

Transformasi – Luas Bayangan

Diberikan segitiga ABC dengan $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ dan $C(x_3, y_3)$. Dengan Pendekatan Koordinat, luas segitiga ABC bisa dicari dengan:

$$L_{\Delta ABC} = L = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} ((x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1) - (x_2 y_1 + x_3 y_2 + x_1 y_3))$$

Segitiga ABC ditransformasikan oleh matrik $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ diperoleh:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 & ax_2 + by_2 & ax_3 + by_3 \\ cx_1 + dy_1 & cx_2 + dy_2 & cx_3 + dy_3 \end{pmatrix}$$

Luas segitiga bayangan dengan titik $A'(ax_1 + by_1, cx_1 + dy_1)$, $B'(ax_2 + by_2, cx_2 + dy_2)$ dan $C'(ax_3 + by_3, cx_3 + dy_3)$ adalah:

$$L' = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} ax_1 + by_1 & ax_2 + by_2 & ax_3 + by_3 \\ cx_1 + dy_1 & cx_2 + dy_2 & cx_3 + dy_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \leftarrow \text{Hitung seperti menghitung determinan matrik cara sarus...}$$

$$= \frac{1}{2} [(acx_1 x_2 + adx_1 y_2 + bcx_2 y_1 + bdy_1 y_2 + acx_2 x_3 + adx_2 y_3 + bcx_3 y_2 + bdy_2 y_3 + acx_1 x_3 + adx_3 y_1 + bcx_1 y_3 + bdy_1 y_3) - (acx_1 x_2 + adx_2 y_1 + bcx_1 y_2 + bdy_1 y_2 + acx_2 x_3 + adx_3 y_2 + bcx_2 y_3 + bdy_2 y_3 + acx_1 x_3 + adx_1 y_3 + bcx_3 y_1 + bdy_1 y_3)]$$

$$= \frac{1}{2} [(adx_1 y_2 + bcx_2 y_1 + adx_2 y_3 + bcx_3 y_2 + adx_3 y_1 + bcx_1 y_3) - (adx_2 y_1 + bcx_1 y_2 + adx_3 y_2 + bcx_2 y_3 + adx_1 y_3 + bcx_3 y_1)]$$

$$= \frac{1}{2} [(adx_1 y_2 + adx_2 y_3 + adx_3 y_1 - adx_2 y_1 - adx_3 y_2 - adx_1 y_3) - (bcx_1 y_2 + bcx_2 y_3 + bcx_3 y_1 - bcx_2 y_1 - bcx_3 y_2 - bcx_1 y_3)]$$

$$= \frac{1}{2} [ad(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_2 y_1 - x_3 y_2 - x_1 y_3) - bc(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_2 y_1 - x_3 y_2 - x_1 y_3)]$$

$$= \frac{1}{2} (ad - bc)(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_2 y_1 - x_3 y_2 - x_1 y_3)$$

$$= (ad - bc) \times \frac{1}{2} (x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_2 y_1 - x_3 y_2 - x_1 y_3)$$

$$= (ad - bc) \times L$$

Mengingat luas selalu positif, maka

$$L' = |ad - bc| \times L \\ = |\det M| \times L$$

Dengan cara yang sama, untuk segi-4 $ABCD$ dimana $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ dan $D(x_4, y_4)$ serta ditransformasikan oleh matrik $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ akan diperoleh:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 & ax_2 + by_2 & ax_3 + by_3 & ax_4 + by_4 \\ cx_1 + dy_1 & cx_2 + dy_2 & cx_3 + dy_3 & cx_4 + dy_4 \end{pmatrix} \text{ dan}$$

$$L' = |ad - bc| \times L \\ = |\det M| \times L$$

Contoh:

1. Matrik transformasi untuk Dilatasi dengan faktor skala k adalah $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ dimana $\begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} = k^2$.

Dengan demikian, jika suatu bangun datar di Ditalasi maka luas bayangannya adalah $L' = k^2 L$.

2. Diberikan segitiga ABC dengan $A(0,0)$, $B(4,0)$ dan $C(2,3)$. Segitiga ABC ditransformasikan oleh matrik $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Tentukan luas bayangan segitiga ABC !

Jawab:

Dengan menggambar, kita dapatkan luas segitiga $ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$ satuan luas.

Maka luas bayangan segitiga ABC atau segitiga $A'B'C'$ adalah:

$$L' = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \times L = (10 - 8) \times 6 = 2 \times 6 = 12 \text{ satuan luas.}$$

Note:

Silakan buka juga rumus ttg luas segi-3 dan segi-4 pada bidang koordinat.



Hak cipta dilindungi Allah. tak Dilarang menvebarkan sebagian atau seluruh isi tulisan ini dalam bentuk apapun selama ada manfaatnya, dan jangan lupa sisipkan DOA untuk kami.
Doa seorang muslim untuk saudaranya sesama muslim dari kejauhan tanpa diketahui olehnya akan Dikabulkan. Di atas kepalanya ada malaikat yg telah diutus, dan tiap kali ia berdo'a untuk Kebaikan, mk malaikat yg diutus tsb akan mengucapkan "Amin & kamu Juga akan mendapatkan seperti itu" (HR. Muslim 8/86).