2 saling asing luar dan mempunyai garis singgung sekutu dalam dan luar.

Diketahui bahwa koordinat titik $S\left(\dfrac{Rx_Q - rx_P}{R-r},\ \dfrac{Ry_Q - ry_P}{R-r}\right)$, sehingga kita peroleh

koordinat titik S adalah: $S\left(\dfrac{4.15-2.5}{4-2},\ \dfrac{4.4-2.6}{4-2}\right) = S\left(\dfrac{50}{2},\ \dfrac{4}{2}\right) = S(25,\ 2)$

Cara 1: Dengan Menentukan Persamaan garis Polar

Persamaan garis polar berdasar titik S(25, 2) pada lingkaran L1 (dipilih L1) adalah:

$$\begin{aligned} (x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b) = r^2 &\Rightarrow (25-5)(x-5)+(2-6)(y-6) = 16 \\ &\Rightarrow 20x-100-4y+24-16 = 0 \\ &\Rightarrow 20x-4y-92 = 0 \\ &\Rightarrow y = 5x-23 \end{aligned}$$

Subtitusi y ke persamaan L1

$$\begin{aligned} (x-5)^2+(y-6)^2 = 16 &\Rightarrow (x-5)^2+(5x-29)^2 = 16 \\ &\Rightarrow x^2-10x+25+25x^2-290x+841-16 = 0 \\ &\Rightarrow 26x^2-300x+850 = 0 \\ &\Rightarrow 13x^2-150x+425 = 0 \\ &\Rightarrow (13x-85)(x-5) = 0 \\ &\Rightarrow x = \frac{85}{13} \quad atau \quad x = 5 \end{aligned}$$

Subtitusi x ke persamaan garis polar (bukan ke persamaan lingkaran).

$$* x = \frac{85}{13} \Rightarrow y = 5\cdot\frac{85}{13} - 23 = \frac{425}{13} - \frac{299}{13} = \frac{126}{13} \qquad \Rightarrow T_1\left(\frac{85}{13},\ \frac{126}{13}\right)$$

$$* x = 5 \quad \Rightarrow y = 5\cdot 5 - 23 = 25 - 23 = 2 \qquad \Rightarrow T_2(5,\ 2)$$

$T_1\left(\frac{85}{13},\ \frac{126}{13}\right)$ dan $T_2(5,\ 2)$ adalah titik potong garis polar dengan lingkaran yang merupakan titik singgung pada lingkaran L1.

Kita tentukan persamaan garis singgung melalui titik pada lingkaran L1. Persamaan garis singgung melalui $T(x_1,\ y_1)$ pada lingkaran $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ adalah:

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$$

$$\begin{aligned}
T_1\left(\frac{85}{13},\ \frac{126}{13}\right) &\Rightarrow \left(\frac{85}{13}-5\right)(x-5)+\left(\frac{126}{13}-6\right)(y-6)=16\\
&\Rightarrow \quad \frac{20}{13}(x-5)+\frac{48}{13}(y-6)-16=0\\
&\Rightarrow \quad 20(x-5)+48(y-6)-208=0\\
&\Rightarrow \quad 20x+-100+48y-288-208=0\\
&\Rightarrow \quad 20x+48y-596=0\\
&\Rightarrow \quad 5x+12y-149=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_1(5,\ 2) &\Rightarrow (5-5)(x-5)+(2-6)(y-6)=16\\
&\Rightarrow \quad 0(x-5)-4(y-6)-16=0\\
&\Rightarrow \quad -4y+24-16=0\\
&\Rightarrow \quad -4y=-8\\
&\Rightarrow \quad y=2
\end{aligned}$$

Jadi, persamaan garis singgung persekutuan luar L1 dan L2 adalah:

$5x+12y-149=0 \quad dan \quad y=2$

Cara 2: Dengan Menentukan Gradien Garis Singgung.

Persamaan garis singgung lingkaran dengan gradien *m* pada L1 adalah (dipilih L1):

$$y-y_P=m(x-x_P)\pm R\sqrt{1+m^2} \Rightarrow y-6=m(x-5)\pm 4\sqrt{1+m^2}$$

Garis singgung melalui titik $S(25,\ 2)$

$$y-6=m(x-5)\pm 4\sqrt{1+m^2} \Rightarrow \quad 2-6=m(25-5)\pm 4\sqrt{1+m^2}$$
$$\Rightarrow \quad -4=20m\pm 4\sqrt{1+m^2}$$
$$\Rightarrow \quad -1=5m\pm\sqrt{1+m^2}$$
$$\Rightarrow \quad \pm\sqrt{1+m^2}=5m+1$$
$$\Rightarrow \quad 1+m^2=25m^2+10m+1$$
$$\Rightarrow \quad 24m^2+10m=0$$
$$\Rightarrow \quad m(24m+10)=0$$
$$\Rightarrow \quad m=0 \quad atau \quad m=-\frac{10}{24}=-\frac{5}{12}$$

Persamaan garis dengan gradien *m* dan melalui $S(25,\ 2)$ adalah: $y-2=m(x-25)$

$$Untuk\ \ m=0 \Rightarrow \quad y-2=0(x-25)$$
$$\Rightarrow \quad y-2=0$$
$$\Rightarrow \quad y=2$$
$$Untuk\ \ m=-\frac{5}{12} \Rightarrow \quad y-2=-\frac{5}{12}(x-25)$$
$$\Rightarrow \quad y-2=-\frac{5}{12}x+\frac{125}{12}$$
$$\Rightarrow \quad 12y-24=-5x+125$$
$$\Rightarrow \quad 5x+12y-149=0$$

Jadi, persamaan garis singgung sekutu luar L1 dan L2 adalah:

$$y=2 \quad dan \quad 5x+12y-149=0$$

Soal Ketiga:

Tentukan persamaan garis singgung sekutu luar lingkaran $L_1 \equiv (x-4)^2+(y-2)^2=5$ dan $L_2 \equiv \left(x-\frac{12}{5}\right)^2+\left(y+\frac{6}{5}\right)^2=5$.

Jawab:

$L_1 \equiv (x-4)^2 + (y-2)^2 = 5$ mempunyai pusat *P*(4, 2) dan jari-jari *R* = $\sqrt{5}$

$L_2 \equiv \left(x - \frac{12}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{6}{5}\right)^2 = 5$ mempunyai pusat $Q\left(\frac{12}{5},\ -\frac{6}{5}\right)$ dan jari-jari *r* = $\sqrt{5}$

Hubungan dua lingkaran

$$\left.\begin{array}{l} PQ = \sqrt{\left(\frac{12}{5} - 4\right)^2 + \left(-\frac{6}{5} - 2\right)^2} = \sqrt{\frac{64}{25} + \frac{256}{25}} = \sqrt{\frac{320}{25}} = \sqrt{\frac{16}{5}} = 1{,}79 \\ R + r = \sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5} = 4{,}47 \\ R - r = \sqrt{5} - \sqrt{5} = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{c} 0 < 1{,}79 < 4{,}47 \\ R - r < PQ < R + r \end{array}$$

Maka L1 dan L2berpotongan di dua titik, tidak mempunyai garis singgung sekutu dalam, hanya mempunyai garis singgung sekutu luar.

Untuk *R* = *r* (jari-jari kedua lingkaran sama, yaitu $\sqrt{5}$), kedua garis singgung sejajar PQ.

$$m_{gs} = m_{PQ} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{-\frac{6}{5} - 2}{\frac{12}{5} - 4} = \frac{-\frac{16}{5}}{-\frac{8}{5}} = \frac{16}{8} = 2$$

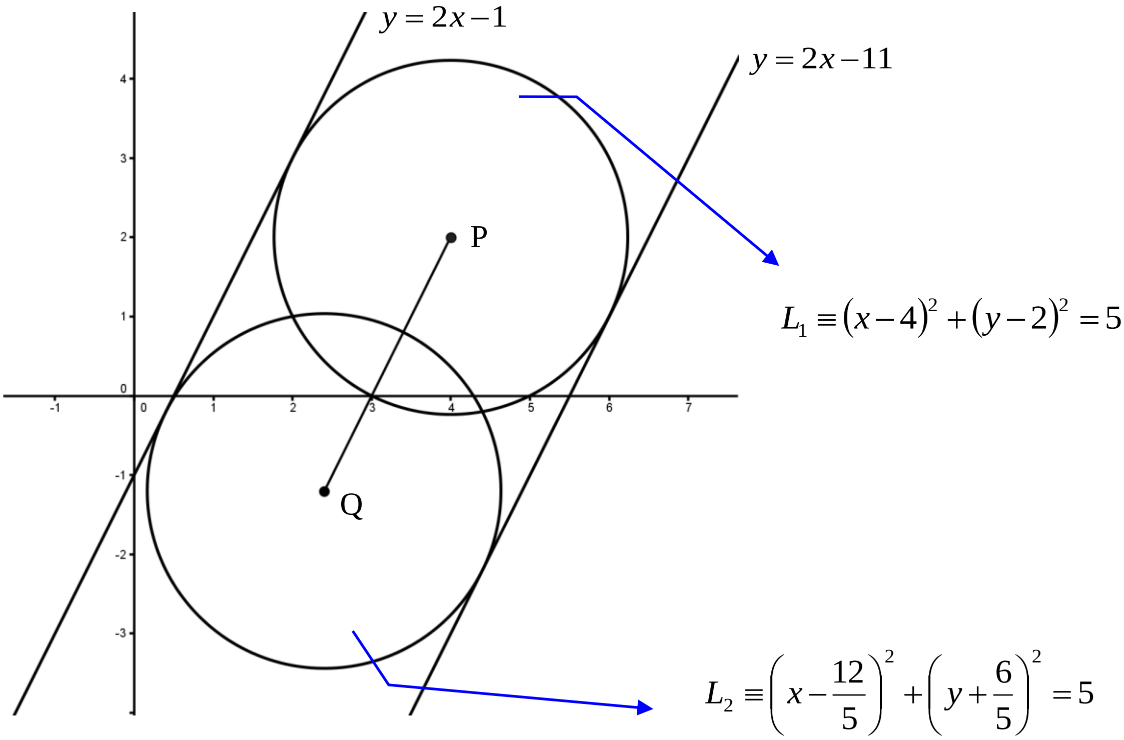
Garis singgung L1 merupakan garis singgung L2.

Persamaan garis singgung $L_1 \equiv (x-4)^2 + (y-2)^2 = 5$ (dipilih L1) dg gradien 2 adalah:

$$\begin{aligned} y - 2 = 2(x-4) \pm \sqrt{5}\sqrt{1+2^2} &\Rightarrow \quad y = 2 + 2x - 8 \pm 5 \\ &\Rightarrow \quad y = 2x - 6 \pm 5 \\ &\Rightarrow \quad y = 2x - 11 \quad \textit{atau} \quad y = 2x - 1 \end{aligned}$$

Jadi, persamaan garis singgung sekutu luar L1 dan L2 adalah:

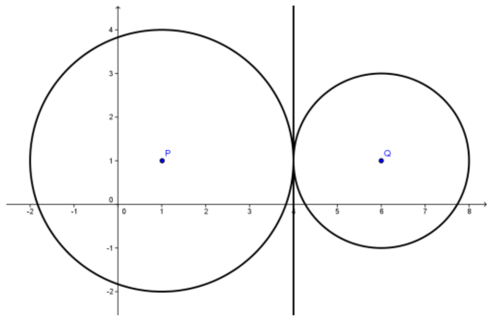
$y = 2x - 1$ dan $y = 2x - 11$.



Soal Keempat:

Tentukan persamaan garis singgung sekutu dalam antara lingkaran
$L_1 \equiv (x-1)^2 + (y-1)^2 = 9$ dan $L_2 \equiv (x-6)^2 + (y-1)^2 = 4$.

Jawab:



$L_1 \equiv (x-1)^2 + (y-1)^2 = 9$ mempunyai pusat $P(1, 1)$ dan jari-jari $R = 3$
$L_2 \equiv (x-6)^2 + (y-1)^2 = 4$ mempunyai pusat Q(6, 1) dan jari-jari $r = 2$

Hubungan dua lingkaran

$$\left.\begin{array}{l} PQ=\sqrt{(6-1)^2+(1-1)^2}=\sqrt{25}=5 \\ R+r=3+2=5 \\ R-r=3-2=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} R+r=PQ \\ R-r<PQ \end{array}$$

Maka L1 dan L2 bersinggungan luar, mempunyai satu garis singgung sekutu dalam dan dua garis singgung sekutu luar.

Cara 1:

$$PGS \equiv L_1 - L_2 = 0$$

$$\begin{array}{r} (x-1)^2+(y-1)^2=9 \\ (x-6)^2+(y-1)^2=4 \\ \hline (x-1)^2-(x-6)^2=5 \end{array} \; -$$

$$x^2-2x+1-x^2+12x-35=5$$

$$10x=40$$

$$x=4$$

Jadi persamaan garis singgung sekutu dalam L1 dan L2 adalah$x$ = 4.

Cara 2:

Titik singgung sekutu dua lingkaran adalah $E\left(\frac{Rx_Q+rx_P}{R+r}, \frac{Ry_Q+ry_P}{R+r}\right)=$

$$E\left(\frac{18+2}{3+2}, \frac{3+2}{3+2}\right)=E(4, 1)$$

E(4, 1) adalah titik pada kedua lingkaran, maka persamaan garis singgung dapat ditentukan dengan rumus persamaan garis singgung melalui titik pada lingkaran. Kita cari menggunakan lingkaran pertama.

$$\begin{aligned} (x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2 &\Rightarrow (4-1)(x-1)+(1-1)(y-1)=9 \\ &\Rightarrow 3(x-1)=9 \\ &\Rightarrow 3x-3=9 \\ &\Rightarrow 3x=12 \\ &\Rightarrow x=4 \end{aligned}$$

Jadi persamaan garis singgung sekutu dalam L1 dan L2 adalah$x$ = 4.

E. Kesimpulan

Persamaan garis singgung sekutu dua lingkaran dapat ditentukan dengan menentukan koordinat titik potong kedua garis singgung, kemudian menentukan persamaan garis singgung sekutunya dengan cara "Menentukan persamaan garis singgung lingkaran melalui titik di luar lingkaran". Jika jari-jari kedua lingkaran sama, maka persamaan garis singgung sekutu luar ditentukan dengan persamaan garis singgung lingkaran jika diketahui gradiennya, dengan gradien garis singgung sama dengan gradien garis PQ. Pada dua lingkaran yang bersinggungan luar dan bersinggungan dalam, ditemukan titik singgung sekutu, sehingga persamaan garis singgung dapat ditentukan dengan persamaan garis singgung lingkaran melalui titik pada lingkaran.

Menentukan persamaan garis singgung lingkaran melalui titik di luar lingkaran bisa menggunakan persamaan garis polar atau dengan menentukan gradien garis singgung terlebih dulu. Dipilih cara mana yang lebih mudah. Karena terdapat dua buah lingkaran, maka dapat dipilih salah satu lingkaran untuk menentukan persamaan garis singgung sekutunya.

F. Bahan Bacaan

Agus, Nuniek Avianti. 2007. *Mudah Belajar Matematika 2: untuk kelas VIII SMP/MTs*. Jakarta: BSE Depdiknas.

Departemen Matematika Technos. –tanpa tahun-. *Teori Ringkas Matematika*. Surabaya: Litbang LP3T Technos.

Hamiyah, Nur. 2009. *Panduan Lengkap Pintar Matematika (Bilingual)*. Jakarta: Cerdas Pustaka Publisher.

Kangenan, Marthen. 2005. *Cerdas Belajar Matematika XI SMA/MA Program IPA*. Jakarta: Grafindo Media Pratama.

Kangenan, Marthen. 2014. *Matematika XI SMA/MA Peminatan*. Bandung:Yrama Widya.

Kurnia, Novianto, dkk. 2014. *Maemtika SMA kelas XI, Peminatan.* Bogor: Yudhistira.

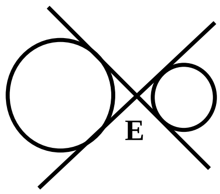
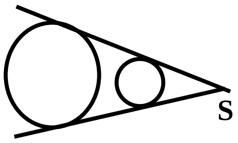
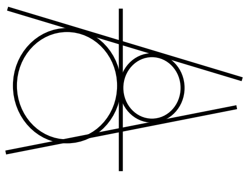
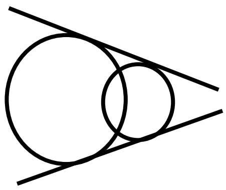
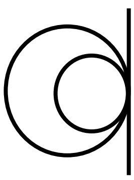
Kishan, Hari. 2006. *Coordinate Geometry of Two Dimensions*. New Delhi: Atlantic Publisher and Distributors. (PDF File)

Negoro, ST. 1982. *Ensiklopedia Matematika*. Jakarta: Ghalia Indonesia.

Noormandiri, BK. 2004. *Matematika SMA/MA kelas XI Program IPA*. Bandung: Erlangga.

No Name. *Golden Co-ordinate Geometry*. Laxmi Publications (P) Ltd. (PDF File)

Tabel Banyak Garis Singgung Sekutu (GSS) Dua Lingkaran

No	Hubungan 2 Lingkaran	Banyak GSS		Cara menentukan persamaan GSS	
		D	L	Dalam	Luar
1	  Saling Asing Luar	2	2	Menentukan titik potong kedua Garis Singgung kemudian mencari PGS melalui titik di luar lingkaran. Titik potong: $E\left(\frac{Rx_Q + rx_P}{R+r}, \frac{Ry_Q + ry_P}{R+r}\right)$ Dengan: L1: Pusat P , jari-jari R L2: Pusat Q, jari-jari r	Menentukan titik potong kedua Garis Singgung kemudian mencari PGS melalui titik di luar lingkaran. Titik potong: $S\left(\frac{Rx_Q - rx_P}{R-r}, \frac{Ry_Q - ry_P}{R-r}\right)$ Jika jari-jari lingkaran sama mk $m_{gs} = m_{PQ} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$ PGS ditentukan dengan rumus PGS jika diketahui gradiennya.
2	 Bersinggungan Luar	1	2	**Cara 1:** $PGS \equiv L_1 - L_2 = 0$ **Cara 2:** Menentukan titik singgung sekutu $E\left(\frac{Rx_Q + rx_P}{R+r}, \frac{Ry_Q + ry_P}{R+r}\right)$, kemudian gunakan PGS melalui titik pada lingkaran.	-- Sda --
3	 Berpotongan	0	2	-	-- Sda --
4	 Bersinggungan Dalam	0	1	-	**Cara 1:** $PGS \equiv L_1 - L_2 = 0$ **Cara 2:** Menentukan titik singgung sekutu $S\left(\frac{Rx_Q - rx_P}{R-r}, \frac{Ry_Q - ry_P}{R-r}\right)$, kemudian gunakan PGS melalui titik pada lingkaran.