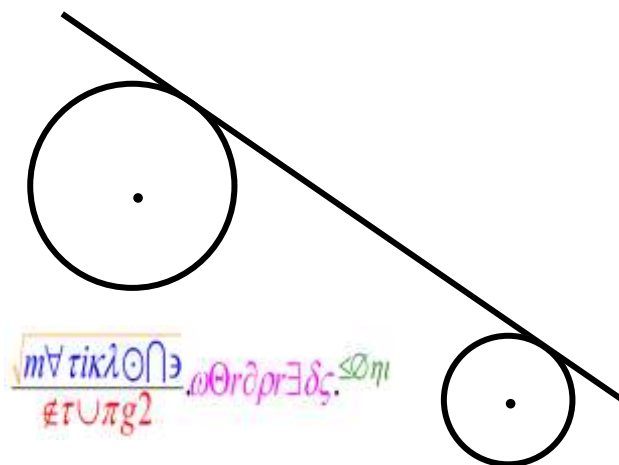


== LINGKARAN ==

Persamaan Garis Singgung Sekutu 2 Lingkaran

oleh:

Anang Wibowo, S.Pd



2012, Nop 2014

MatikZone's Series

Email : matikzone@gmail.com Blog : www.matikzone.wordpress.com HP : 085 233 897 897

© Hak Cipta Dilindungi Undang-undang. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh isi materi ini tanpa mendo'akan kebaikan untuk kami dan umat islam seluruhnya. Dan jangan lupa mencantumkan sumbernya ya...

Persamaan Garis Singgung Sekutu 2 Lingkaran

Misalkan:

$P = P(x_P, y_P)$ = Pusat lingkaran pertama atau L_1

$Q = Q(x_Q, y_Q)$ = Pusat lingkaran pertama atau L_2

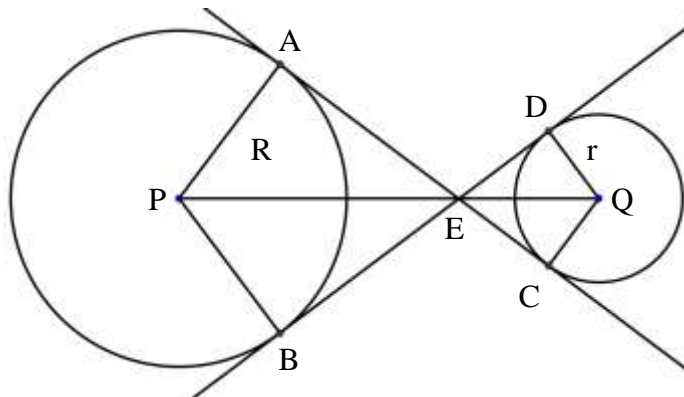
R = Jari-jari L_1

r = jaari-jari L_2

E = titik potong garis singgung sekutu dalam

S = titik potong garis singgung sekutu luar

GARIS SINGGUNG SEKUTU DALAM

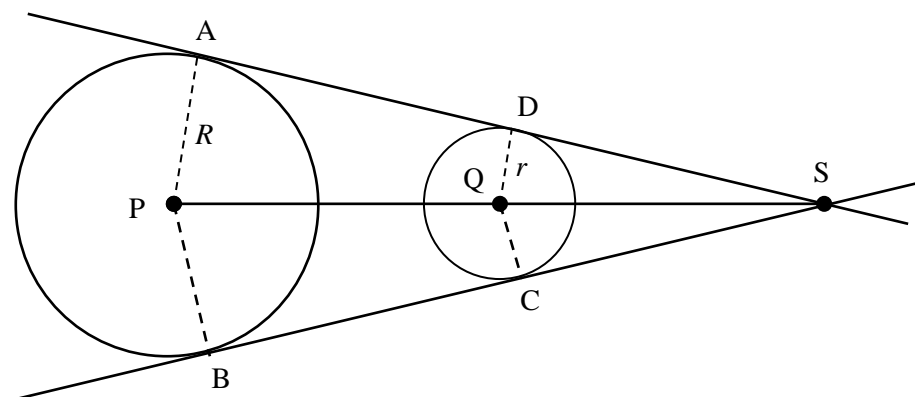


$\Delta PBE \sim \Delta QDE$, karena $\angle PBE = \angle QDE = 90^\circ$ dan $\angle PEB = \angle QED$ yang berakibat

$\angle BPE = \angle DQE$. Diperoleh $\frac{PE}{QE} = \frac{PB}{QD} = \frac{R}{r}$ atau $PE : QE = R : r$. (E membagi PQ dengan perbandingan $PE : QE = R : r$)

Koordinat titik E adalah $E(x_E, y_E) = E\left(\frac{Rx_Q + rx_P}{R+r}, \frac{Ry_Q + ry_P}{R+r}\right)$

GARIS SINGGUNG SEKUTU LUAR



$\Delta PBS \sim \Delta QCS$, karena $\angle PBS = \angle QCS = 90^\circ$ dan $\angle PSB = \angle QSC$ yang mengakibatkan $\angle BPS = \angle CQS$. Diperoleh $\frac{PQ+QS}{QS} = \frac{PB}{QC} = \frac{R}{r} \Rightarrow \frac{PQ}{QS} + 1 = \frac{R}{r} \Rightarrow \frac{PQ}{QS} = \frac{R-r}{r}$; $R > r$

Titik S adalah perpanjangan garis PQ dengan perbandingan $PQ:QS = (R-r):r$; $R > r$), maka

$$Q(x_Q, y_Q) = Q\left(\frac{(R-r)x_S + rx_P}{(R-r)+r}, \frac{(R-r)y_S + ry_P}{(R-r)+r}\right)$$

$$\Rightarrow x_Q = \frac{(R-r)x_S + rx_P}{(R-r)+r} \Rightarrow Rx_Q = (R-r)x_S + rx_P$$

$$\Rightarrow (R-r)x_S = Rx_Q - rx_P$$

$$\Rightarrow x_S = \frac{Rx_Q - rx_P}{(R-r)}$$

dan

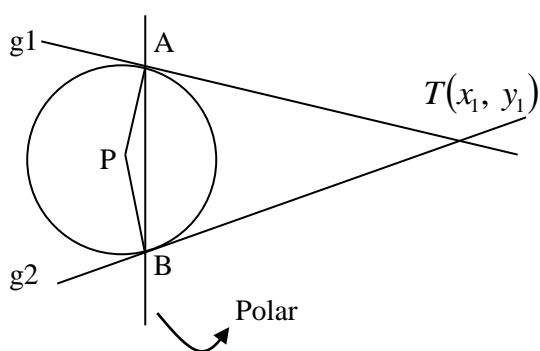
$$\Rightarrow y_Q = \frac{(R-r)y_S + ry_P}{(R-r)+r} \Rightarrow Ry_Q = (R-r)y_S + ry_P$$

$$\Rightarrow (R-r)y_S = Ry_Q - ry_P$$

$$\Rightarrow y_S = \frac{Ry_Q - ry_P}{(R-r)}$$

Jadi, koordinat titik S adalah $S(x_S, y_S) = S\left(\frac{Rx_Q - rx_P}{R-r}, \frac{Ry_Q - ry_P}{R-r}\right)$

Untuk menentukan persamaan garis singgung sekutunya, ikuti langkah-langkah:



1. Tentukan persamaan garis polarnya
2. Substitusi ke persamaan lingkaran untuk mendapatkan koordinat titik A dan B.
3. Gunakan persamaan garis singgung melalui titik pada lingkaran untuk menentukan persamaan garis singgung sekutunya. Persamaanya sama dengan persamaan garis polar.

Lingkaran: $(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 = R^2$,

Persamaan garis polar: $(x_1 - x_P)(x - x_P) + (y_1 - y_P)(y - y_P) = R^2$

Lingkaran: $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$,

Persamaan garis polar: $x_1x + y_1y + \frac{A}{2}(x_1 + x) + \frac{B}{2}(y_1 + y) + C = 0$

GARIS SINGGUNG SEKUTU LUAR, jika $R = r$.

Jika $R = r$ diperoleh gradient garis singgung

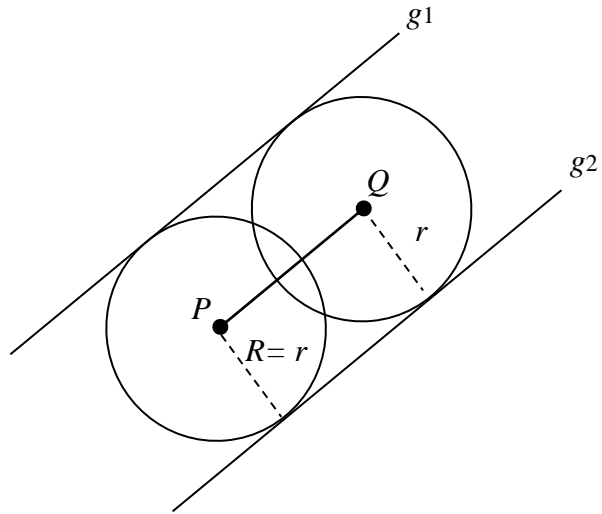
$$m_g = m_{PQ} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$$

Dengan persamaan garis singgung:

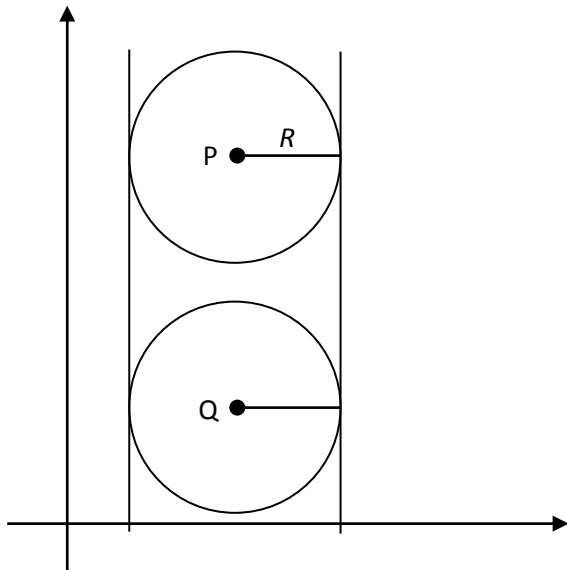
$$y - y_P = m_g(x - x_P) \pm R \sqrt{1 + m_g^2}$$

atau

$$y - y_Q = m_g(x - x_Q) \pm r \sqrt{1 + m_g^2}$$



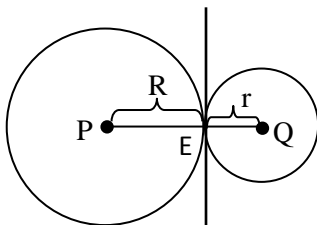
GARIS SINGGUNG SEKUTU LUAR, jika $R = r$ dan $x_P = x_Q$.



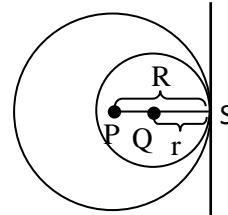
Persamaan garis singgung sekutu luarnya adalah:

$$x = x_P + R \text{ dan } x = x_P - R$$

DUA LINGKARAN YANG BERSINGGUNGAN



Bersinggungan Luar



Bersinggungan Dalam

$E\left(\frac{Rx_Q + rx_P}{R+r}, \frac{Ry_Q + ry_P}{R+r}\right)$ dan $S\left(\frac{Rx_Q - rx_P}{R-r}, \frac{Ry_Q - ry_P}{R-r}\right)$ adalah titik singgung sekutu dua lingkaran, sehingga persamaan garis singgung sekutunya adalah:

Untuk 2 lingkaran bersinggungan luar:

$$(x_E - x_P)(x - x_P) + (y_E - y_P)(y - y_P) = R^2 \quad \text{or}$$

$$(x_E - x_Q)(x - x_Q) + (y_E - y_Q)(y - y_Q) = r^2$$

Untuk 2 lingkaran bersinggungan dalam:

$$(x_S - x_P)(x - x_P) + (y_S - y_P)(y - y_P) = R^2 \quad \text{or}$$

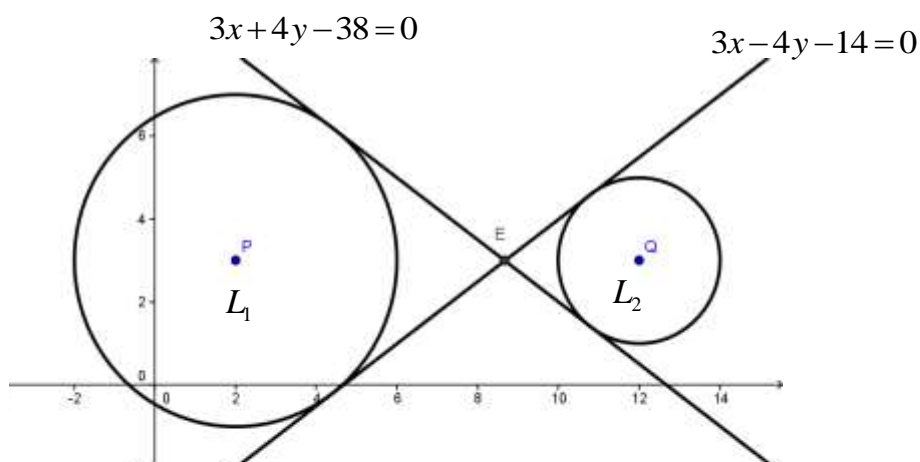
$$(x_S - x_Q)(x - x_Q) + (y_S - y_Q)(y - y_Q) = r^2$$

CONTOH SOAL DENGAN PEMBAHASAN:

Soal 1:

Tentukan persamaan garis singgung sekutu dalam dari $L_1 \equiv (x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$ dan $L_2 \equiv (x-12)^2 + (y-3)^2 = 4$.

Pembahasan:



$$L_1 \equiv (x-2)^2 + (y-3)^2 = 16 \text{ berpusat di } P(2, 3) \text{ dan jari-jari } R = 4$$

$$L_2 \equiv (x-12)^2 + (y-3)^2 = 4 \text{ berpusat di } Q(12, 3) \text{ dan jari-jari } r = 2$$

Hubungan dua lingkaran

$$\left. \begin{array}{l} PQ = \sqrt{(12-2)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{100} = 10 \\ R+r = 4+2 = 6 \\ R-r = 4-2 = 2 \end{array} \right\} R+r < PQ \text{ and } R-r < PQ$$

Kedua lingkaran saling asing luar, mempunyai 2 garis singgung sekutu dalam.

$$\text{Kita peroleh } E\left(\frac{4 \cdot 12 + 2 \cdot 2}{4+2}, \frac{4 \cdot 3 + 2 \cdot 3}{4+2}\right) = E\left(\frac{52}{6}, \frac{18}{6}\right) = E\left(\frac{26}{3}, 3\right)$$

Cara 1: menggunakan L_1 .

Persamaan garis singgung pada lingkaran 1 dengan gradient m adalah:

$$y - y_p = m(x - x_p) \pm R\sqrt{1+m^2} \Rightarrow y - 3 = m(x - 2) \pm 4\sqrt{1+m^2}$$

Garis singgung melalui titik $E\left(\frac{26}{3}, 3\right)$, sehingga

$$\begin{aligned} y - 3 = m(x - 2) \pm 4\sqrt{1+m^2} &\Rightarrow 3 - 3 = m\left(\frac{26}{3} - 2\right) \pm 4\sqrt{1+m^2} \\ &\Rightarrow 0 = \frac{20}{3}m \pm 4\sqrt{1+m^2} \\ &\Rightarrow \pm 4\sqrt{1+m^2} = \frac{20}{3}m \\ &\Rightarrow 16 + 16m^2 = \frac{400m^2}{9} \\ &\Rightarrow 144 + 144m^2 = 400m^2 \\ &\Rightarrow 256m^2 = 144 \\ &\Rightarrow 16m^2 = 9 \\ &\Rightarrow m^2 = \frac{9}{16} \\ &\Rightarrow m = \pm \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Untuk } m = \frac{3}{4} &\Rightarrow y - 3 = \frac{3}{4}\left(x - \frac{26}{3}\right) \\ &\Rightarrow y - 3 = \frac{3}{4}x - \frac{26}{4} \\ &\Rightarrow 3x - 4y - 14 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Untuk } m = -\frac{3}{4} &\Rightarrow y - 3 = -\frac{3}{4}\left(x - \frac{26}{3}\right) \\ &\Rightarrow y - 3 = -\frac{3}{4}x + \frac{26}{4} \\ &\Rightarrow 3x + 4y - 38 = 0 \end{aligned}$$

Persamaan garis singgung sekutu dalamnya adalah:

- $g_1 \equiv 3x - 4y - 14 = 0$
- $g_2 \equiv 3x + 4y - 38 = 0$

Cara 2: menggunakan L_2 .

Persamaan garis singgung pada lingkaran 2 dengan gradient m adalah:

$$y - y_Q = m(x - x_Q) \pm r\sqrt{1+m^2} \Rightarrow y - 3 = m(x - 12) \pm 2\sqrt{1+m^2}$$

Garis singgung melalui titik $E\left(\frac{26}{3}, 3\right)$, sehingga

$$\begin{aligned}
y-3 &= m(x-12) \pm 2\sqrt{1+m^2} \Rightarrow & 3-3 &= m\left(\frac{26}{3}-12\right) \pm 2\sqrt{1+m^2} \\
& \Rightarrow & 0 &= -\frac{10}{3}m \pm 2\sqrt{1+m^2} \\
& \Rightarrow \pm 2\sqrt{1+m^2} &= -\frac{10}{3}m \\
& \Rightarrow 4+4m^2 &= \frac{100m^2}{9} \\
& \Rightarrow 36+36m^2 &= 100m^2 \\
& \Rightarrow 64m^2 &= 36 \\
& \Rightarrow 16m^2 &= 9 \\
& \Rightarrow m^2 &= \frac{9}{16} \\
& \Rightarrow m &= \pm \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Untuk } m = \frac{3}{4} \Rightarrow & y-3 = \frac{3}{4}\left(x - \frac{26}{3}\right) \\
\Rightarrow & y-3 = \frac{3}{4}x - \frac{26}{4} \\
\Rightarrow & 3x - 4y - 14 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Untuk } m = -\frac{3}{4} \Rightarrow & y-3 = -\frac{3}{4}\left(x - \frac{26}{3}\right) \\
\Rightarrow & y-3 = -\frac{3}{4}x + \frac{26}{4} \\
\Rightarrow & 3x + 4y - 38 = 0
\end{aligned}$$

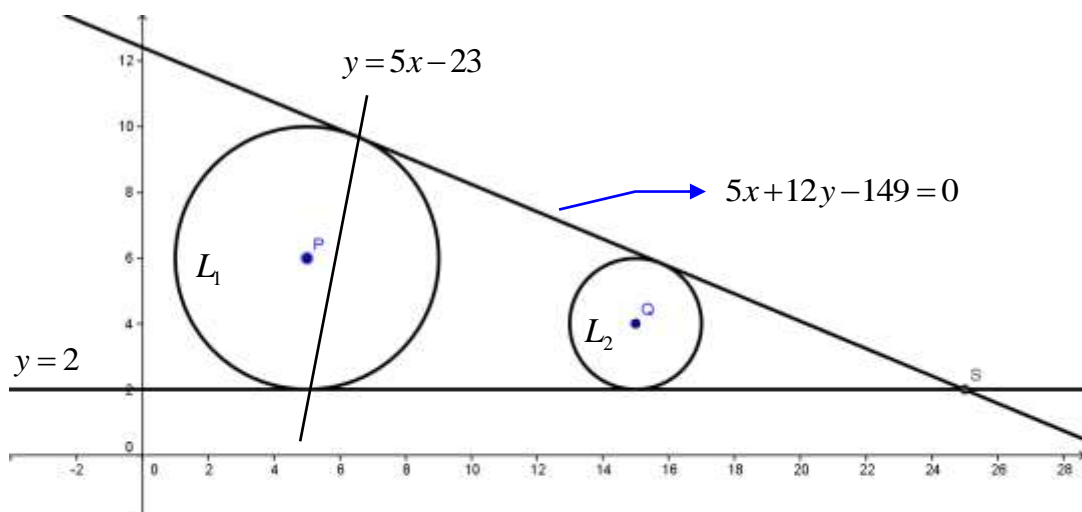
Persamaan garis singgung sekutu dalamnya adalah:

- $g_1 \equiv 3x - 4y - 14 = 0$
- $g_2 \equiv 3x + 4y - 38 = 0$

Soal 2:

Tentukan persamaan garis singgung sekutu luar dari $L_1 \equiv (x-5)^2 + (y-6)^2 = 16$ dan $L_2 \equiv (x-15)^2 + (y-4)^2 = 4$.

Pembahasan:



$$L_1 \equiv (x-5)^2 + (y-6)^2 = 16, \text{ berpusat di } P(5, 6) \text{ dan jari-jari } R = 4$$

$$L_2 \equiv (x-15)^2 + (y-4)^2 = 4, \text{ berpusat di } Q(15, 4) \text{ dan jari-jari } r = 2$$

Hubungan dua lingkaran

$$\left. \begin{aligned} PQ &= \sqrt{(15-5)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{100+4} = \sqrt{104} \\ R+r &= 4+2=6 \\ R-r &= 4-2=2 \end{aligned} \right\} R+r < PQ \text{ dan } R-r < PQ$$

Kedua lingkaran saling asing luar sehingga mempunyai dua garis singgung sekutu luar

$$\text{Kita dapatkan titik } S\left(\frac{4 \cdot 15 - 2 \cdot 5}{4-2}, \frac{4 \cdot 4 - 2 \cdot 6}{4-2}\right) = S\left(\frac{50}{2}, \frac{4}{2}\right) = S(25, 2)$$

Cara 1: menggunakan garis polar pada L1

Persamaan garis polar dari S(25, 2) pada L1 adalah:

$$\begin{aligned} (x_E - x_P)(x - x_P) + (y_E - y_P)(y - y_P) &= R^2 \\ \Rightarrow (25-5)(x-5) + (2-6)(y-6) &= 16 \\ \Rightarrow 20x - 100 - 4y + 24 - 16 &= 0 \\ \Rightarrow 20x - 4y - 92 &= 0 \\ \Rightarrow y &= 5x - 23 \end{aligned}$$

Substitusi ke L1

$$\begin{aligned} (x-5)^2 + (y-6)^2 = 16 &\Rightarrow (x-5)^2 + (5x-29)^2 = 16 \\ \Rightarrow x^2 - 10x + 25 + 25x^2 - 290x + 841 - 16 &= 0 \\ \Rightarrow 26x^2 - 300x + 850 &= 0 \\ \Rightarrow 13x^2 - 150x + 425 &= 0 \\ \Rightarrow (13x-85)(x-5) &= 0 \\ \Rightarrow x = \frac{85}{13} \text{ atau } x = 5 \end{aligned}$$

Substitusi x ke persamaan garis polar.

$$\begin{aligned} * x = \frac{85}{13} &\Rightarrow y = 5 \cdot \frac{85}{13} - 23 = \frac{425}{13} - \frac{299}{13} = \frac{126}{13} &\Rightarrow T_1\left(\frac{85}{13}, \frac{126}{13}\right) \\ * x = 5 &\Rightarrow y = 5 \cdot 5 - 23 = 25 - 23 = 2 &\Rightarrow T_2(5, 2) \end{aligned}$$

$T_1\left(\frac{85}{13}, \frac{126}{13}\right)$ dan $T_2(5, 2)$ adalah titik singgung dari garis singgungnya, sehingga:

$$\begin{aligned}
T_1\left(\frac{85}{13}, \frac{126}{13}\right) &\Rightarrow \left(\frac{85}{13}-5\right)(x-5) + \left(\frac{126}{13}-6\right)(y-6) = 16 \\
&\Rightarrow \frac{20}{13}(x-5) + \frac{48}{13}(y-6) - 16 = 0 \\
&\Rightarrow 20(x-5) + 48(y-6) - 208 = 0 \\
&\Rightarrow 20x + -100 + 48y - 288 - 208 = 0 \\
&\Rightarrow 20x + 48y - 596 = 0 \\
&\Rightarrow 5x + 12y - 149 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_1(5, 2) &\Rightarrow (5-5)(x-5) + (2-6)(y-6) = 16 \\
&\Rightarrow 0(x-5) - 4(y-6) - 16 = 0 \\
&\Rightarrow -4y + 24 - 16 = 0 \\
&\Rightarrow -4y = -8 \\
&\Rightarrow y = 2
\end{aligned}$$

Jadi, persamaan garis singgung sekutu luarnya adalah: $y = 2$ dan $5x + 12y - 149 = 0$

Cara 2: menentukan gradien dan L₁.

Persamaan garis singgung pada lingkaran 1 dengan gradient m adalah:

$$y - y_p = m(x - x_p) \pm R\sqrt{1+m^2} \Rightarrow y - 6 = m(x - 5) \pm 4\sqrt{1+m^2}$$

Garis singgung melalui titik $S(25, 2)$, sehingga

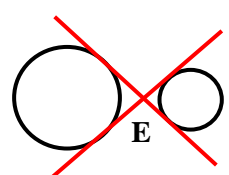
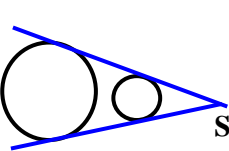
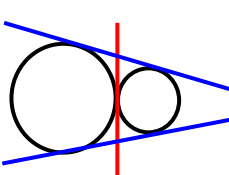
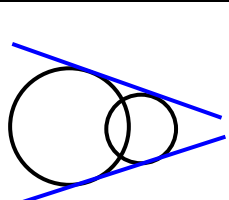
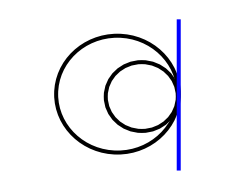
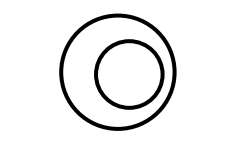
$$\begin{aligned}
y - 6 = m(x - 5) \pm 4\sqrt{1+m^2} &\Rightarrow 2 - 6 = m(25 - 5) \pm 4\sqrt{1+m^2} \\
&\Rightarrow -4 = 20m \pm 4\sqrt{1+m^2} \\
&\Rightarrow -1 = 5m \pm \sqrt{1+m^2} \\
&\Rightarrow \pm \sqrt{1+m^2} = 5m + 1 \\
&\Rightarrow 1 + m^2 = 25m^2 + 10m + 1 \\
&\Rightarrow 24m^2 + 10m = 0 \\
&\Rightarrow m(24m + 10) = 0 \\
&\Rightarrow m = 0 \text{ atau } m = -\frac{10}{24} = -\frac{5}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Untuk } m = 0 &\Rightarrow y - 2 = 0(x - 25) \\
&\Rightarrow y - 2 = 0 \\
&\Rightarrow y = 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Untuk } m = -\frac{5}{12} &\Rightarrow y - 2 = -\frac{5}{12}(x - 25) \\
&\Rightarrow y - 2 = -\frac{5}{12}x + \frac{125}{12} \\
&\Rightarrow 12y - 24 = -5x + 125 \\
&\Rightarrow 5x + 12y - 149 = 0
\end{aligned}$$

Jadi, persamaan garis singgung sekutu luarnya adalah: $y = 2$ dan $5x + 12y - 149 = 0$

Garis Singgung Sekutu 2 Lingkaran

Hubungan 2 Lingkaran		Banyak Garis Singgung		Cara Menentukan Persamaan	
		D	L	Garis Singgung Sekutu Dalam	Garis Singgung Sekutu Luar
$PQ > R + r$	 <p style="text-align: center;">E</p>	2	2	<ul style="list-style-type: none"> Tentukan titik E Tentukan persamaan garis singgung melalui titik di luar lingkaran. $E\left(\frac{Rx_Q + rx_P}{R+r}, \frac{Ry_Q + ry_P}{R+r}\right)$	<ul style="list-style-type: none"> Tentukan titik S Tentukan persamaan garis singgung melalui titik di luar lingkaran. $S\left(\frac{Rx_Q - rx_P}{R-r}, \frac{Ry_Q - ry_P}{R-r}\right)$ <p>Jika $R = r$, gunakan persamaan garis singgung yang diketahui gradiennya</p> $m_g = m_{PQ} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$ <p>Jika $R = r$ dan $x_P = x_Q$, maka persamaannya adalah</p> $x = x_p \pm R$
	 <p style="text-align: center;">S</p> <p style="text-align: center;">Saling Asing Luar</p>				
$PQ = R + r$	 <p style="text-align: center;">Bersinggungan Luar</p>	1	2	<ul style="list-style-type: none"> Tentukan titik E Tentukan persamaan garis singgung melalui titik pada lingkaran <p>atau</p> $L_1 - L_2 = 0$	-- Sama dengan atas --
$ R - r < PQ < R + r$	 <p style="text-align: center;">Berpotongan</p>	0	2	-	-- Sama dengan atas --
$PQ = R - r $	 <p style="text-align: center;">Bersinggungan Dalam</p>	0	1	-	<ul style="list-style-type: none"> Tentukan titik S Tentukan persamaan garis singgung melalui titik pada lingkaran <p>atau</p> $L_1 - L_2 = 0$
$PQ < R - r $	 <p style="text-align: center;">Saling Asing Dalam</p>	0	0	-	-