



**SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2010
TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2011**

Waktu : 210 Menit



**KEMENTERIAN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2010**

**SELEKSI TINGKAT PROVINSI
CALON PESERTA OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2010
MATEMATIKA SMA/MA**

Petunjuk untuk peserta :

1. Tes terdiri dari dua bagian. Tes bagian pertama terdiri dari 20 soal isian singkat dan tes bagian kedua terdiri dari 5 soal uraian.
2. Waktu yang disediakan untuk menyelesaikan semua soal adalah 210 menit.
3. Tuliskan nama, kelas dan asal sekolah Anda di sebelah kanan atas pada setiap halaman.
4. Untuk soal bagian pertama :
 - (a) Masing-masing soal bagian pertama bernilai 1 (satu) angka.
 - (b) Beberapa pertanyaan dapat memiliki lebih dari satu jawaban yang benar. Anda diminta memberikan jawaban yang paling tepat atau persis untuk pertanyaan seperti ini. Nilai hanya akan diberikan kepada pemberi jawaban paling tepat atau paling persis.
 - (c) Tuliskan hanya jawaban dari soal yang diberikan. Tuliskan jawaban tersebut pada kotak di sebelah kanan setiap soal.
5. Untuk soal bagian kedua :
 - (a) Masing-masing soal bagian kedua bernilai 7 (tujuh) angka
 - (b) Anda diminta menyelesaikan soal yang diberikan secara lengkap. Selain jawaban akhir, Anda diminta menuliskan semua langkah dan argumentasi yang Anda gunakan untuk sampai kepada jawaban akhir tersebut.
 - (c) Jika halaman muka tidak cukup, gunakan halaman sebaliknya.
6. Jawaban hendaknya Anda tuliskan dengan menggunakan tinta, bukan pensil.
7. Selama tes, Anda tidak diperkenankan menggunakan buku, catatan dan alat bantu hitung. Anda juga tidak diperkenankan bekerja sama.
8. Mulailah bekerja hanya setelah pengawas memberi tanda dan berhentilah bekerja segera setelah pengawas memberi tanda.
9. Selamat bekerja.

**SELEKSI TINGKAT PROVINSI
CALON PESERTA OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2010
MATEMATIKA SMA/MA**

BAGIAN PERTAMA

1. Nilai

$$\sum_{j=0}^n \left(\binom{n}{j} \left(\sum_{i=0}^j \binom{j}{i} 8^i \right) \right) = \dots\dots\dots$$

2. Pada segitiga ABC dimisalkan a, b, dan c berturut-turut merupakan panjang sisi BC, CA, dan AB. Jika

$$\frac{2a}{\tan A} = \frac{b}{\tan B}$$

Maka nilai $\frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A + \cos^2 B}$ adalah

3. Diberikan polinomial $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ dengan a, b, c, dan d konstanta. Jika $P(1) = 10$, $P(2) = 20$, dan $P(3) = 30$, maka nilai

$$\frac{P(12) + P(-8)}{10} = \dots\dots\dots$$

4. Misalkan $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Banyaknya fungsi $f : S \rightarrow S$ yang memenuhi $f(f(x)) = x$ untuk setiap $x \in S$ adalah

5. Jika a, b, dan c menyatakan panjang sisi-sisi suatu segitiga yang memenuhi $(a + b + c)(a + b - c) = 3ab$, maka besar sudut yang menghadapi sisi dengan panjang c adalah

6. Bilangan enam digit \overline{abcdef} dengan $a > b > c \geq d > e > f$ ada sebanyak

7. Bilangan prima p sehingga $p^2 + 73$ merupakan bilangan kubik sebanyak

8. Diberikan segitiga ABC siku-siku di C, $AC = 3$, dan $BC = 4$. Segitiga ABD siku-siku di A, $AD = 12$ dan titik-titik C dan D letaknya berlawanan terhadap sisi AB. Garis sejajar AC melalui D memotong perpanjangan CB di E. Jika

$$\frac{DE}{DB} = \frac{m}{n}$$

dengan m dan n bilangan bulat positif yang relatif prima, maka $m + n = \dots\dots\dots$

9. Pada suatu lingkaran terdapat 12 titik yang berbeda. Dengan menggunakan 12 titik tersebut akan dibuat 6 tali busur yang tidak berpotongan. Banyaknya cara ada sebanyak

10. Banyaknya anggota himpunan

$$S = \{\gcd(n^3 + 1, n^2 + 3n + 9) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

adalah

11. Persamaan kuadrat $x^2 - px - 2p = 0$ mempunyai dua akar real α dan β . Jika $\alpha^3 + \beta^3 = 16$, maka hasil tambah semua nilai p yang memenuhi adalah

12. Pada suatu bidang terdapat n titik yang berkoordinat pasangan bilangan bulat. Nilai n terkecil agar terdapat dua titik yang titik tengahnya juga berkoordinat pasangan bilangan bulat adalah ...

13. Untuk sebarang bilangan real x didefinisikan $\lfloor x \rfloor$ sebagai bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan dengan x . Bilangan asli n sehingga persamaan $x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor + \frac{1}{x} \lfloor x \rfloor = \frac{n}{n+1}$ mempunyai tepat 2010 solusi real positif adalah

14. Dua lingkaran (tidak sama besar) bersinggungan di luar. Titik A dan A_1 terletak pada lingkaran kecil; sedangkan B dan B_1 pada lingkaran besar. Garis PAB dan PA_1B_1 , merupakan garis singgung persekutuan dari kedua lingkaran tersebut. Jika $PA = AB = 4$, maka luas lingkaran kecil adalah ...

15. Dua puluh tujuh siswa pada suatu kelas akan dibuat menjadi enam kelompok diskusi yang masing-masing terdiri dari empat atau lima siswa. Banyaknya cara adalah

16. Seseorang menulis surat berantai kepada 6 orang. Penerima surat ini diperintahkan untuk mengirim surat kepada 6 orang lainnya. Semua penerima surat membaca isi surat lalu beberapa orang melaksanakan perintah yang tertulis dalam surat, sisanya tidak melanjutkan surat berantai ini. Jika terdapat 366 orang yang tidak melanjutkan surat berantai ini, maka banyaknya orang yang berada dalam sistem surat berantai ini adalah

17. Jumlah suku konstan dari $(x^5 - \frac{2}{x^3})^8$ adalah

18. Banyak bilangan bulat positif $n < 100$, sehingga persamaan

$$\frac{3xy - 1}{x + y} = n$$

mempunyai solusi pasangan bilangan bulat (x, y) adalah

19. Diketahui x, y , dan z adalah bilangan-bilangan real yang memenuhi sistem persamaan

$$x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

$$xyz = 1$$

Nilai terkecil $|x + y + z|$ adalah

20. Segitiga ABC memiliki panjang sisi $BC = 5$, $AC = 12$, dan $AB = 13$. Titik D pada AB dan titik E pada AC . Jika DE membagi segitiga ABC menjadi dua bagian dengan luas yang sama, maka panjang minimum D adalah

**SELEKSI TINGKAT PROVINSI
CALON PESERTA OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2010
MATEMATIKA SMA/MA**

BAGIAN KEDUA

1. Diberikan segitiga ABC. Andaikan P dan P₁ titik-titik pada BC, Q pada CA, dan R pada AB, sedemikian rupa sehingga

$$\frac{AR}{RB} = \frac{BP}{PC} = \frac{CQ}{QA} = \frac{CP_1}{P_1B}$$

Misalkan G titik berat segitiga ABC dan K = AP₁ ∩ RQ. Buktikan, bahwa titik-titik P, G, dan K kolinier (terletak pada satu garis)

2. Diketahui k adalah bilangan bulat positif terbesar, sehingga dapat ditemukan bilangan bulat positif n, bilangan prima (tidak harus berbeda) q₁, q₂, q₃, ..., q_k, dan bilangan prima berbeda p₁, p₂, p₃, ..., p_k yang memenuhi

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} = \frac{7 + nq_1q_2 \dots q_k}{2010}$$

Tentukan banyaknya n yang memenuhi.

3. Tentukan nilai k dan d sehingga tidak ada pasangan bilang real (x, y), yang memenuhi sistem persamaan

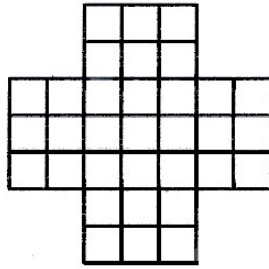
$$\begin{aligned}x^3 + y^3 &= 2 \\ y &= kx + d\end{aligned}$$

4. Diketahui n adalah bilangan asli kelipatan 2010. Tunjukkan, bahwa persamaan

$$x + 2y + 3z = 2n$$

mempunyai tepat $1 + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{12}$ pasangan solusi (x, y, z) dengan x, y, dan z merupakan bilangan bulat tak negatif.

5. Diketahui suatu papan catur seperti pada gambar. Dapatkah suatu biji catur kuda berangkat dari suatu petak melewati setiap petak yang lain hanya satu kali dan kembali ke tempat semula ?
Jelaskan jawab anda !



Penjelasan : Langkah catur kuda berbentuk L, yaitu dari kotak asal :

- (a) 2(dua) kotak ke kanan/kiri dan 1(satu) kotak ke depan/belakang; atau
- (b) 2(dua) kotak ke depan/belakang dan 1 (satu) kotak ke kanan/kiri.

**SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2010
TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2011**

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

BAGIAN PERTAMA



Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN PERTAMA

$$1. (x+1)^n = \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}x^i. \text{ Maka}$$

$$\sum_{i=0}^j \binom{j}{i}8^i = (8+1)^j = 9^j$$

$$\sum_{j=0}^n \left(\binom{n}{j} \left(\sum_{i=0}^j \binom{j}{i}8^i \right) \right) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}9^j = (9+1)^n = 10^n$$

$$\sum_{j=0}^n \left(\binom{n}{j} \left(\sum_{i=0}^j \binom{j}{i}8^i \right) \right) = 10^n$$

$$\therefore \text{ Jadi, } \sum_{j=0}^n \left(\binom{n}{j} \left(\sum_{i=0}^j \binom{j}{i}8^i \right) \right) = 10^n.$$

$$2. \frac{2a}{\tan A} = \frac{b}{\tan B} \dots\dots\dots (1)$$

Dalil sinus

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \dots\dots\dots (2)$$

Bandingkan persamaan (1) dengan (2) didapat

$$2 \cos A = \cos B$$

$$4 \cos^2 A = \cos^2 B \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A + \cos^2 B} = \frac{1 - \cos^2 A - 1 + \cos^2 B}{\cos^2 A + \cos^2 B} = \frac{4 \cos^2 A - \cos^2 A}{\cos^2 A + 4 \cos^2 A}$$

$$\frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A + \cos^2 B} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \text{ Nilai } \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A + \cos^2 B} \text{ adalah } \frac{3}{5}.$$

$$3. P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$P(1) = 10, P(2) = 20, P(3) = 30$$

$$\text{Misalkan } Q(x) = P(x) - 10x$$

$$\text{Karena } P(1) = 10, P(2) = 20, P(3) = 30 \text{ maka } Q(1) = Q(2) = Q(3) = 0$$

$Q(x) = P(x) - 10x = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 10x + d$ yang juga merupakan polinomial dengan derajat 4 serta 1, 2, dan 3 merupakan akar-akar $Q(x) = 0$

$$\text{Jadi, } Q(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-k)$$

$$P(x) = Q(x) + 10x$$

$$P(12) = (12-1)(12-2)(12-3)(12-k) + 120 = 990(12-k) + 120$$

$$P(-8) = (-8-1)(-8-2)(-8-3)(-8-k) - 80 = 990(8+k) - 80$$

$$P(12) + P(-8) = (990(12-k) + 120) + (990(8+k) - 80) = 990 \cdot 20 + 40$$

$$\frac{P(12)+P(-8)}{10} = 99 \cdot 20 + 4 = 1984$$

$$\therefore \frac{P(12)+P(-8)}{10} = 1984.$$

4. Jika x dipetakan ke $f(x)$ lalu hasilnya dipetakan oleh $f(x)$ kembali ke x maka fungsi tersebut yang memenuhi adalah $f(x) = x$, $f(x) = k - x$, $f(x) = \frac{1}{x}$ dan $f(x) = -\frac{1}{x}$.

Karena $f : S \rightarrow S$ maka fungsi yang memenuhi hanya $f(x) = x$ dan $f(x) = 6 - x$

\therefore Banyaknya fungsi yang memenuhi ada 2.

5. $(a + b + c)(a + b - c) = 3ab$

$$(a + b)^2 - c^2 = 3ab$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = ab$$

$$2ab \cos C = ab$$

$$\cos C = \frac{1}{2}$$

$$C = 60^\circ$$

\therefore Besar sudut yang menghadap sisi dengan panjang c adalah 60° .

6. Karena $a > b > c \geq d > e > f$ maka ada 2 kasus

- Jika $a > b > c > d > e > f$

Banyaknya bilangan yang memenuhi sama dengan banyaknya cara memilih 6 angka dari 10 angka berbeda, yaitu ${}_{10}C_6 = 210$

- Jika $a > b > c = d > e > f$

Banyaknya bilangan yang memenuhi sama dengan banyaknya cara memilih 5 angka dari 10 angka berbeda, yaitu ${}_{10}C_5 = 252$

Maka banyaknya bilangan $abcdef$ yang memenuhi $a > b > c \geq d > e > f = 210 + 252 = 462$.

\therefore Banyaknya bilangan enam angka yang memenuhi tersebut sama dengan 462.

7. Misalkan $p^2 + 7^3 = k^3$ dengan k suatu bilangan asli.

$$p^2 = (k - 7)(k^2 + 7k + 49)$$

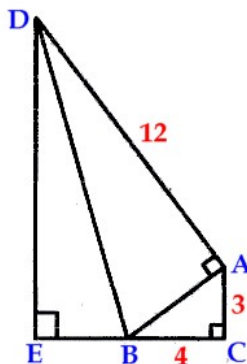
Karena p bilangan prima dan jelas bahwa $k - 7 < k^2 + 7k + 49$ maka kesamaan tersebut hanya terjadi jika $k - 7 = 1$ dan $k^2 + 7k + 49 = p^2$ sehingga didapat $k = 8$

$$k^2 + 7k + 49 = 8^2 + 7(8) + 49 = 169 = p^2 \text{ sehingga } p = 13$$

Jadi, nilai p bilangan asli yang memenuhi adalah $p = 13$

\therefore Maka banyaknya bilangan prima p yang memenuhi ada 1.

8. Jelas bahwa $AB = 5$ sehingga $BD = 13$. Karena DE sejajar AC maka DE juga tegak lurus CE .



$$\frac{DE}{DB} = \sin \angle DBD = \sin (180^\circ - (\angle DBA + \angle ABC)) = \sin (\angle DBA + \angle ABC)$$

$$\frac{DE}{DB} = \sin \angle DBA \cos \angle ABC + \cos \angle DBA \sin \angle ABC$$

$$\frac{DE}{DB} = \frac{12}{13} \cdot \frac{4}{5} + \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5} = \frac{63}{65} = \frac{m}{n}$$

Maka $m = 63$ dan $n = 65$

\therefore Jadi, $m + n = 128$.

9. Jika dua titik pada lingkaran dihubungkan maka lingkaran akan terbagi menjadi dua daerah. Misalkan sebelah kanan dan kiri. Agar tidak ada tali busur yang memotong tali busur tersebut maka banyaknya titik pada lingkaran di sebelah kiri dan kanan tali busur tersebut haruslah genap.

Jika terdapat 2 titik maka banyaknya talibusur yang memenuhi ada 1.

- Jika jumlah titik ada 2 pasang
Perhatikan salah satu titik. Banyaknya cara menghubungkan dengan titik-titik lain ada 2 kasus, yaitu sebelah kiri ada 0 pasang dan sebelah kanan ada 1 pasang atau sebaliknya. Banyaknya cara ada $1 + 1 = 2$
 - Jika jumlah titik ada 3 pasang
Perhatikan salah satu titik. Banyaknya cara menghubungkan dengan titik-titik lain ada 3 kasus, yaitu sebelah kiri ada 0 pasang dan sebelah kanan ada 2 pasang, sebelah kiri ada 1 pasang sebelah kanan ada 1 pasang atau sebelah kiri ada 2 pasang dan sebelah kanan ada 0 pasang. Banyaknya cara = $1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$ cara.
 - Jika jumlah titik ada 4 pasang
Perhatikan salah satu titik. Banyaknya cara menghubungkan dengan titik-titik lain ada 4 kasus, yaitu sebelah kiri ada 0 pasang dan sebelah kanan ada 3 pasang, sebelah kiri ada 1 pasang sebelah kanan ada 2 pasang, sebelah kiri ada 2 pasang sebelah kanan ada 1 pasang atau sebelah kiri ada 3 pasang dan sebelah kanan ada 0 pasang.
Banyaknya cara = $1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 14$ cara.
 - Jika jumlah titik ada 5 pasang
Dengan cara yang sama banyaknya cara = $1 \cdot 14 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 14 \cdot 1 = 42$ cara.
 - Jika jumlah titik ada 6 pasang
Banyaknya cara = $1 \cdot 42 + 1 \cdot 14 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 2 + 14 \cdot 1 + 42 \cdot 1 = 132$ cara.
- \therefore Banyaknya cara ada sebanyak 132.

10. $S = \{FPB(n^3 + 1, n^2 + 3n + 9) \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Misalkan $d = FPB(n^3 + 1, n^2 + 3n + 9)$.

Karena $n^3 + 1$ dan $n^2 + 3n + 9$ tidak mungkin keduanya genap untuk n bilangan bulat maka d tidak mungkin genap.

Maka $d \mid (n^3 + 1)$ dan $d \mid (n^2 + 3n + 9)$

$$d \mid (n(n^2 + 3n + 9) - (n^3 + 1)) = 3n^2 + 9n - 1$$

Karena $d \mid (n^2 + 3n + 9)$ dan $d \mid (3n^2 + 9n - 1)$ maka $d \mid (3(n^2 + 3n + 9) - (3n^2 + 9n - 1)) = 28$

Karena $d \mid 28$ dan d tidak mungkin genap maka nilai d yang mungkin adalah 1 atau 7.

Jika $n = 1$ maka $FPB(n^3 + 1, n^2 + 3n + 9) = FPB(2, 13) = 1$

Jika $n = 5$ maka $FPB(n^3 + 1, n^2 + 3n + 9) = FPB(126, 49) = 7$

Jadi, $FPB(n^3 + 1, n^2 + 3n + 9) = 1$ atau 7 untuk semua nilai n bilangan bulat.

\therefore Banyaknya anggota dari himpunan S yang memenuhi adalah 2.

11. $x^2 - px - 2p = 0$ akar-akarnya α dan β

$$\alpha^3 + \beta^3 = 16$$

$$(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 16$$

$$p^3 - 3(2p)(p) = 16$$

$$p^3 - 6p^2 - 16 = 0$$

Maka jumlah semua nilai p yang memenuhi sama dengan 6.

\therefore Jumlah semua nilai p yang memenuhi sama dengan 6.

12. Misal koordinat titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ dengan titik tengah A dan B adalah X_{12} .

Maka koordinat X_{12} adalah $(\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2))$.

Jika X_{12} memiliki koordinat bilangan bulat maka haruslah $x_1 + x_2$ dan $y_1 + y_2$ genap.

Syarat itu terjadi haruslah x_1 dan x_2 memiliki paritas yang sama dan y_1 dan y_2 juga memiliki paritas yang sama.

Kemungkinan jenis koordinat (dalam bahasa lain disebut paritas) suatu titik letis pada bidang hanya ada 4 kemungkinan yaitu (genap, genap), (genap, ganjil), (ganjil, ganjil) dan (ganjil, genap).

Agar dapat dipastikan bahwa ada anggota X yang memiliki koordinat bilangan bulat maka sesuai *Pigeon Hole Principle* (PHP) maka haruslah terdapat sekurang-kurangnya 5 buah titik letis.

\therefore Nilai n terkecil yang memenuhi adalah 5.

$$13. x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + \frac{1}{x} \lfloor x \rfloor = \frac{n}{n+1}$$

Jika x bulat maka ruas kiri ≥ 1 sedangkan ruas kanan < 1 . Maka tidak mungkin x bulat.

- Jika $0 < x < 1$

$$\lfloor x \rfloor = 0 \text{ sehingga}$$

$$x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \frac{n}{n+1} \dots\dots\dots (1)$$

Karena $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$, n dan $n + 1$ bulat maka x merupakan bilangan rasional.

Misalkan $x = \frac{a}{ka+b}$ yang merupakan pecahan paling sederhana dengan a , b dan k bilangan asli dan $b < a$ serta $a \neq 1$ sebab akan menyebabkan $\frac{1}{x}$ bulat yang menyebabkan ruas kiri persamaan (1) sama dengan 1.

$$\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = k$$

$$\text{Jadi, } \frac{ka}{ka+b} = \frac{n}{n+1}$$

Akan didapat $k = ub$ dan $n = ua$ sehingga $a \mid n$ dengan $a \neq 1$.

Misalkan n adalah bilangan asli dengan r buah faktor positif maka banyaknya nilai a yang memenuhi ada $r - 1$ yang menyebabkan ada sebanyak $r - 1$ nilai x yang memenuhi.

- Jika $x > 1$

$$\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0 \text{ sehingga}$$

$$\frac{1}{x} \lfloor x \rfloor = \frac{n}{n+1}$$

Karena $\lfloor x \rfloor$, n dan $n + 1$ bulat maka x merupakan bilangan rasional.

Misalkan $x = \frac{mp+q}{p}$ yang merupakan pecahan paling sederhana dengan p , q dan m bilangan asli dan $q < p$ serta $p \neq 1$ sebab akan menyebabkan x bulat.

$$\lfloor x \rfloor = m$$

Jadi, $\frac{mp}{mp+q} = \frac{n}{n+1}$

Akan didapat $m = vq$ dan $n = vp$ sehingga $p \mid n$ dengan $p \neq 1$.

Misalkan n adalah bilangan asli dengan r buah faktor positif maka banyaknya nilai p yang memenuhi ada $r - 1$ yang menyebabkan ada sebanyak $r - 1$ nilai x yang memenuhi.

Agar didapat ada sebanyak 2010 bilangan real positif x yang memenuhi maka banyaknya faktor positif dari n adalah $r = 1006$.

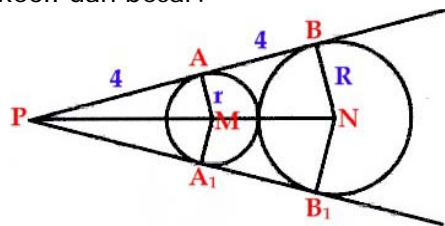
Ada tak terhingga banyaknya bilangan asli yang memiliki faktor positif sebanyak 1006.

$1006 = 1006 \cdot 1 = 2 \cdot 503$

$n = 3 \cdot 2^{502}$ adalah nilai n terkecil yang memenuhi,

\therefore Maka ada tak terhingga banyaknya nilai n yang memenuhi dengan nilai n minimal $= 3 \cdot 2^{502}$.

14. Misalkan jari-jari lingkaran = r dan jari-jari lingkaran besar = R . Titik M dan N berturut turut menyatakan pusat lingkaran kecil dan besar.



Berdasarkan kesebangunan segitiga didapat

$\frac{r}{4} = \frac{R}{8}$ sehingga $R = 2r$ (1)

$MN^2 = 4^2 + (NB - MA)^2$

$(R + r)^2 = 4^2 + (R - r)^2$

$4Rr = 16$

$2r^2 = 4$

$\pi r^2 = 2\pi$

\therefore Luas lingkaran kecil = 2π .

15. Misalkan kelompok 1 - 3 terdiri dari 5 orang dan kelompok 4 - 6 terdiri dari 4 orang.

Banyaknya cara memilih dari 27 orang untuk masuk ke kelompok 1 = ${}_{27}C_5$.

Banyaknya cara memilih dari 22 orang untuk masuk ke kelompok 2 = ${}_{22}C_5$.

Banyaknya cara memilih dari 17 orang untuk masuk ke kelompok 3 = ${}_{17}C_5$.

Banyaknya cara memilih dari 12 orang untuk masuk ke kelompok 4 = ${}_{12}C_4$.

Banyaknya cara memilih dari 8 orang untuk masuk ke kelompok 5 = ${}_{8}C_4$.

Banyaknya cara memilih dari 4 orang untuk masuk ke kelompok 6 = ${}_{4}C_4$.

Jadi, banyaknya cara memilih 27 orang untuk masuk ke kelompok 1-6 = ${}_{27}C_5 \cdot {}_{22}C_5 \cdot {}_{17}C_5 \cdot {}_{12}C_4 \cdot {}_{8}C_4 \cdot {}_{4}C_4$.

Tetapi perhitungan di atas memperhitungkan hal sebagai berikut : misalkan x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 masuk ke kelompok 1; $x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}$ masuk ke kelompok 2 dan 17 orang lain terbagi dalam kelompok lain. Kasus ini dianggap berbeda jika x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 masuk ke kelompok 2; $x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}$ masuk ke kelompok 1 dan 17 orang lain terbagi dalam kelompok lain yang sama dengan kasus 1. Padahal kedua kasus tersebut sebenarnya adalah sama. Maka ada perhitungan ganda dari perhitungan sebelumnya. Jadi, perhitungannya harus dibagi dengan $3! \cdot 3!$.

Jadi, banyaknya cara memilih 27 orang untuk dibagi dalam kelompok-kelompok yang terdiri dari

4 atau 5 orang adalah $\frac{{}_{27}C_5 \cdot {}_{22}C_5 \cdot {}_{17}C_5 \cdot {}_{12}C_4 \cdot {}_{8}C_4 \cdot {}_{4}C_4}{3! \cdot 3!} = \frac{27!}{(3!)^2 \cdot (4!)^3 \cdot (5!)^3}$.

\therefore Banyaknya cara adalah $\frac{27!}{(3!)^2 \cdot (4!)^3 \cdot (5!)^3}$.

16. Misalkan dari 6 penerima surat pertama sebanyak $(6 - k_1)$ meneruskan surat tersebut.
 Dari $(6^2 - 6k_1)$ penerima surat ke-2 sebanyak $(6^2 - 6k_1 - k_2)$ meneruskan surat tersebut.
 Dari $(6^3 - 6^2k_1 - 6k_2)$ penerima surat ke-3 sebanyak $(6^3 - 6^2k_1 - 6k_2 - k_3)$ meneruskan surat.
 dan seterusnya hingga
 Dari $(6^n - 6^{n-1}k_1 - \dots - 6k_{n-1})$ penerima surat ke-n semuanya **tidak** meneruskan surat tersebut.
 $k_1 + k_2 + k_3 + \dots + (6^n - 6^{n-1}k_1 - \dots - 6k_{n-1}) = 366$
 $6^n - (6^{n-1} - 1)k_1 - (6^{n-2} - 1)k_2 - \dots - (6 - 1)k_{n-1} = 366 \dots \dots \dots (1)$
 Misalkan jumlah orang yang berada dalam sistem sama dengan p.
 $p = 1 + 6 + (6^2 - 6k_1) + (6^3 - 6^2k_1 - 6k_2) + \dots + (6^n - 6^{n-1}k_1 - \dots - 6k_{n-1})$
 $p = (1 + 6 + 6^2 + \dots + 6^n) - (6 + 6^2 + \dots + 6^{n-1})k_1 - (6 + 6^2 + \dots + 6^{n-2})k_2 - \dots - (6^2 + 6)k_{n-2} - 6k_{n-1}$
 $p = 1 + \frac{6(6^n - 1)}{6-1} - \frac{6(6^{n-1} - 1)}{6-1} k_1 - \frac{6(6^{n-2} - 1)}{6-1} k_2 - \dots - \frac{6(6^2 - 1)}{6-1} k_{n-2} - \frac{6(6-1)}{6-1} k_{n-1}$
 $p = 1 + \frac{6}{5} (6^n - 1 - (6^{n-1} - 1)k_1 - (6^{n-2} - 1)k_2 - \dots - (6 - 1)k_{n-1})$
 Substitusikan persamaan (1) didapat
 $p = 1 + \frac{6}{5} (366 - 1)$
 $p = 439$
 \therefore Banyaknya orang yang berada dalam sistem surat berantai tersebut sama dengan **439**.

17. $(x^5 - \frac{2}{x^3})^8$
 $(x^5 - \frac{2}{x^3})^8 = {}_8C_0 (x^5)^8 (-\frac{2}{x^3})^0 + \dots + {}_8C_r (x^5)^r (-\frac{2}{x^3})^{8-r} + \dots$
 Agar didapat konstanta maka $5r - 3(8 - r) = 0$
 $r = 3$
 Nilai konstanta tersebut adalah ${}_8C_3 (x^5)^3 (-\frac{2}{x^3})^5 = 56 \cdot (-2)^5 = -1792$
 Jadi, nilai konstanta tersebut sama dengan -1792
 Jika yang ditanyakan adalah jumlah koefisien maka jumlah koefisien akan didapat jika $x = 1$.
 Jumlah koefisien = $(1 - 2)^8 = 1$.
 \therefore Konstanta tersebut sama dengan -1792 dan jumlah koefisien sama dengan 1 .

18. $\frac{3xy-1}{x+y} = n$ ekuivalen dengan
 $(3x - n)(3y - n) = n^2 + 3$
- Jika $n = 3k$ untuk k bilangan bulat
 $3x - n$ dan $3y - n$ keduanya habis dibagi 3 sehingga ruas kiri habis dibagi 9 sedangkan ruas kanan dibagi 9 bersisa 3. Jadi, tidak ada nilai $n = 3k$ yang memenuhi.
 - Jika $n = 3k + 2$ untuk k bilangan bulat
 $n^2 + 3 = (3k + 2)^2 + 3 = 3(3k^2 + 4k + 2) + 1$
 Maka 1 dan $3(3k^2 + 4k + 2) + 1$ merupakan faktor dari $n^2 + 3$
 Jika $3x - n = 1$ dan $3y - n = 3(3k^2 + 4k + 2) + 1$ dengan $n = 3k + 2$ maka akan didapat pasangan bilat bulat (x, y) yang memenuhi.
 Jadi, untuk setiap $n = 3k + 2$ akan didapat pasangan (x, y) yang memenuhi.
 - Jika $n = 3k + 1$ untuk k bilangan bulat
 $n^2 + 3 = (3k + 1)^2 + 3 = 3(3k^2 + 2k + 1) + 1$
 Maka -1 dan $-3(3k^2 + 2k + 1) - 1$ merupakan faktor dari $n^2 + 3$.

Jika $3x - n = -1$ dan $3y - n = -3(3k^2 + 2k + 1) - 1$ untuk $n \equiv 1 \pmod{3}$

Karena $-1 \equiv -3(3k^2 + 2k + 1) - 1 \equiv 2 \pmod{3}$ maka akan didapat pasangan bulat (x, y) yang memenuhi.

Jadi, untuk setiap $n = 3k + 2$ akan didapat pasangan (x, y) yang memenuhi.

Maka hanya bentuk $n \equiv 0 \pmod{3}$ saja yang membuat tidak ada pasangan (x, y) bulat yang memenuhi.

\therefore Maka banyaknya bilangan bulat positif $n < 100$ yang memenuhi ada sebanyak 66.

$$19. x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

$$xyz = 1$$

Mengingat $xyz = 1$ maka $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = xy + xz + yz$

$$\text{Jadi, } x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = xy + xz + yz$$

$$(x + y + z)^2 = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + 2\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz}\right)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + 2(x + y + z)$$

Karena $x + y + z = xy + xz + yz$ maka

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$$

Karena x^2 , y^2 dan z^2 tidak mungkin negatif maka sesuai ketaksamaan AM-HM maka

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}}$$

$$(x^2 + y^2 + z^2)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) \geq 9$$

Karena $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$ dan $x^2 + y^2 + z^2 \geq 0$ maka

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$$

$$(x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) - 3 \geq 0$$

$$(x + y + z)^2 - 2(x + y + z) - 3 \geq 0$$

$$(x + y + z + 1)(x + y + z - 3) \geq 0$$

$$x + y + z \geq 3 \text{ atau } x + y + z \leq -1$$

$$|x + y + z| \geq 3 \text{ atau } |x + y + z| \geq 1$$

Jika nilai $|x + y + z| = 1$ maka $x + y + z = -1$

Karena $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = xy + xz + yz$ maka $xy + xz + yz = -1$ dan karena $xyz = 1$ maka x, y

dan z merupakan akar-akar persamaan $p^3 + p^2 - p - 1 = 0$

$$(p - 1)(p + 1)^2 = 0$$

Maka $(x, y, z) = (1, -1, -1)$ dan permutasinya yang memenuhi kesamaan awal pada soal.

\therefore Nilai minimal $|x + y + z| = 1$.

20. Mungkin maksud soal tersebut adalah panjang DE minimum.

Misalkan panjang AD = x dan panjang AE = y

$$\text{Luas } \triangle ABC = \frac{1}{2} (5)(12) = 30 \text{ dan } \sin A = \frac{5}{13} \text{ serta } \cos A = \frac{12}{13}$$

$$\text{Luas } \triangle ADE = \frac{1}{2} xy \sin A = 15. \text{ Maka } xy = 78.$$

Sesuai dalil cosinus pada $\triangle ADE$ maka :

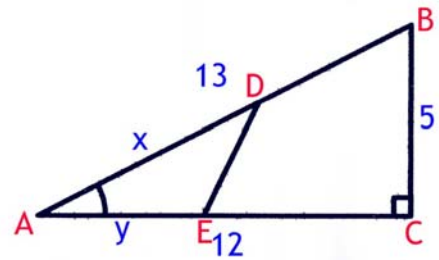
$$DE^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos A = x^2 + y^2 - 144$$

$$DE^2 = (x - y)^2 + 2xy - 144$$

$$DE^2 = (x - y)^2 + 12$$

DE^2 akan minimum sama dengan 12 jika $x = y = \sqrt{78}$

$$\therefore DE_{\text{minimum}} = 2\sqrt{3}$$



SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2010
TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2011

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

BAGIAN KEDUA

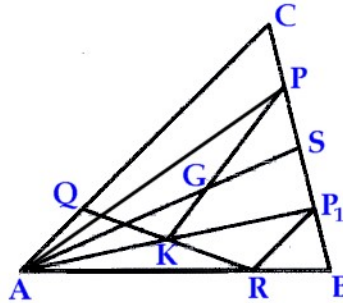


Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan $\frac{AR}{RB} = \frac{BP}{PC} = \frac{CQ}{QA} = \frac{CP_1}{P_1B} = k$

Alternatif 1 :



Akan didapat $\frac{BP_1}{BC} = \frac{BR}{BA} = \frac{1}{k+1}$

Karena $\angle P_1BR = \angle CBA$ maka $\triangle ABC$ sebangun dengan $\triangle RBP_1$.

Jadi, RP_1 akan sejajar dengan AC .

$$RP_1 = \frac{1}{k+1} AC = AQ$$

Karena RP_1 sejajar dengan AQ dan $\angle AKQ = \angle KP_1R$ serta $RP_1 = AQ$ maka $\triangle RP_1K$ kongruen dengan $\triangle AQK$ dengan $AK = KP_1$.

Misal perpanjangan garis berat AG memotong sisi BC di S .

Jelas bahwa S adalah pertengahan sisi BC dan juga sisi PP_1 .

Maka AG juga garis berat $\triangle APP_1$ dengan titik G juga titik berat $\triangle APP_1$ sebab perbandingan AG dengan GS tetap $2 : 1$.

Karena K adalah pertengahan sisi AP_1 maka PK adalah juga garis berat $\triangle APP_1$.

Karena PK adalah garis berat $\triangle APP_1$ maka PK juga akan melalui titik G .

Jadi, titik P , K dan G akan berada pada satu garis lurus (kolinier).

∴ Terbukti bahwa titik-titik P , G dan K kolinier (terletak pada satu garis).

Alternatif 2 :

Tanpa mengurangi keumuman misalkan koordinat $A(0, 0)$ dan $B(k+1, 0)$ serta $C(b, c)$.

$$\text{Koordinat } P\left(b + \frac{k+1-b}{k+1}, c + \frac{0-c}{k+1}\right) = P\left(\frac{kb+k+1}{k+1}, \frac{kc}{k+1}\right)$$

$$\text{Koordinat } P_1\left(k+1 + \frac{b-k-1}{k+1}, \frac{c}{k+1}\right) = P_1\left(\frac{k^2+k+b}{k+1}, \frac{c}{k+1}\right)$$

$$\text{Koordinat } Q\left(\frac{b}{k+1}, \frac{c}{k+1}\right)$$

$$\text{Koordinat } R(k, 0)$$

$$\text{Koordinat } G\left(\frac{k+1+b}{3}, \frac{c}{3}\right)$$

Persamaan garis AP_1 .

$$y = \frac{c}{k^2+k+b} x \dots\dots\dots (1)$$

Persamaan garis QR

$$\frac{y-0}{\frac{c}{k+1}-0} = \frac{x-k}{\frac{b}{k+1}-k}$$

$$y = \frac{c}{b-k^2-k} (x-k) \dots\dots\dots (2)$$

Perpotongan garis AP_1 dan QR di titik $K(x_K, y_K)$

$$\frac{c}{k^2+k+b} x_K = \frac{c}{b-k^2-k} (x_K - k)$$

$$(b - k^2 - k)x_K = (k^2 + k + b)(x_K - k)$$

$$2k(k + 1)x_K = k(k^2 + k + b)$$

$$x_K = \frac{k^2+k+b}{2(k+1)} \quad \text{dan} \quad y_K = \frac{c}{k^2+k+b} \left(\frac{k^2+k+b}{2(k+1)} \right) = \frac{c}{2(k+1)}$$

Maka koordinat K $\left(\frac{k^2+k+b}{2(k+1)}, \frac{c}{2(k+1)} \right)$

$$\text{Kemiringan garis KG} = m_{KG} = \frac{\frac{c}{2(k+1)} - \frac{c}{3}}{\frac{k^2+k+b}{2(k+1)} - \frac{k+1+b}{3}} = \frac{c-2kc}{k^2-k+b-2kb-2}$$

$$\text{Kemiringan garis GP} = m_{GP} = \frac{\frac{c}{3} - \frac{kc}{k+1}}{\frac{k+1+b}{3} - \frac{kb+k+1}{k+1}} = \frac{c-2kc}{k^2-k+b-2kb-2}$$

Karena $m_{GP} = m_{KG}$ maka ketiga garis P, G dan K berada pada satu garis lurus.

∴ Terbukti bahwa titik-titik P, G dan K kolinier (terletak pada satu garis).

$$2. \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} = \frac{7+nq_1q_2 \dots q_k}{2100}$$

$$2100 (p_2 p_3 \dots p_k + p_1 p_3 \dots p_k + \dots + p_1 p_2 \dots p_{k-1}) = p_1 p_2 \dots p_k (7 + nq_1 q_2 \dots q_k)$$

p_i tidak membagi $(p_2 p_3 \dots p_k + p_1 p_3 \dots p_k + \dots + p_1 p_2 \dots p_{k-1})$ sebab ada tepat satu bagian dari $(p_2 p_3 \dots p_k + p_1 p_3 \dots p_k + \dots + p_1 p_2 \dots p_{k-1})$ yang tidak mengandung p_i .

Jadi, haruslah p_i membagi $2100 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$

Karena p_i untuk $i = 1, 2, \dots, k$ semuanya berbeda maka $k = 4$.

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{67} = \frac{2107}{2100} \quad \text{maka}$$

$$7 + nq_1 q_2 q_3 q_4 = 2107$$

$$nq_1 q_2 q_3 q_4 = 2100 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 3 \cdot 7 \quad \text{yang merupakan perkalian 6 bilangan prima.}$$

Karena q_1, q_2, q_3 dan q_4 adalah 4 bilangan prima yang boleh sama maka n merupakan perkalian dua faktor prima dari 2100.

Nilai n yang mungkin adalah $2 \cdot 2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, 3 \cdot 5, 3 \cdot 7, 5 \cdot 5$ dan $5 \cdot 7$.

∴ Banyaknya n yang memenuhi ada 8.

$$3. \quad x^3 + y^3 = 2$$

$$y = kx + d$$

$$x^3 + (kx + d)^3 = 2$$

$$(1 + k^3)x^3 + (3dk^2)x^2 + (3d^2k)x + d^3 - 2 = 0$$

Karena polinomial berderajat ganjil akan memiliki sedikitnya satu akar real maka polinomial di atas harus diubah menjadi polinomial berderajat genap.

Jadi, $k = -1$ maka

$$3dx^2 - 3d^2x + d^3 - 2 = 0$$

Agar tidak ada nilai x real yang memenuhi maka

$$(3d^2)^2 - 4(3d)(d^3 - 2) < 0$$

$$3d^4 - 4d^4 + 8d < 0$$

$$d(d - 2)(d^2 + 2d + 4) > 0$$

$$d^2 + 2d + 4 \text{ definit positif sehingga } d(d - 2) > 0$$

Nilai d yang memenuhi adalah $d < 0$ atau $d > 2$

∴ Nilai k yang memenuhi adalah $k = -1$ dan nilai $d < 0$ atau $d > 2$.

4. $x + 2y + 3z = n$ dengan $2010 \mid n$.

$$x + 2y = n - 3z$$

Karena $x + 2y \geq 0$ maka $0 \leq z \leq \frac{n}{3}$

- Jika z genap maka $z = 2k$ dengan k bilangan bulat tak negatif

Maka $n - 3z = n - 6k$ yang merupakan bilangan genap.

Karena $0 \leq 2k \leq \frac{n}{3}$ maka $0 \leq k \leq \frac{n}{6}$

$x + 2y = n - 6k$ yang merupakan bilangan genap sehingga x genap. Misalkan $x = 2m$

$$m + y = \frac{n-6k}{2} \text{ untuk } m \text{ bilangan bulat tak negative.}$$

Banyaknya pasangan (m, y) bulat tak negatif yang memenuhi $= \frac{n-6k}{2} + 1$ untuk setiap nilai k .

Maka banyaknya pasangan (x, y) bulat tak negatif yang memenuhi $= \frac{n-6k}{2} + 1$.

Misalkan banyaknya pasangan (x, y) bulat tak negatif yang memenuhi $= t_1$

$$t_1 = \sum_{k=0}^{\frac{n}{6}} \left(\frac{n-6k}{2} + 1 \right) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{6}} \left(\frac{n}{2} + 1 - 3k \right) \text{ yang merupakan deret aritmatika dengan beda } -3,$$

banyaknya suku $\frac{n}{6} + 1$, suku pertama $\frac{n}{2} + 1$ dan suku terakhir 1.

$$t_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{6} + 1 \right) \left(\left(\frac{n}{2} + 1 \right) + 1 \right) = \frac{n^2}{24} + \frac{5n}{12} + 1$$

- Jika z ganjil maka $z = 2k + 1$ dengan k bilangan bulat tak negatif

Maka $n - 3z = n - 6k - 3$ yang merupakan bilangan ganjil.

Karena $1 \leq 2k + 1 \leq \frac{n}{3} - 1 < \frac{n}{3}$ sebab $\frac{n}{3}$ genap.

$$0 \leq k \leq \frac{n}{6} - 1$$

$x + 2y = n - 6k - 3$ yang merupakan bilangan ganjil sehingga x ganjil. Misalkan $x = 2m + 1$

$$m + y = \frac{n-6k}{2} - 2 \text{ dengan } m \text{ bilangan bulat tak negatif}$$

Banyaknya pasangan (m, y) bulat tak negatif yang memenuhi $= \frac{n-6k}{2} - 1$ untuk setiap nilai k .

Maka banyaknya pasangan (x, y) bulat tak negatif yang memenuhi $= \frac{n-6k}{2} - 1$.

Misalkan banyaknya pasangan (x, y) bulat tak negatif yang memenuhi $= t_2$

$$t_2 = \sum_{k=0}^{\frac{n}{6}-1} \left(\frac{n-6k}{2} - 1 \right) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{6}-1} \left(\frac{n}{2} - 1 - 3k \right) \text{ yang merupakan deret aritmatika dengan beda } -3,$$

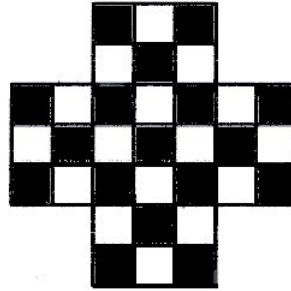
banyaknya suku $\frac{n}{6}$, suku pertama $\frac{n}{2} - 1$ dan suku terakhir 2.

$$t_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{6} \right) \left(\left(\frac{n}{2} - 1 \right) + 2 \right) = \frac{n^2}{24} + \frac{n}{12}$$

Jadi, banyaknya tripel (x, y, z) yang memenuhi $= t_1 + t_2 = \left(\frac{n^2}{24} + \frac{5n}{12} + 1 \right) + \left(\frac{n^2}{24} + \frac{n}{12} \right) = \frac{n^2}{12} + \frac{n}{2} + 1$

\therefore Terbukti banyaknya tripel (x, y, z) bilangan bulat tak negatif yang memenuhi $= \frac{n^2}{12} + \frac{n}{2} + 1$

5. Warnai petak-petak tersebut seperti pada papan catur.



Pada gambar di atas akan didapat jumlah petak warna hitam dan putih berselisih satu.

Langkah kuda dari petak putih ke petak hitam atau sebaliknya.

Karena kuda tersebut harus kembali ke petaknya semula maka petak terakhir sebelum kembali ke petak semula haruslah berbeda warna dengan petak semula tersebut.

Jadi, haruslah jumlah petak warna hitam sama dengan jumlah petak warna putih.

Tetapi ternyata jumlah petak warna hitam dan putih berselisih satu. Kontradiksi. Maka biji catur kuda tidak dapat kembali ke petaknya semula.

∴ Biji catur kuda tidak dapat kembali ke petaknya semula.