SELEKSI TINGKAT PROPINSI
CALON PESERTA OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2012
MATEMATIKA SMA/MA

PETUNJUK UNTUK PESERTA:

1. Tes terdiri dari dua bagian. Tes bagian pertama terdiri dari 20 soal isian singkat dan tes bagian kedua terdiri dari 5 soal uraian.
2. Waktu yang disediakan untuk menyelesaikan semua soal adalah 210 menit.

   (tiga puluh) menit pertama dari keseluruhan waktu tes.
3. Tuliskan nama, kelas, dan asal sekolah Anda di sebelah kanan atas pada setiap halaman.
4. Untuk soal bagian pertama:
   (a) Masing-masing soal bagian pertama bernilai 1 (satu) angka.
   (b) Beberapa pertanyaan dapat memiliki lebih dari satu jawaban yang benar. Anda diminta memberikan jawaban yang paling tepat atau persis untuk pertanyaan seperti ini. Nilai hanya akan diberikan kepada pemberi jawaban paling tepat atau paling persis.
   (c) Tuliskan hanya jawaban dari soal yang diberikan. Tuliskan jawaban tersebut pada kotak di sebelah kanan setiap soal.
5. Untuk soal bagian kedua:
   (a) Masing-masing soal bagian kedua bernilai 7 (tujuh) angka.
   (b) Anda diminta menyelesaikan soal yang diberikan secara lengkap. Selain jawaban akhir, Anda diminta menuliskan semua langkah dan argumentasi yang Anda gunakan untuk sampai kepada jawaban akhir tersebut.
   (c) Jika halaman muka tidak cukup, gunakan halaman sebaliknya.
6. Jawaban hendaknya Anda tuliskan dengan menggunakan tinta (bukan pensil), kecuali pada sketsa gambar.
7. Selama tes, Anda tidak diperkenankan menggunakan buku, catatan, dan alat bantu hitung. Anda juga tidak diperkenankan bekerjasama.
8. Mulailah bekerja hanya setelah pengawas memberi tanda dan berhentilah bekerja segera setelah pengawas memberi tanda.
9. Selamat bekerja.

Nama: .... Kelas: ....
Sekolah: ....

BAGIAN PERTAMA

1. Misalkan O dan I berturut-turut menyatakan titik pusat lingkaran luar dan titik pusat lingkaran dalam pada segitiga dengan panjang sisi $3, 4$, dan 5. Panjang dari OI adalah...

2. Misalkan x, y, dan z adalah bilangan-bilangan prima yang memenuhi persamaan
$$34x - 51y = 2012z.$$
Nilai dari $x + y + z$ adalah...

3. Diketahui empat dadu setimbang dan berbeda, yang masing-masing berbentuk segi delapan beraturan bermata 1, 2, 3, ..., 8. Empat dadu tersebut ditos (dilempar) bersama-sama satu kali. Probabilitas kejadian ada dua dadu dengan mata yang muncul sama sebesar ...

4. Fungsi bernilai real f dan g masing-masing memiliki persamaan
$$f(x) = \sqrt{\lfloor x \rfloor - a} \quad \text{dan} \quad g(x) = \sqrt{x^2 - \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{a}}}$$
dengan a bilangan bulat positif. Diketahui $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x. Jika domain $g \circ f$ adalah $\{x | 3\frac{1}{2} \leq x < 4\}$, maka banyaknya a yang memenuhi sebanyak...

5. Diberikan bilangan prima $p > 2$. Jika S adalah himpunan semua bilangan asli n yang menyebabkan $n^2 + pn$ merupakan kuadrat dari suatu bilangan bulat maka $S = ...$

6. Untuk sebarang bilangan real x didefinisikan $\{x\}$ sebagai bilangan bulat yang terdekat dengan x, sebagai contoh $\{1,9\} = 2$, $\{-0,501\} = -1$, dan sebagainya. Jika n adalah suatu bilangan bulat positif kelipatan 2012, maka banyak bilangan bulat positif k yang memenuhi $\left\{\sqrt[3]{k}\right\} = n$ adalah...

7. Banyak bilangan bilangan asli $n < 100$ yang mempunya kelipatan yang berbentuk
$$123456789123456789...123456789$$
adalah...

8. Diberikan parallelogram (jajar genjang) $ABCD$. Titik M pada AB sedemikian rupa sehingga $\frac{AM}{AB} = 0,017$, dan titik N pada AD sehingga $\frac{AN}{AD} = \frac{17}{2009}$. Misal- kan $AC \cap MN = P$, maka $\frac{AC}{AP} =$ ...

9. Dalam sebuah pertemuan, 5 pasang suami istri akan didudukkan pada sebuah meja bundar. Berapa banyak cara untuk mengatur posisi duduk 5 pasang suami istri tersebut sedemikian sehingga tepat 3 suami duduk disamping istrinya?

10. Jika p, q, dan r akar-akar dari $x^3 - x^2 + x - 2 = 0$, maka $p^3 + q^3 + r^3 =$ ....

11. Jika m dan n bilangan bulat positif yang memenuhi $m^2 + n^5 = 252$, maka $m + n =$...

12. Pada ΔABC titik D terletak pada garis BC. Panjang $BC = 3$, $\angle ABC = 30°$, dan $\angle ADC = 45°$. Panjang $AC =$...

13. Lima siswa, A, B, C, D, E berada pada satu kelompok dalam lomba lari estafet. Jika A tidak bisa berlari pertama dan D tidak bisa berlari terakhir, maka banyaknya susunan yang mungkin adalah...

14. Diketahui H adalah himpunan semua bilangan asli kurang dari 2012 yang faktor primanya tidak lebih dari 3. Selanjutnya didefinisikan himpunan

$$S = \left\{ \frac{1}{n} | n \in H \right\}.$$

Jika x merupakan hasil penjumlahan dari semua anggota S dan $\lfloor x \rfloor$ menya- takan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x, maka $\lfloor x \rfloor =$ ...

15. Diberikan dua lingkaran Γ_1 dan Γ_2 yang berpotongan di dua titik yaitu A dan B dengan $AB = 10$. Ruas garis yang menghubungkan titik pusat kedua lingkaran memotong lingkaran Γ_1 dan Γ_2 masing-masing di P dan Q. Jika $PQ = 3$ dan jari-jari lingkaran Γ_1 adalah 13, maka jari-jari lingkaran Γ_2 adalah ...

16. Banyaknya pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy^2} = \frac{3}{4}$$

adalah ......

17. Untuk bilangan real positif x dan y dengan $xy = \frac{1}{3}$, nilai minimum $\frac{1}{9x^6} + \frac{1}{4y^6}$ adalah ......

18. Banyaknya pasangan bilangan bulat positif (a, b) yang memenuhi

$$4^a + 4a^2 + 4 = b^2$$

adalah ......

19. Diberikan segitiga ABC, dengan panjang AB sama dengan dua kali panjang AC. Misalkan D dan E berturut-turut pada segmen AB dan BC, sehingga $\angle BAE = \angle ACD$. Jika $F = AE \cap CD$ dan CEF merupakan segitiga sama sisi, maka besar sudut dari segitiga ABC adalah ......

20. Banyaknya bilangan bulat positif n yang memenuhi $n \leq 2012$ dan merupakan bilangan kuadrat sempurna atau kubik atau pangkat 4 atau pangkat 5 atau ... atau pangkat 10, ada sebanyak...

Nama: .... Kelas: ....

Sekolah: ....

BAGIAN KEDUA

Soal 1. Tentukan semua pasangan bilangan bulat tak negatif (a, b, x, y) yang memenuhi sistem persamaan

$$\begin{cases} a + b = xy \\ x + y = ab \end{cases}$$

Nama: .... Kelas: ....
Sekolah: ....

Soal 2. Cari semua pasangan bilangan real (x, y, z) yang memenuhi sistem persamaan

$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{y - z^2} \\ y = 1 + \sqrt{z - x^2} \\ z = 1 + \sqrt{x - y^2}. \end{cases}$$

Nama: .... Kelas: ....
Sekolah: ....

Soal 3. Seorang laki - laki memiliki 6 teman. Pada suatu malam di suatu restoran, dia bertemu dengan masing - masing mereka 11 kali, setiap 2 dari mereka 6 kali, setiap 3 dari mereka 4 kali, setiap 4 dari mereka 3 kali, setiap 5 dari mereka 3 kali, dan semua mereka 10 kali. Dia makan diluar 9 kali tanpa bertemu mereka. Berapa kali dia makan di restoran tersebut secara keseluruhan ?

Nama: .... Kelas: ....
Sekolah: ....

Soal 4. Diberikan segitiga lancip ABC. Titik H menyatakan titik kaki dari garis tinggi yang ditarik dari A. Buktikan bahwa

$$AB + AC \geq BC \cos \angle BAC + 2AH \sin \angle BAC$$

Nama: .... Kelas: ....

Sekolah: ....

Soal 5. Diketahui $p_0 = 1$ dan p_i bilangan prima ke-i, untuk $i = 1, 2, \ldots$; yaitu $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $\ldots$. Bilangan prima p_i dikatakan ***sederhana*** jika

$$p_i^{(n^2)} > p_{i-1}(n!)^4$$

untuk semua bilangan bulat positif n. Tentukan semua bilangan prima yang ***sederhana***!

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2012
TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2013

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

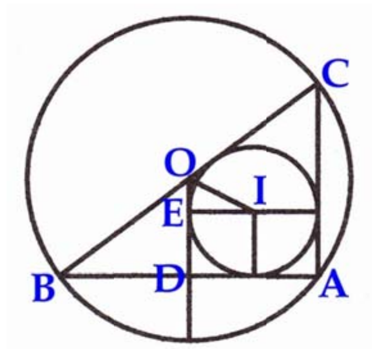
SOLUSI SOAL

BAGIAN PERTAMA

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN PERTAMA

1. Tanpa mengurangi keumuman misalkan AC = 3 ; AB = 4 ; BC = 5.
   Misalkan juga R adalah jari-jari lingkaran luar dan r adalah jari-jari lingkaran dalam ΔABC.
   Karena ΔABC siku-siku di A maka BC adalah diameter lingkaran luar ΔABC.
   Jadi, O adalah pertengahan BC.



   Misalkan D adalah titik pada AB sehingga OD ⊥ AB dan E pada OD sehingga IE ⊥ OD.
   $\frac{1}{2}r(a+b+c) = [ABC] = 6$
   r = 1
   Karena O adalah pertengahan BC maka D adalah pertengahan AB sehingga AD = 2.
   Jadi, E adalah titik singgung garis OD terhadap lingkaran dalam. Maka IE = 2.
   OE = OD − ED = $\frac{1}{2}$ AC − r = $\frac{1}{2}$
   $OI^2 = OE^2 + IE^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1)^2$
   OI = $\frac{1}{2}\sqrt{5}$
   ∴ Jadi, panjang OI = $\mathbf{\frac{1}{2}\sqrt{5}}$.

2. 34x − 51y = 2012z dengan x, y, z adalah bilangan prima.
   Karena 34 dan 2012 habis dibagi 2 maka y habis dibagi 2. Karena y prima maka y = 2.
   Karena 34 dan 51 habis dibagi 17 maka z habis dibagi 17. Karena z prima maka z = 17.
   34x − 51(2) = 2012(17)
   x = 1009 yang memenuhi bahwa x adalah bilangan prima.
   x + y + z = 1009 + 2 + 17 = 1028
   ∴ Jadi, nilai dari x + y + z adalah **1028**.

3. Banyaknya kejadian semua angka dadu berbeda = 8 x 7 x 6 x 5.
   Peluang ada angka yang sama = $1 - \frac{8x7x6x5}{8^4} = \frac{151}{256}$
   ∴ Jadi, peluang ada angka yang sama = $\frac{151}{256}$

4. $f(x) = \sqrt{\lfloor x \rfloor - a}$ dan $g(x) = \sqrt{x^2 - \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{a}}}$ dengan a adalah bilangan bulat positif.

$(gof)(x) = \sqrt{\lfloor x \rfloor - a - \frac{\sqrt{2\lfloor x \rfloor - 2a}}{\sqrt{a}}}$

Karena $3\frac{1}{2} \le x < 4$ maka $\lfloor x \rfloor = 3$.

Untuk $3\frac{1}{2} \le x < 4$ maka $f(x) = \sqrt{3 - a}$ sehingga

$(gof)(x) = \sqrt{3 - a - \frac{\sqrt{6 - 2a}}{\sqrt{a}}}$

Syarat yang harus dipenuhi adalah

$a \le 3$ ………………… (1) dan

$3 - a - \frac{\sqrt{6 - 2a}}{\sqrt{a}} \ge 0$

$a(3 - a)^2 \ge 6 - 2a$ ………………… (2)

Jika a = 1 maka $1 \cdot (3 - 1)^2 = 4$ dan $6 - 2(1) = 4$

Jika a = 2 maka $2 \cdot (3 - 2)^2 = 2$ dan $6 - 2(2) = 2$

Jika a = 3 maka $3 \cdot (3 - 3)^2 = 0$ dan $6 - 2(3) = 0$

Maka nilai a bulat positif yang memenuhi adalah a = 1 atau a = 2 atau a = 3.

$\therefore$ Banyaknya nilai a yang memenuhi ada **3**.

5. Karena $n^2 + pn$ bilangan kuadrat sempurna maka $4n^2 + 4pn$ juga merupakan kuadrat sempurna.

$4n^2 + 4pn = m^2$ dengan $n, m \in N$ dan p adalah bilangan prima.

$(2n + p)^2 - p^2 = m^2$

$p^2 = (2n + p + m)(2n + p - m)$

Maka ada 2 kasus :

- Jika 2n + p + m = p dan 2n + p − m = p
  Maka didapat 2n + p = 0 dan 2n − p = 0
  Didapat n = 0 yang tidak memenuhi syarat bahwa $n \in N$.
- Jika $2n + p + m = p^2$ dan $2n + p - m = 1$
  Jumlahkan kedua persamaan didapat
  $4n + 2p = p^2 + 1$
  $4n = (p - 1)^2$
  $n = \frac{(p-1)^2}{4}$
  Karena p adalah bilangan prima ganjil maka akan didapat $n \in N$.

$\therefore$ Jadi, $\boldsymbol{S = \left\{n \middle| n = \frac{(p-1)^2}{4}\right\}}$ **dengan p bilangan prima > 2.**

6. $\{\sqrt[3]{k}\} = n = 2012m$ dengan $m \in N$

$n - \frac{1}{2} < \sqrt[3]{k} < n + \frac{1}{2}$

$n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{4}n - \frac{1}{8} < k < n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{4}n + \frac{1}{8}$

Karena n habis dibagi 2012 maka $\frac{3}{2}n^2$ dan $\frac{3}{4}n$ keduanya bilangan asli. Jadi,

$n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{4}n \le k \le n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{4}n$

Maka banyaknya nilai k yang memenuhi ada $\left(n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{3}{4}n\right)-\left(n^3-\frac{3}{2}n^2+\frac{3}{4}n\right)+1=3n^2+1$.

∴ Jadi, banyaknya nilai k yang memenuhi ada $\mathbf{3n^2+1}$.

7. Misalkan m = 123456789123456789...123456789 merupakan bilangan terdiri dari 9k angka dengan angka-angka berulang setiap 9 angka yaitu 123456789.

m = 123456789(1 + 10^9 + 10^{18} + ⋯ + $10^{9(k-1)}$)

Jelas bahwa 3 | 123456789.

Juga jelas bahwa 9 membagi 123456789.

Karena 123456789123456789 habis dibagi 11 maka 11 juga membagi m.

999 = $3^3 \cdot 37$

$10^3 \equiv 1$ (mod 37) Maka $10^{9n} \equiv 1$ (mod 37) untuk n bilangan bulat tak negatif.

Jadi, jika k = 37 maka 37 | m = 123456789(1 + 10^9 + 10^{18} + ⋯ + $10^{9(k-1)}$)

$10^3 \equiv 1$ (mod 27) Maka $10^{9n} \equiv 1$ (mod 27) untuk n bilangan bulat tak negatif.

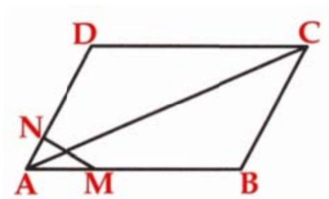
Jadi, jika k = 27 maka 27 | 1 + 10^9 + 10^{18} + ⋯ + $10^{9(k-1)}$ sehingga 27 | m

Karena 3 | 123456789 dan 27 | 1 + 10^9 + 10^{18} + ⋯ + $10^{9(k-1)}$ maka 81 | m

Maka bilangan asli n < 100 yang mempunyai kelipatan m adalah 1, 3, 9, 11, 27, 33, 37, 81, 99.

∴ Jadi, banyaknya bilangan asli n < 100 yang memenuhi ada **9**.

8. Perhatikan gambar.



Tanpa mengurangi keumuman misalkan koordinat A(0, 0), B(a, 0) dan D(b, c).

Maka koordinat C(b + a, c). Koordinat $M\left(\frac{17}{1000}a, 0\right)$ dan $N\left(\frac{17}{2009}b, \frac{17}{2009}c\right)$.

Persamaan garis AC adalah $y=\frac{c}{b+a}x$

Persamaan garis MN adalah $y-0=\frac{\frac{17}{2009}c-0}{\frac{17}{2009}b-\frac{17}{1000}a}\left(x-\frac{17}{1000}a\right)$

Perpotongan garis AC dan MN adalah titik P

$\frac{c}{b+a}x_P=\frac{1000c}{1000b-2009a}\left(x_P-\frac{17}{1000}a\right)$

$\frac{1}{b+a}x_P=\frac{1000}{1000b-2009a}x_P-\frac{17}{1000b-2009a}a$

$\frac{17a}{1000b-2009a}=\frac{1000}{1000b-2009a}x_P-\frac{1}{b+a}x_P=x_P\left(\frac{3009a}{(b+a)(1000b-2009a)}\right)$

$x_P=\frac{b+a}{177}$ sehingga $y_P=\frac{c}{b+a}x_P=\frac{c}{177}$. Jadi, koordinat $P\left(\frac{b+a}{177}, \frac{c}{177}\right)$.

Maka $\frac{AC}{AP}=\frac{x_C-x_A}{x_P-x_A}=\frac{y_C-y_A}{y_P-y_A}=177$

∴ Jadi, $\frac{AC}{AP}=\mathbf{177}$.

9. Misalkan A, B, C dan D adalah 4 orang dalam arah searah jarum jam yang tidak duduk dekat pasangannya dan x_A, x_B, x_C dan x_D adalah banyaknya kursi yang berada antara A dan B, antara B dan C, antara C dan D dan antara D dan A. Jelas bahwa x_A, x_B, x_C dan x_D semuanya genap. Ada 4 kasus :

- Kasus 1, $x_A = 0$, $x_B = 0$, $x_C = 0$ dan $x_D = 6$.
  A, B, C dan D akan berdekatan. Agar di antara mereka tidak ada sepasang suami isteri maka mereka harus duduk berselang seling.
  Banyaknya cara memilih A ada 10. Banyaknya cara memilih B hanya 8 sebab B tidak boleh pasangan A. Cara memilih C dan D hanya ada satu cara memilihnya sebab mereka pasangannya A dan B.
  Banyaknya cara menyusun 3 pasang lainnya adalah 3! X 2 x 2 x 2 = 48.
  Banyaknya susunan = 10 x 8 x 1 x 1 x 48 = 3840.
- Kasus 2, $x_A = 0$, $x_B = 2$, $x_C = 2$ dan $x_D = 2$.
  A dan B akan berdekatan sehingga tidak mungkin pasangan suami isteri. Banyaknya cara memilih A dan B adalah 10 x 8. C adalah pasangan A atau B sehingga banyaknya cara memilih C dan D adalah 2 x 1.
  Banyaknya cara menyusun 3 pasang lainnya adalah 3! X 2 x 2 x 2 = 48.
  Banyaknya susunan = 10 x 8 x 2 x 1 x 48 = 7680.
- Kasus 3, $x_A = 0$, $x_B = 0$, $x_C = 2$ dan $x_D = 4$.
  A, B dan C akan berdekatan sehingga B bukan pasangan A atau C. Banyaknya cara memilih A ada 10 dan B ada 8. Banyaknya cara memilih C dan D hanya ada 1.
  Banyaknya cara menyusun 3 pasang lainnya adalah 3! X 2 x 2 x 2 = 48.
  Banyaknya susunan = 10 x 8 x 1 x 1 x 48 = 3840.
- Kasus 4, $x_A = 0$, $x_B = 2$, $x_C = 0$ dan $x_D = 4$.
  A dan B akan berdekatan sehingga tidak mungkin pasangan suami isteri. Banyaknya cara memilih A dan B adalah 10 x 8. C adalah pasangan A atau B sehingga banyaknya cara memilih C dan D adalah 2 x 1.
  Banyaknya cara menyusun 3 pasang lainnya adalah 3! X 2 x 2 x 2 = 48.
  Banyaknya susunan = 10 x 8 x 2 x 1 x 48 = 7680
- Kasus 5, $x_A = 0$, $x_B = 0$, $x_C = 4$ dan $x_D = 2$.
  A, B dan C akan berdekatan sehingga B bukan pasangan A atau C. Banyaknya cara memilih A ada 10 dan B ada 8. Banyaknya cara memilih C dan D hanya ada 1.
  Banyaknya cara menyusun 3 pasang lainnya adalah 3! X 2 x 2 x 2 = 48.
  Banyaknya susunan = 10 x 8 x 1 x 1 x 48 = 3840

Banyaknya cara menyusun secara keseluruhan = 10 x 8 x 7 x 1 x 48 = 26880.

$\therefore$ Jadi, banyaknya cara menyusun secara keseluruhan = **26880**.

10. $x^3 - x^2 + x - 2 = 0$ akar-akarnya p, q dan r.

$p + q + r = 1$

$pq + pr + qr = 1$

$pqr = 2$

Alternatif 1 :

$(p + q + r)^3 = p^3 + q^3 + {}^3 + 3p^2q + 3p^2r + 3pq^2 + 3pr^2 + 3q^2r + 3qr^2 + 6pqr$

$(p + q + r)^3 = p^3 + q^3 + r^3 + 3(pq + pr + qr)(p + q +) - 3pqr$

$1^3 = p^3 + q^3 + r^3 + 3(1)(1) - 3(2)$

$p^3 + q^3 + r^3 = 4$

Alternatif 2 :

$p^2 + q^2 + r^2 = (p + q + r)^2 - 2(pq + pr + qr) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$

p, q dan r adalah akar-akar persamaan $x^3 - x^2 + x - 2 = 0$ maka

$p^3 - p^2 + p - 2 = 0$

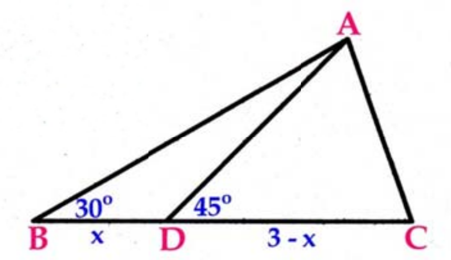
$q^3 - q^2 + q - 2 = 0$

$r^3 - r^2 + r - 2 = 0$
Didapat
$p^3 + q^3 + r^3 - (p^2 + q^2 + r^2) + p + q + r = 6$
$p^3 + q^3 + r^3 + 1 + 1 = 6$
$p^3 + q^3 + r^3 = 4$
$\therefore$ Jadi, $p^3 + q^3 + r^3 =$ **4.**

11. $m^2 + n^5 = 252$ dengan $m, n \in N$
$n^5 \leq 252$ sehingga $n \leq 3$
- Jika n = 1 maka $m^2 = 251$. Tidak ada $m \in N$ yang memenuhi.
- Jika n = 2 maka $m^2 = 220$. Tidak ada $m \in N$ yang memenuhi.
- Jika n = 3 maka $m^2 = 9$. Nilai $m \in N$ yang memenuhi hanya m = 3.

Maka pasangan (m, n) yang memenuhi adalah (3, 3).
$\therefore$ Jadi, m + n = **6**.

12. Misalkan panjang BD = x. Karena $\angle ADC = 45^o$ maka $\angle ADB = 135^o$ sehingga $\angle BAD = 15^o$.



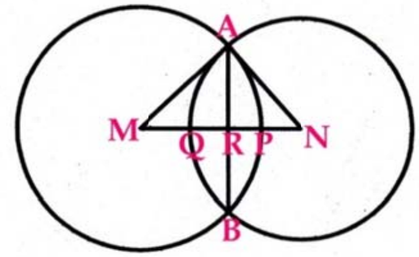
$\frac{AD}{\sin 30^o} = \frac{BD}{\sin 15^o}$
$AD = 2x \cos 15^o$.
Pada ΔACD berlaku
$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \cdot AD \cdot DC \cos 45^o$
$AC^2 = (2x \cos 15^o)^2 + (3 - x)^2 - 2(2x \cos 15^o)(3 - x) \cos 45^o$
Maka nilai AC bergantung dengan x.
$\therefore$ Jadi, belum dapat ditentukan panjang AC.

13. Ada 2 kasus :
- Jika D sebagai pelari pertama
  Banyaknya cara memilih pelari ke-2 ada 4, pelari ke-3 ada 3, pelari ke-4 ada 2 dan pelari ke-5 ada 1.
  Banyaknya cara = 4x3x2x1 = 24
- Jika D bukan sebagai pelari pertama
  Banyaknya cara memilih pelari ke-1 ada 3.
  Banyaknya cara memilih pelari ke-5 ada 3.
  Banyaknya cara memilih pelari ke-2 ada 3 dan pelari ke-3 ada 2 dan pelari ke-4 ada 1.
  Banyaknya cara = 3x3x2x1x3 = 54

Banyaknya cara menyusun pelari = 24 + 54 = 78.
$\therefore$ Jadi, banyaknya cara menyusun pelari = **78**.

14. H = {$2^0 \cdot 3^0$, $2^0 \cdot 3^1$, $2^0 \cdot 3^2$, $2^0 \cdot 3^3$, ⋯, $2^{10} \cdot 3^0$)
3^6 = 729 dan 3^7 = 2187
2^{10} = 1024 dan 2^{11} = 2048.
$x = \frac{2^{10}\cdot 3^6 + 2^{10}\cdot 3^5 + 2^{10}\cdot 3^4 + \cdots + 2^0\cdot 3^6}{2^{10}\cdot 3^6} = \frac{p}{q}$ dengan q = $2^{10} \cdot 3^6$.
p = $3^6 \cdot (2^{10} + 2^9 + \cdots + 1) + 3^5 \cdot (2^{10} + 2^5 + \cdots + 2^1) + 3^4 \cdot (2^{10} + 2^5 + \cdots + 2^3) + 3^3 \cdot (2^{10} + 2^5 + \cdots + 2^4) + 3^2 \cdot (2^{10} + 2^9 + \cdots + 2^6) + 3^1 \cdot (2^{10} + 2^{10} + \cdots + 2^7) + 3^0 \cdot (2^{10} + 2^9)$
p = $3^6 \cdot (2^{11} - 1) + 3^5 \cdot 2^1 \cdot (2^{10} - 1) + 3^4 \cdot 2^3 \cdot (2^8 - 1) + 3^3 \cdot 2^4 \cdot (2^7 - 1) + 3^2 \cdot 2^6 \cdot (2^5 - 1) + 3^1 \cdot 2^7 \cdot (2^4 - 1) + 3^0 \cdot 2^9 \cdot (2^2 - 1)$
p = 1492263 + 497178 + 165240 + 54862 + 17856 + 5760 + 1536 = 2.234.697.
q = $2^{10} \cdot 3^6$ = 746.496
$2 < \frac{p}{q} < 3$
∴ Jadi, $\lfloor x \rfloor = \mathbf{2}$.

15. Misalkan M dan N bertuurt-turut adalah pusat lingkaran Γ_1 dan Γ_2. Misalkan juga MN berpotongan dengan AB di R. Jelas bahwa R adalah pertengahan AB. Jadi, AR = RB = 5.



Jelas bahwa garis melalui kedua pusat lingkaran akan memotong tegak lurus talibusur persekutuan. Jadi, AR ⊥ MR dan AR ⊥ RN.
Karena MA = 13 dan AR = 5 maka MR = 12. Jadi, RP = 1 dan QR = PQ − RP = 3 − 1 = 2.
Misalkan jari-jari Γ_2 = r.
$AN^2 = AR^2 + RN^2$
$r^2 = 5^2 + (r - 2)^2$
4r = 29
∴ Jadi jari-jari lingkaran Γ_2 = $\mathbf{\frac{29}{4}}$.

16. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy^2} = \frac{3}{4}$ dengan x, y ∈ Z
Jelas bahwa x,y ≠ 0.
- Jika x < 0 maka
  $\frac{1}{x} - \frac{1}{xy^2} \leq 0$
  $\frac{1}{y} \geq \frac{3}{4}$
  Nilai y yang memenuhi hanya y = 1
  Tetapi untuk y = 1 maka $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy^2} = 1 \neq \frac{3}{4}$
- Jika x > 0
  - Jika y < 0
    $\frac{3}{4} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy^2} < \frac{1}{x}$
    Nilai x yang memenuhi hanya x = 1.

$\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} = -\frac{1}{4}$
4y − 4 = −y^2
$(y + 2)^2 = 8$
Tidak ada y bulat yang memenuhi.

- Jika y > 0
  - Jika x ≤ y
    $\frac{3}{4} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy^2} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \le \frac{2}{x}$
    x ≤ 2
    Jika x = 1 maka tidak ada y yang memenuhi.
    Jika x = 2 maka $\frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2} = \frac{1}{4}$
    4y − 2 = y^2
    $(y - 2)^2 = 2$
    Tidak ada y bulat yang memenuhi.
  - Jika y ≤ x
    $\frac{3}{4} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy^2} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \le \frac{2}{y}$
    y ≤ 2
    Jika y = 1 maka tidak ada x bulat yang memenuhi.
    Jika y = 2 maka $\frac{1}{4} = \frac{3}{4x}$ yang dipenuhi oleh x = 3.
    Pasangan (x, y) = (3, 2) memenuhi persamaan.

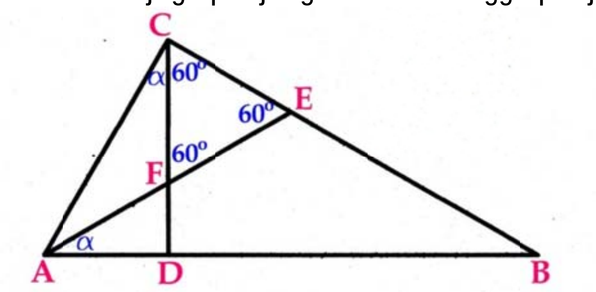
Banyaknya pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi ada 1.
∴ Jadi, banyaknya pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi ada **1**.

17. $xy = \frac{1}{3}$
Berdasarkan ketaksamaan AM-GM maka
$\frac{1}{9x^6} + \frac{1}{4y^6} \ge 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{9x^6}\right)\left(\frac{1}{4y^6}\right)} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{xy}\right)^3 = \frac{1}{3} \cdot 3^3 = 9$
∴ Jadi,nilai minimal dari $\frac{1}{9x^6} + \frac{1}{4y^6}$ adalah **9.**

18. *Lemma* :
Akan dibuktikan dengan induksi matematika bahwa $4^n > 4n^2$ untuk n ∈ N dan n > 2.
Bukti :
Jika n = 3 maka $64 = 4^3 > 4 \cdot (3)^2 = 36$
Andaikan benar untuk n = k maka diangap benar $4^k > 4k^2$
$4^{k+1} = 4 \cdot 4^k > 16k^2 = 4k^2 + (k - 2) \cdot 8k + 16k + 4k^2$
Karena k > 2 maka $4^{k+1} = 4 \cdot 4^k > 16k^2 = 4k^2 + (k - 2) \cdot 8k + 16k + 4k^2 > 4k^2 + 8k + 4 = 4(k + 1)^2$
Maka terbukti bahwa jika $4^k > 4k^2$ maka $4^{k+1} > 4(k + 1)^2$ untuk k > 2.
Jadi, terbukti bahwa $4^n > 4n^2$ untuk n ∈ N dan n > 2
$4^a + 4a^2 + 4 = b^2$.
Karena ruas kiri habis dibagi 4 maka b genap. Misalkan b = 2m maka
$4^{a-1} + a^2 + 1 = m^2$
Jika a ganjil maka ruas kiri dibagi 4 akan bersisa 2 atau 3 yang tidak memenuhi syarat.
Misalkan a = 2n maka
$4^{2n-1} + 4n^2 + 1 = m^2$

Berdasarkan lemma untuk n > 2 maka
$(2^{2n-1})^2 = 4^{2n-1} < 4^{2n-1} + 4n^2 + 1 < 4^{2n-1} + 4^n + 1 = (2^{2n-1})^2 + 2 \cdot 2^{2n-1} + 1 = (2^{2n-1} + 1)^2$
$(2^{2n-1})^2 < 4^{2n-1} + 4n^2 + 1 < (2^{2n-1} + 1)^2$
$(2^{2n-1})^2 < m^2 < (2^{2n-1} + 1)^2$
Jadi, untuk n > 2 maka m^2 terletak di antara 2 bilangan kuadrat berurutan. Maka tidak ada n yang memenuhi.
Jika n = 1 maka $4^{2n-1} + 4n^2 + 1 = 9 = 3^2$.
Jika n = 2 maka $4^{2n-1} + 4n^2 + 1 = 81 = 9^2$.
Maka pasangan bilangan bulat positif (a, b) yang memenuhi adalah (2, 6), (4, 18).
∴ Jadi, banyaknya pasangan bilangan bulat positif (a, b) yang memenuhi ada **2**.

19. Misalkan $\angle BAE = \angle ACD = \alpha$. Misalkan juga panjang AC = x sehingga panjang AB = 2x.



Karena $\angle CFE = 60^o$ maka $\angle AFC = 120^o$.
Karena $\angle AFC = 120^o$ dan $\angle ACF = \alpha$ maka $\angle CAF = 60^o - \alpha$ sehingga $\angle BAC = 60^o$.
Karena $\angle BAC = 60^o$ dan $\angle ACB = 60^o + \alpha$ maka $\angle ABC = 60^o - \alpha$.

Berdasarkan dalil sinus pada ΔABC maka
$\frac{AB}{\sin(60^o+\alpha)} = \frac{AC}{\sin(60^o-\alpha)}$
Karena AB = 2AC maka
$2 \sin (60^o - \alpha) = \sin (60^o + \alpha)$
$2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\alpha - 2 \cdot \frac{1}{2}\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha$
$\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\alpha = \frac{3}{2}\sin\alpha$
$\cot\alpha = \sqrt{3}$
$\alpha = 30^o$
$\angle ABC = 60^o - \alpha = 30^o$.
∴ Jadi, besar $\angle ABC$ = **30°**.

20. Bilangan pangkat 2, pangkat 4, pangkat 6, pangkat 8 dan pangkat 10 semuanya merupakan bilangan pangkat 2. Bilangan pangkat 9 juga merupakan bilangan pangkat 3. Jadi, persoalan setara dengan mencarai banyaknya bilangan pangkat 2 atau pangkat 3 atau pangkat 5 atau pangkat 7. Misalkan A, B, C dan D berturut-turut adalah himpunan semua anggota bilangan bulat positif $n \leq 2012$ yang merupakan pangkat 2, pangkat 3, pangkat 5 dan pangkat 7.
Karena $44^2 = 1936$ dan $45^2 = 2025$ maka banyaknya anggota himpunan A = $|A| = 44$.
Karena $12^3 = 1728$ dan $13^3 = 2197$ maka banyaknya anggota himpunan B = $|B| = 12$.
Karena $4^5 = 1024$ dan $5^5 = 3125$ maka banyaknya anggota himpunan C = $|C| = 4$.
Karena $2^7 = 128$ dan $3^7 = 2187$ maka banyaknya anggota himpunan D = $|D| = 2$.

$A \cap B$ adalah himpunan semua anggota bilangan bulat positif $n \leq 2012$ yang merupakan pangkat 2 dan juga pangkat 3 yang berarti merupakan himpunan pangkat 6.
Karena $3^6 = 729$ dan $4^6 = 4096$ maka banyaknya anggota himpunan $A \cap B = |A \cap B| = 3$.
Dengan cara yang sama didapat
$|A \cap C| = 2$; $|A \cap D| = 1$; $|B \cap C| = 1$; $|B \cap D| = 1$; $|C \cap D| = 1$.
$|A \cap B \cap C| = 1$; $|A \cap B \cap D| = 1$; $|A \cap C \cap D| = 1$; $|B \cap C \cap D| = 1$.
$|A \cap B \cap C \cap D| = 1$
$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D|$.
$|A \cup B \cup C \cup D| = 44 + 12 + 4 + 2 - 3 - 2 - 1 - 1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 + 1 - 1 = 56$
$\therefore$ Jadi, banyaknya bilangan yang memenuhi ada **56**.

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2012
TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2013

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

BAGIAN KEDUA

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN KEDUA

1. a, b, x, y bilangan bulat tak negatif.
   a + b = xy
   x + y = ab
   Jika salah satu di antara a, b, x dan y sama dengan 0, tanpa mengurangi keumuman misalkan saja a = 0 maka x + y = 0 sehingga x = y = 0 dan membuat b = 0.
   Jadi, jika salah satu di antara a, b, x atau y sama dengan 0 maka yang lain akan sama dengan 0.
   Andaikan bahwa tidak ada satupun di antara a, b, x atau y sama dengan 0.
   Karena a dan b simetris maka dapat diandaikan $a \le b$.
   Karena a bilangan bulat lebih dari 0 maka $x + y = ab \ge b$
   $2x + 2y \ge 2b$
   Karena $a \le b$ maka $xy = a + b \le 2b$
   $2x + 2y \ge 2b \ge a + b = xy$
   Jadi, didapat $2x + 2y \ge xy$
   $(x - 2)(y - 2) \le 4$
   Karena x dan y simetris maka tanpa mengurangi keumuman dapat dimisallkan $x \le y$.
   Maka $x \le 4$.
   - Jika x = 1
     a + b = y dan 1 + y = ab
     1 + a + b = ab
     (a − 1)(b − 1) = 2
     Didapat a = 2 dan b = 3 sehingga y = 5
   - Jika x = 2
     a + b = 2y dan 2 + y = ab
     4 + a + b = 2ab
     (2a − 1)(2b − 1) = 9
     Didapat a = 1 dan b = 5 sehingga y = 3 atau a = 2 dan b = 2 sehingga y = 2
   - Jika x = 3
     a + b = 3y dan 3 + y = ab
     9 + a + b = 3ab
     (3a − 1)(3b − 1) = 28
     Didapat a = 1 dan b = 5 sehingga y = 2
   - Jika x = 4
     Maka y = 4
     a + b = 16 dan 8 = ab
     Tidak ada a dan b bulat yang memenuhi.

   ∴ Semua tupel (a,b,x,y) yang memenuhi adalah **(0,0,0,0), (1,5,2,3), (1,5,3,2), (2,2,2,2), (2,3,1,5), (2,3,5,1), (3,2,1,5), (3,2,5,1), (5,1,2,3), (5,1,3,2).**

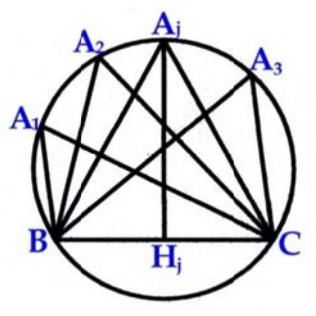
2. $x = 1 + \sqrt{y - z^2}$
   $y = 1 + \sqrt{z - x^2}$
   $z = 1 + \sqrt{x - y^2}$
   Karena akar suatu bilangan tidak mungkin negatif maka x, y, $z \ge 1$.
   Alternatif 1 :
   Karena x, y, $z \ge 1$ maka $x^2 \ge x$; $y^2 \ge y$ dan $z^2 \ge z$

Karena x real maka $y \ge z^2 \ge z \ge x^2 \ge x \ge y^2$
Karena $y \ge y^2$ dan $y^2 \ge y$ maka haruslah $y = y^2$ yang dipenuhi oleh y = 1.
Dengan cara yang sama didapat x = z = 1.
Jadi, tripel bilangan real (x,y,z) yang memenuhi x = y = z = 1.

Alternatif 2 :
Karena x, y, z ≥ 1 maka xyz ≥ 1
Jelas bahwa $y \ge z^2$; $z \ge x^2$ dan $z \ge y^2$.
Kalikan ketiga persamaan di atas didapat
$xyz \ge (xyz)^2$
$xyz \le 1$
Karena xyz ≤ 1 adan xyz ≥ 1 maka haruyslah xyz = 1 yang dipenuhi hanya jika x = y = z = 1.
∴ Jadi, tripel bilangan real (x,y,z) yang memenuhi **x = y = z = 1**.

3. Misalkan kawan-kawan laki-laki tersebut adalah A, B, C, D, E dan F,
$|A\cup B\cup C\cup D\cup E\cup F| = 11 \cdot {}_6C_1 - 6 \cdot {}_6C_2 + 4 \cdot {}_6C_3 - 3 \cdot {}_6C_4 + 3 \cdot {}_6C_5 - 10 \cdot {}_6C_6$
$|S| - 9 = 66 - 90 + 80 - 45 + 18 - 10 = 19$
$|S| = 28$
Maka laki-laki tersebut pergi ke restoran sebanyak 28 kali.
Catatan : Penulis berkeyakinan bahwa maksud soal adalah seperti tersebut di atas. Bertemu dengan tepat tiga di antaranya berarti juga bertemu dengan 2 di antaranya. Persyaratan yang dipenuhi haruslah banyaknya pertemuan dengan semuanya paling banyak harus sama dengan pertemuan dengan lima di antaranya. Ternyata bertemu dengan semuanya sebanyak 10 kali lebih banyak dari bertemu dengan setiap lima di antaranya,yaitu 3 kali.
Jika tidak, maka soal harus diartikan bertemu dengan setiap lima di antaranya tidak berarti juga bertemu dengan empat di antaranya.
$|A\cup B\cup C\cup D\cup E\cup F| = 11 \cdot {}_6C_1 + 6 \cdot {}_6C_2 + 4 \cdot {}_6C_3 + 3 \cdot {}_6C_4 + 3 \cdot {}_6C_5 + 10 \cdot {}_6C_6$
$|S| - 9 = 66 + 90 + 80 + 45 + 18 + 10 = 309$
$|S| = 318$.
∴ Jadi, laki-laki tersebut makan di restoran sebanyak **28 kali**.

4. Andaikan A_i dengan i = 1, 2, 3, ⋯ adalah kumpulan titik-titik sehingga $\angle BA_iC = \alpha$ maka kumpulan titik-titik tersebut akan membentuk suatu lingkaran.



Misalkan H_i pada BC sehingga A_iH_i tegak lurus BC.
Jelas bahwa A_iH_i akan maksimum jika H_i merupakan pertengahan BC.
Misalkan A_iH_i maksimum = y. Saat A_iH_i = y maka AB = AC. Misalkan saja saat ini AB = AC = x.
$y^2 = x^2 - a^2$

$\cos A = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{2x^2-a^2}{2x^2}$

$\sin A = 2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A = \frac{ay}{x^2}$

$AB + AC - BC\cos A - 2y\sin A = \frac{4x^3 - 2ax^2 + a^3 - 4ay^2}{2x^2} = \frac{4x^3 - 2ax^2 + a^3 - 4ax^2 + a^3}{2x^2}$

$AB + AC - BC\cos A - 2y\sin A = \frac{4x(x-a)^2 + 2a(x-a)^2}{2x^2} = \frac{2(x-a)^2(2x+a)}{2x^2}$

Karena bilangan kuadrat tidak mungkin negatif maka

$AB + AC - BC\cos A - 2y\sin A \geq 0$ sehingga

$BC\cos A + 2y\sin A \leq 2x = AB + AC$

Maka didapat $BC\cos\angle BAC + 2AH\sin\angle BAC \leq BC\cos\angle BAC + 2y\sin\angle BAC \leq 2x = AB + AC$

∴ **Jadi, terbukti bahwa $AB + AC \geq BC\cos\angle BAC + 2AH\sin\angle BAC$**

5. *Lemma 1* :

Akan dibuktikan dengan induksi matematika bahwa $3^{2n+1} > (n + 1)^4$ untuk n ∈ N dan n > 1.

Bukti :

- Jika n = 2 maka 443 = $3^{2(2)+1} > (2 + 1)^4 = 81$
- Andaikan bentuk untuk n = k. Maka $3^{2k+1} > (k + 1)^4$ dianggap benar untuk k ∈ N dan k > 1.
- $3^{2(k+1)+1} = 3^2 \cdot 3^{2k+1} > 9(k + 1)^4 = 9k^4 + 36k^3 + 54k^2 + 36k + 9 = k^4 + 36k^3 + 54k^2 + 36k + 8k^2 + 9$

  $3^{2(k+1)+1} = 3^2 \cdot 3^{2k+1} > 9(k + 1)^4 = k^4 + 36k^3 + 54k^2 + 36k + 8k^2 + 9 > k^4 + 8k^3 + 24k^2 + 32k + 16$

  $3^{2(k+1)+1} = 3^2 \cdot 3^{2k+1} > k^4 + 8k^3 + 24k^2 + 32k + 16 = (k + 2)^4$

Jadi, terbukti bahwa $3^{2n+1} > (n + 1)^4$ untuk n ∈ N dan n > 1

Lemma 2 :

Akan dibuktikan dengan induksi matematika bahwa $(n!)^4 < 3^{n^2-1}$ untuk n ∈ N dan n > 1.

Bukti :

- Jika n = 2 maka $16 = (2!)^4 < 3^{2^2-1} = 27$
- Andaikan benar untuk n = k. Maka $(k!)^4 < 3^{k^2-1}$ dianggap benar untuk k ∈ N dan k > 1.
- Sesuai lemma 1 maka

  $\left((k+1)!\right)^4 = (k+1)^4(k!)^4 < 3^{2k+1} \cdot 3^{k^2-1} = 3^{(k+1)^2-1}$

Jadi, terbukti bahwa $(n!)^4 < 3^{n^2-1}$ untuk n ∈ N dan n > 1

- Jika i = 1

  P_i = 2 dan untuk n = 2 maka $P_i^{(n^2)} = P_{i-1} \cdot (n!)^4$

  Jadi, untuk i = 1 sehingga P_i = 2 tidak termasuk bilangan prima sederhana.
- Jika i > 1

  $P_i \geq 3$

  - Jika n = 1

    $P_i^{(n^2)} = P_i > P_{i-1} = P_{i-1} \cdot (n!)^4$

    Jadi, untuk n = 1 maka $P_i^{(n^2)} > P_{i-1} \cdot (n!)^4$
  - Jika n > 1

    Sesuai *lemma 2* dan mengingat bahwa $P_i > P_{i-1}$ didapat

    $(n!)^4 < 3^{n^2-1} \leq P_i^{(n^2-1)} < \frac{P_i}{P_{i-1}} P_i^{(n^2-1)}$

    $P_{i-1}(n!)^4 < P_i^{(n^2)}$

  Terbukti bahwa $P_i^{(n^2)} > P_{i-1} \cdot (n!)^4$ untuk i > 1 dan n ∈ N.

∴ Jadi, semua bilangan prima sederhana adalah **P_i dengan i ∈ N dan i ≠ 1**.