SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA TAHUN 2008

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2009

Bidang Matematika

Waktu : 3,5 Jam

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2008

OLIMPIADE MATEMATIKA NASIONAL
SELEKSI TINGKAT KOTA/KABUPATEN
TAHUN 2008

Bagian Pertama

Pilih satu jawaban yang benar. Dalam hal terdapat lebih dari satu jawaban yang benar, pilih jawaban yang paling baik.

1. Jika a bilangan real, maka $\sqrt{a^2}$ =
   A. $-|a|$ B. $-a$ C. $\pm a$ D. a E. $|a|$

2. Banyaknya faktor positif dari 5! adalah
   A. 4 B. 5 C. 16 D. 24 E. 120

3. Banyaknya susunan huruf B, I, O, L, A sehingga tidak ada dua huruf hidup (vowel) yang berturutan adalah
   A. 8 B. 10 C. 12 D. 14 E. 16

4. Lingkaran T merupakan lingkaran luar bagi segitiga ABC dan lingkaran dalam bagi segitiga PQR. Jika ABC dan PQR keduanya segitiga samasisi, maka rasio keliling ΔABC terhadap keliling ΔPQR adalah
   A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 2 E. 4

5. Jumlah empat bilangan asli berturutan senantiasa habis dibagi p. Maka nilai p terbesar adalah
   A. 1 B. 2 C. 4 D. 5 E. 7

6. Banyaknya himpunan X yang memenuhi $\{1, 2\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ adalah
   A. 3 B. 4 C. 8 D. 16 E. 32

7. Segitiga ABC sama kaki, yaitu AB = AC, dan memiliki keliling 32. Jika panjang garis tinggi dari A adalah 8, maka panjang AC adalah
   A. $9\frac{1}{3}$ B. 10 C. $10\frac{2}{3}$ D. $11\frac{1}{3}$ E. 12

8. Jika f(x) = $\frac{x+1}{x-1}$, maka untuk $x^2 \neq 1$, f(–x) =
   A. $\frac{1}{f(-x)}$ B. –f(–x) C. –f(x) D. f(x) E. $\frac{1}{f(x)}$

9. Pada trapesium ABCD, sisi AB sejajar sisi DC dan rasio luas segitiga ABC terhadap luas segitiga ACD adalah 1/3. Jika E dan F berturut-turut adalah titik tengah BC dan DA, maka rasio luas ABEF terhadap luas EFDC adalah

   A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{3}{5}$ C. 1 D. $\frac{5}{3}$ E. 3

10. Diketahui bahwa a, b, c dan d adalah bilangan-bilangan asli yang memenuhi $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ dan c < a. Jika b $\neq$ 1 dan c $\neq$ d, maka

   A. $\frac{a}{c} < \frac{b-a}{d-c}$ B. $\frac{b-a}{d-c} < \frac{a}{c}$ C. $\frac{a}{c} < \frac{b(d-1)}{d(b-1)}$

   D. $\frac{b(d-1)}{d(b-1)} < \frac{a}{c}$ E. $\frac{a+b}{c+d} < \frac{a}{c}$

Bagian Kedua

Isikan hanya jawaban saja pada tempat yang disediakan

11. Suatu pertujukan dihadiri oleh sejumlah penonton. Setiap penonton dewasa membayar tiket seharga 40 ribu rupiah, sedangkan setiap penonton anak-anak membayar tiket 15 ribu rupiah. Jika jumlah uang penjualan tiket adalah 5 juta rupiah, dan banyaknya penonton dewasa adalah 40 % dari seluruh penonton, maka banyaknya penonton anak-anak adalah ....

12. Diketahui FPB (a, 2008) = 251. Jika a > 2008 maka nilai terkecil yang mungkin bagi a adalah .....

13. Setiap dung adalah ding. Ada lima ding yang juga dong. Tidak ada dung yang dong. Jika banyaknya ding adalah 15, dan tiga di antaranya tidak dung dan tidak dong, maka banyaknya dung adalah ....

14. Dua buah dadu identik (sama persis) dilemparkan bersamaan. Angka yang muncul adalah a dan b. Peluang a dan b terletak pada sisi-sisi yang bertolak belakang (di dadu yang sama) adalah ....

15. Bilangan 4-angka dibentuk dari 1, 4, 7 dan 8 dimana masing-masing angka digunakan tepat satu kali. Jika semua bilangan 4-angka yang diperoleh dengan cara ini dijumlahkan, maka jumlah ini mempunyai angka satuan ....

16. Titik A dan B terletak pada parabola $y = 4 + x - x^2$. Jika titik asal O merupakan titik tengah ruas garis AB, maka panjang AB adalah .....

17. Jika a dan b adalah bilangan-bilangan bulat dan $x^2 - x - 1$ merupakan faktor dari $ax^3 + bx^2 + 1$, maka b = ...

18. Kubus ABCDEFGH dipotong oleh bidang yang melalui diagonal HF, membentuk sudut 30^o terhadap diagonal EG dan memotong rusuk AE di P. Jika panjang rusuk kubus adalah 1 satuan, maka panjang ruas AP adalah ....

19. Himpunan semua bilangan asli yang sama dengan enam kali jumlah angka-angkanya adalah ······

20. Diketahui bahwa a dan b adalah besar dua sudut pada sebuah segitiga. Jika sin a + sin b = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ dan cos a + cos b = $\frac{1}{2}\sqrt{6}$, maka sin (a + b) = ··········

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA 2008

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2009

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

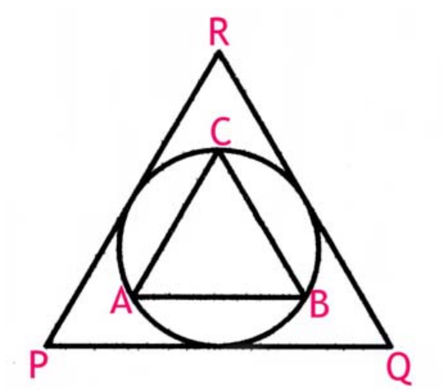
BAGIAN PERTAMA

1. (Jawaban : E)
   Akar dari suatu bilangan positif adalah juga bilangan positif, maka
   $\sqrt{a^2} = a$ jika a bilangan real positif
   $\sqrt{a^2} = -a$ jika a bilangan real negative
   $\therefore$ Karena a bilangan real maka $\sqrt{a^2}$ = $|\mathbf{a}|$

2. (Jawaban : C)
   $5! = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$
   Banyaknya faktor positif = (3 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 16
   $\therefore$ Banyaknya faktor positif dari 5! adalah **16**.

3. (Jawaban : C)
   Agar huruf hidup tidak berdekatan maka ketiga huruf hidup tersebut harus berada pada urutan ke-1, ke-3 dan ke-5. Sisanya harus diisi oleh huruf konsonan.
   Maka banyaknya susunan = $3! \cdot 2! = 12$
   $\therefore$ Banyaknya susunan = **12**.

4. (Jawaban : C)



   Misalkan jari-jari lingkaran tersebut adalah R, sisi ΔABC = x dan sisi ΔPQR = y.
   $\frac{x}{\sin 60^\circ}$ = 2R sehingga 3x = 3R√3
   Luas ΔPQR = ½ · R · (3y)
   ½ y^2 sin 60^o = ½ · R · 3y sehingga 3y = 6R√3
   Keliling ΔABC : Keliling ΔPQR = 3x : 3y = 1 : 2
   $\therefore$ Rasio keliling ΔABC terhadap keliling ΔPQR adalah $\frac{1}{2}$.

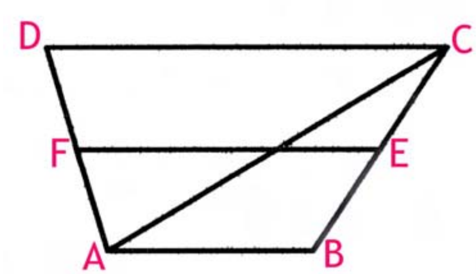
5. (Jawaban : B)
   (n) + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 2(2n + 3)
   2n + 3 adalah bilangan ganjil.
   ∴ Maka nilai p terbesar adalah **2**.

6. (Jawaban : C)
   $\{1, 2\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$
   X terdiri dari sedikitnya 2 unsur dan maksimal 5 unsur dengan 2 unsur di antaranya haruslah 1 dan 2. Sedangkan sisanya dipilih dari unsur-unsur 3, 4 atau 5.
   Jika X terdiri dari 2 unsur maka banyaknya himpunan X = ${}_3C_0$ = 1
   Jika X terdiri dari 3 unsur maka banyaknya himpunan X = ${}_3C_1$ = 3
   Jika X terdiri dari 4 unsur maka banyaknya himpunan X = ${}_3C_2$ = 3
   Jika X terdiri dari 5 unsur maka banyaknya himpunan X = ${}_3C_3$ = 1
   Banyaknya himpunan X = 1 + 3 + 3 + 1 = 8.
   ∴ Banyaknya himpunan X yang memenuhi adalah **8**.

7. (Jawaban : B)
   Misalkan panjang AB = AC = x maka panjang BC = $2\sqrt{x^2 - 64}$ maka
   $x + \sqrt{x^2 - 64} = 16$
   $x^2 - 64 = (16 - x)^2 = x^2 - 32x + 256$
   32x = 320
   x = 10
   Panjang AC = 10
   ∴ Panjang AC adalah **10**.

8. (Jawaban : E)
   $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$
   $f(-x) = \frac{-x+1}{-x-1} = \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{f(x)}$
   ∴ $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$

9. (Jawaban : D)



ΔABC dan ΔACD memiliki tinggi yang sama maka perbandingan luas keduanya dapat dinyatakan sebagai perbandingan alas.
AB : DC = 1 : 3
Misalkan panjang sisi AB = x maka panjang sisi DC = 3x.
E adalah pertengahan BC dan F pertengahan DA sehingga FE sejajar AB dan DC.
Maka FE = ½ (x + 3x) = 2x
Misalkan tinggi trapesium = t.
Luas ABEF = $\frac{(AB + FE)}{2} \cdot \frac{t}{2} = \frac{3tx}{4}$
Luas EFDC = $\frac{(FE + DC)}{2} \cdot \frac{t}{2} = \frac{5tx}{4}$
Rasio luas ABEF terhadap luas EFDC = 3 : 5.
$\therefore$ Rasio luas ABEF terhadap luas EFDC adalah $\frac{3}{5}$.

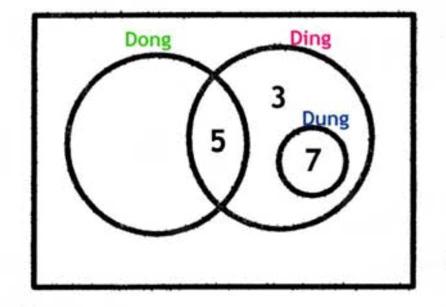
10. (Jawaban : A)
Karena $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ maka $\frac{b}{a} > \frac{d}{c}$.
$\frac{b-a}{a} > \frac{d-c}{c}$ sehingga $\frac{a}{c} < \frac{b-a}{d-c}$
$\therefore$ $\frac{a}{c} < \frac{b-a}{d-c}$

BAGIAN KEDUA

11. Misal penonton dewasa = x dan penonton anak-anak = y maka
40.000x + 15.000y = 5.000.000
8x + 3y = 1000 ………………… (1)
x = 40% (x + y)
3x = 2y ……………………… (2)
Subtitusikan persamaan (2) ke (1)
16y + 9y = 3000
y = 120
$\therefore$ Banyaknya penonton anak-anak adalah **120**

12. 2008 = 8 · 251 dan a = 251 · k dengan k dan 8 relatif prima serta k bilangan asli.
Karena k > 8 dan dua bilangan asli berurutan akan relatif prima maka k_{min} = 9.
a minimum = k_{min} · 251
a minimum = 9 · 251 = 2259.
$\therefore$ Nilai a terkecil yang mungkin adalah **2259**.

13. Kalau persoalan tersebut digambarkan dalam diagram venn maka



∴ Maka banyaknya dung adalah **7**.

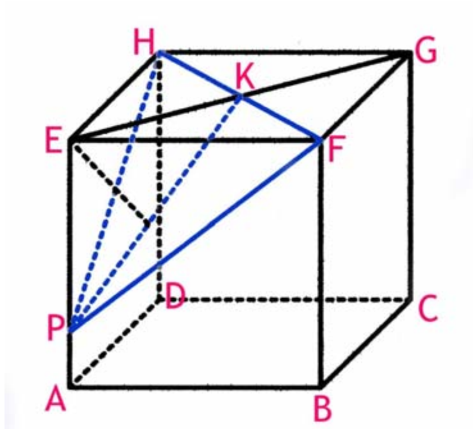
14. Pasangan bilangan yang muncul adalah 1 dan 6 atau 2 dan 5 atau 3 dan 4.
Banyaknya pasangan yang mungkin ada 6.
∴ Peluang = $\frac{6}{36}$

15. Banyaknya bilangan yang mungkin ada 4! = 24.
Masing-masing angka 1, 4, 7 dan 8 akan muncul 6 kali sebagai angka satuan.
Angka satuan bilangan tersebut = angka satuan $6 \cdot 1 + 6 \cdot 4 + 6 \cdot 7 + 6 \cdot 8$
∴ Angka satuan bilangan tersebut adalah **0**.

16. Misalkan koordinat A adalah (p, q) maka karena pertengahan AB adalah titik (0, 0) maka koordinat B adalah (–p, –q).
Titik A dan B terletak pada parabola maka
$q = 4 + p - p^2$ …………… (1)
$-q = 4 - p - p^2$ …………… (2)
Jumlahkan persamaan (1) dan (2) didapat
$0 = 8 - 2p^2$ sehingga $p = \pm 2$
Jika p = 2 maka $q = 4 + 2 - 2^2 = 2$
Jika p = –2 maka $q = 4 - 2 - 2^2 = -2$
Koordinat A dan B adalah (2, 2) dan (–2, –2)
Panjang AB = $\sqrt{(2-(-2))^2 + (2-(-2))^2}$
∴ Panjang AB = **4√2.**

17. Karena koefisien x^3 adalah a dan konstantanya adalah 1 maka haruslah
$(ax^3 + bx^2 + 1) = (x^2 - x - 1)(ax - 1)$
$(ax^3 + bx^2 + 1) = ax^3 - (a + 1)x^2 + (1 - a)x + 1$
Maka 1 – a = 0 sehingga a = 1
b = – (a + 1) sehingga
b = –(1 + 1) = –2
∴ Nilai b yang memenuhi adalah **b = 2**.

18. Perhatikan gambar.



Perpotongan bidang yang melalui HF tersebut dengan kubus adalah segitiga PFH.
Misalkan panjang AP = x maka PE = 1 − x.
E.PFH adalah bangunan prisma dengan alas berbentuk segitiga sama kaki.
Karena PF = PH dan FE = HE maka proyeksi E pada bidang PFH akan berada pada garis tinggi PK.
Sudut antara garis EG dengan bidang PFH adalah $\angle$EKP.

EK = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Pada ΔKEP siku-siku di E.

tan $\angle$EKP = $\frac{EP}{EK}$ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\frac{1-x}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

AP = $\frac{6-\sqrt{6}}{6}$

$\therefore$ Panjang ruas AP adalah $\frac{6-\sqrt{6}}{6}$.

19. Misalkan bilangan tersebut adalah N.
Misalkan N adalah bilangan n angka dengan angka-angka N adalah x_1, x_2, x_3, ⋅⋅⋅, x_n.
N ≥ 10^{n-1} dan N = $6(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \le 54n$
Lemma :
Akan dibuktikan bahwa jika terbukti $54k < 10^{k-1}$ maka $54(k + 1) < 10^k$ untuk k bilangan asli ≥ 3.
Andaikan bahwa $54k < 10^{k-1}$.
Karena k ≥ 3 maka $54 < 9 \cdot 10^{k-1}$ sehingga
$54k + 54 < 10^{k-1} + 9 \cdot 10^{k-1}$
$54(k + 1) < 10^k$
Terbukti bahwa untuk k asli ≥ 3 maka jika $54k < 10^{k-1}$ maka $54(k + 1) < 10^k$.
Pembuktian di atas sama saja dengan membuktikan bahwa untuk k ≥ 3 maka jika tidak ada N yang terdiri dari k angka yang memenuhi nilainya sama dengan 6 kali jumlah angka-angkanya maka tidak akan ada juga N terdiri dari k + 1 angka yang memenuhi nilainya sama dengan 6 kali jumlah angka-angkanya.

- Jika N terdiri dari 1 angka
  $N = x_1 = 6(x_1)$ sehingga tidak ada N asli yang memenuhi.
- Jika bilangan tersebut adalah bilangan dua angka
  $N = 10x_1 + x_2 = 6(x_1 + x_2)$
  $4x_1 = 5x_2$
  Karena x_1 dan x_2 asli maka pasangan (x_1, x_2) yang memenuhi hanya (5,4).
  Bilangan yang memenuhi hanya 54.
- Jika N terdiri dari 3 angka
  Misalkan $N = 100x_1 + 10x_2 + x_3 = 6(x_1 + x_2 + x_3)$
  $94x_1 + 4x_2 = 5x_3$
  Karena $x_1 \geq 1$ maka tidak ada tripel (x_1, x_2, x_3) yang memenuhi.

Sesuai dengan lemma maka untuk $n \geq 3$ maka tidak ada N yang memenuhi nilainya sama dengan 6 angka jumlah angka-angkanya.
Himpunan semua bilangan yang memenuhi hanya {54}.
∴ Himpunan semua bilangan yang memenuhi adalah **{54}**.

20. $(\sin a + \sin b)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$\sin^2 a + \sin^2 b + 2 \sin a \sin b = \frac{1}{2}$ .... (1)

$(\cos a + \cos b)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)^2 = \frac{3}{2}$

$\cos^2 a + \cos^2 b + 2 \cos a \cos b = \frac{3}{2}$ .... (2)

Jumlahkan (1) dan (2) dan dengan mengingat $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ maka
$2 + 2 (\sin a \sin b + \cos a \cos b) = 2$
$\sin a \sin b + \cos a \cos b = 0$
$\cos (a - b) = 0$ .... (3)

$(\sin a + \sin b)(\cos a + \cos b) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\sin a \cos a + \sin b \cos b + \sin a \cos b + \cos a \sin b = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\frac{1}{2} (\sin 2a + \sin 2b) + \sin (a + b) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\sin (a + b) \cos (a - b) + \sin (a + b) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Mengingat $\cos (a - b) = 0$ maka $\sin (a + b) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

∴ $\sin (a + b) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Catatan :
Jika yang dicari adalah nilai a dan b.
Tanpa mengurangi keumuman misalkan $a \geq b$.

Berdasarkan cos (a − b) = 0 maka
$a - b = 90^o$ .... (4)

Karena sin (a + b) = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ maka :

- $a + b = 60^o$ .... (5)
  Berdasarkan (4) dan (5) maka didapat a = 75^o dan b = -15^o yang tidak memenuhi bahwa a dan b adalah besar dua sudut pada sebuah segitiga.
- $a + b = 120^o$
  Berdasarkan (4) dan (6) maka didapat a = 115^o dan b = 15^o.
  Tetapi bila a = 115^o dan b = 15^o disubtitusikan ke persamaan sin a + sin b = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ dan persamaan cos a + cos b = $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ ternyata tidak memenuhi keduanya.

Dapat disimpulkan bahwa tidak ada pasangan (a, b) yang memenuhi.

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2008

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2009

Bidang Matematika

Bagian Pertama

Waktu : 90 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2008

SELEKSI TINGKAT PROVINSI CALON
PESERTA OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2008
MATEMATIKA SMA

BAGIAN PERTAMA

1. Banyaknya pembagi positif dari 2008 adalah ······

2. Cara menyusun huruf-huruf MATEMATIKA dengan kedua T tidak berdekatan ada sebanyak ··········

3. Jika $0 < b < a$ dan $a^2 + b^2 = 6ab$, maka $\frac{a+b}{a-b}$ = ·······

4. Dua dari panjang garis tinggi segitiga ABC lancip, berturut-turut sama dengan 4 dan 12. Jika panjang garis tinggi yang ketiga dari segitiga tersebut merupakan bilangan bulat, maka panjang maksimum garis tinggi segitiga tersebut adalah ······

5. Dalam bidang XOY, banyaknya garis yang memotong sumbu X di titik dengan absis bilangan prima dan memotong sumbu Y di titik dengan ordinat bilangan bulat positif serta melalui titik (4, 3) adalah ·····

6. Diberikan segitiga ABC, AD tegak lurus BC sedemikian rupa sehingga DC = 2 dan BD = 3. Jika $\angle BAC = 45^o$, maka luas segitiga ABC adalah ······

7. Jika x dan y bilangan bulat yang memenuhi $y^2 + 3x^2y^2 = 30x^2 + 517$, maka $3x^2y^2$ = ·······

8. Diberikan segitiga ABC, dengan BC = a, AC = b dan $\angle C = 60^o$. Jika $\frac{a}{b} = 2 + \sqrt{3}$, maka besarnya sudut B adalah ·····

9. Seratus siswa suatu Provinsi di Pulau Jawa mengikuti seleksi tingkat Provinsi dan skor rata-ratanya adalah 100. Banyaknya siswa kelas II yang mengikuti seleksi tersebut 50% lebih banyak dari siswa kelas III, dan skor rata-rata siswa kelas III 50% lebih tinggi dari skor rata-rata siswa kelas II. Skor rata-rata siswa kelas III adalah ······

10. Diberikan segitiga ABC, dengan BC = 5, AC = 12, dan AB = 13. Titik D dan E berturut-turut pada AB dan AC sedemikian rupa sehingga DE membagi segitiga ABC menjadi dua bagian dengan luas yang sama. Panjang minimum DE adalah ·····

11. Misalkan a, b, c dan d bilangan rasional. Jika diketahui persamaan $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ mempunyai 4 akar real, dua di antaranya adalah $\sqrt{2}$ dan $\sqrt{2008}$. Nilai dari a + b + c + d adalah ··

12. Diberikan segitiga ABC dengan sisi-sisi a, b, dan c. Nilai $a^2 + b^2 + c^2$ sama dengan 16 kali luas segitiga ABC. Besarnya nilai ctg A + ctg B + ctg C adalah ·····

13. Diberikan $f(x) = x^2 + 4$. Misalkan x dan y adalah bilangan-bilangan real positif yang memenuhi $f(xy) + f(y - x) = f(y + x)$. Nilai minimum dari x + y adalah ······

14. Banyak bilangan bulat positif n kurang dari 2008 yang mempunyai tepat $\frac{n}{2}$ bilangan kurang dari n dan relatif prima terhadap n adalah ·······

15. Suatu polinom f(x) memenuhi persamaan $f(x^2) - x^3f(x) = 2(x^3 - 1)$ untuk setiap x bilangan real. Derajat (pangkat tertinggi x) f(x) adalah ······

16. Anggap satu tahun 365 hari. Peluang dari 20 orang yang dipilih secara acak ada dua orang yang berulang tahun pada hari yang sama adalah ·······

17. Tiga bilangan dipilih secara acak dari {1,2,3, ···,2008}. Peluang jumlah ketiganya genap adalah ···

18. Misalkan $|X|$ menyatakan banyaknya anggota himpunan X. Jika $|A \cup B| = 10$ dan $|A| = 4$, maka nilai yang mungkin untuk $|B|$ adalah ······

19. Diketahui AD adalah garis tinggi dari segitiga ABC, $\angle DAB = \angle ACD$, AD = 6, BD = 8. Luas segitiga ABC adalah ·····

20. Nilai dari $\sum_{k=0}^{1004} 3^k \binom{1004}{k}$ = ·······

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2008

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2009

Bidang Matematika

Bagian Kedua

Waktu : 120 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2008

SELEKSI TINGKAT PROVINSI CALON
PESERTA OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2008
MATEMATIKA SMA

BAGIAN KEDUA

1. Carilah semua pasangan bilangan asli (x, n) yang memenuhi
$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = 40$$

2. Diberikan polinom real $P(x) = x^{2008} + a_1x^{2007} + a_2x^{2006} + \cdots + a_{2007}x + a_{2008}$ dan $Q(x) = x^2 + 2x + 2008$. Misalkan persamaan $P(x) = 0$ mempunyai 2008 selesaian real dan $P(2008) \leq 1$. Tunjukkan bahwa persamaan $P(Q(x)) = 0$ mempunyai selesaian real.

3. Lingkaran dalam dari segitiga ABC, menyinggung sisi-sisi BC, CA, dan AB berturut-turut di D, E, dan F. Melalui D, ditarik garis tegak lurus EF yang memotong EF di G. Buktikan bahwa
$$\frac{FG}{EG} = \frac{BF}{CE}$$

4. Bilangan 1, 2, 3, ⋯, 9 disusun melingkar secara acak. Buktikan bahwa ada tiga bilangan berdekatan yang jumlahnya lebih besar dari 15.

5. Tentukan banyaknya bilangan positif 5-angka palindrom yang habis dibagi 3. Palindrom adalah bilangan/kata yang sama jika dibaca dari kiri ke kanan atau sebaliknya. Sebagai contoh 35353 adalah bilangan palindrom, sedangkan 14242 bukan.

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2008
TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2009

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Bagian Pertama

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN PERTAMA

1. $2008 = 2^3 \cdot 251$
   Banyaknya pembagi positif dari 2008 = (3 + 1)(1 + 1)
   ∴ Banyaknya pembagi positif dari 2008 = **8**.

2. Alternatif 1 :
   Banyaknya cara menyusun huruf-huruf MATEMATIKA adalah $\frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}$ = 151200
   Banyaknya cara menyusun huruf-huruf MATEMATIKA dengan syarat kedua T berdekatan adalah sama dengan banyaknya cara menyusun huruf-huruf MATEMAIKA, yaitu $\frac{9!}{3!\cdot 2!}$ = 30240
   Banyaknya cara menyusun huruf-huruf MATEMATIKA dengan kedua T tidak berdekatan adalah = 151200 − 30240 = 120960.
   ∴ Banyaknya cara menyusun = **120960**.

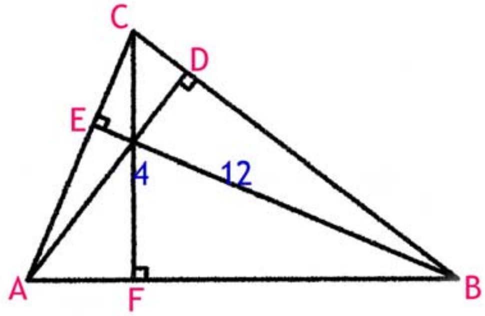
   Alternatif 2 :
   Karena T tidak boleh berdekatan maka kedua huruf T hanya dapat ditempatkan ke dalam 9 dari 10 tempat. Banyaknya cara memilih 9 tempat = ${}_9C_2$ = 36 cara
   Ke-8 tempat yang lain akan diisi oleh ke-8 uruf tersisa yang terdiri dari 2 huruf M, 3 huruf A dan masing-masing satu huruf yaitu E, I dan K. Banyaknya cara = $\frac{8!}{2!\cdot 3!}$ = 3360 cara.
   Banyaknya cara menyusun huruf-huruf MATEMATIKA dengan kedua T tidak berdekatan adalah = 36 x 3360 = 120960.
   ∴ Banyaknya cara menyusun = **120960**.

3. Karena 0 < b < a maka $\frac{a+b}{a-b}$ akan bernilai positif.

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 = \frac{a^2+b^2+2ab}{a^2+b^2-2ab} = \frac{6ab+2ab}{6ab-2ab} = 2$$

$$\therefore \quad \frac{a+b}{a-b} = \sqrt{2}$$

4. Misalkan panjang sisi-sisi segitiga ABC adalah BC = a, AC = b dan AB = c.



Misalkan juga panjang garis tinggi dari A adalah x dengan x bilangan asli.
Ada dua kemungkinan pemahaman terhadap pertanyaan pada soal.

i) Yang ditanyakan adalah maks (x, 4, 12).
[ABC] = ½ · AC · 12 = ½ · AB · 4
b · 12 = AB · 4
AB = 3b
[ABC] = ½ · a · x = ½ · 4 · 3b
a x = 12b ……………………………… (1)
Akan dibuktikan bahwa x ≤ 12 sehingga panjang maksimum dari garis tinggi segitiga ABC adalah 12.
Andaikan bahwa x > 12.
Dari persamaan (1) akan didapat bahwa a < b ………………… (2)
Pada segitiga siku-siku ACF jelas bahwa AC = b > AF
Karena AB = 3b maka FB > 2b
Pada segitiga siku-siku BCF berlaku bahwa BC > FB
Karena BC = a < b sedangkan FB > 2b maka ketaksamamaan tidak mungkin terjadi. Kontradiksi dengan pengandaian awal.
Jadi, x ≤ 12.
Maka panjang maksimum garis tinggi segitiga ABC adalah **12**.

ii) Yang ditanyakan adalah panjang maksimum dari garis tinggi yang ketiga dari segitiga ABC
Panjang garis tinggi-garis tinggi yang berturut-turut sepadan dengan sisi-sisi a, b dan c adalah x, 12 dan 4.
Dengan rumus luas segitiga ABC didapat hubungan
xa = 12b = 4c
Dengan ketaksamaan segitiga didapat
c < a + b sehingga $1 < \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$
$1 < \frac{4}{x} + \frac{1}{3}$ sehingga didapat x < 6.
Jika x = 5 maka 5a = 12b = 4c
a : b : c = $\frac{1}{5} : \frac{1}{12} : \frac{1}{4}$ = 12 : 5 : 15
Karena $12^2 + 5^2 < 15^2$ maka segitiga tersebut tumpul. Kontradiksi.
Jika x = 4 maka 4a = 12b = 4c
a : b : c = $\frac{1}{4} : \frac{1}{12} : \frac{1}{4}$ = 3 : 1 : 3
Segitiga tersebut adalah segitiga lancip sebab $3^2 + 1^2 > 3^2$.
Jadi, panjang maksimum garis tinggi yang ketiga dari segitiga ABC adalah **4**.

∴ Dari dua kemungkinan ini Penulis lebih cenderung pada kemungkinan pertama yang sesua dengan kata-kata pada soal. Panjang maksimum garis tinggi dari segitiga ABC adalah **12**.

5. Misalkan persamaan garis tersebut adalah y = mx + c
Misalkan juga garis memotong sumbu X di (p, 0) dan sumbu Y di (0, q) dengan p adalah bilangan prima dan q adalah bilangan bulat positif.
Karena garis memotong sumbu X di (p, 0) dan sumbu Y di (0, q) maka persamaan garis tersebut adalah $y = -\frac{q}{p}x + c$.

Garis melalui (0, q) maka c = q. Jadi persamaan garis tersebut adalah $y = -\frac{q}{p}x + q$

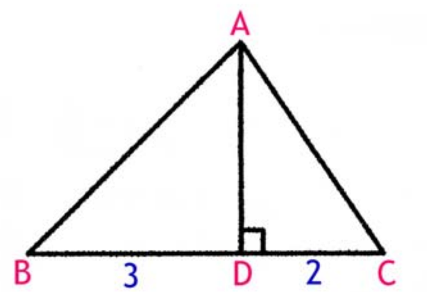
Karena garis melalui (4, 3) maka berlaku
3p = –4q + pq
(p – 4)(q – 3) = 12

* Jika p genap maka p = 2 sehingga q = –3. Tidak memenuhi q bulat positif.
* Jika p ganjil maka p – 4 ganjil. Nilai p – 4 yang mungkin memenuhi adalah ±1 atau ±3.
  - Jika p – 4 = –1 maka p = 3 dan q = –9. Tidak memenuhi q bulat positif.
  - Jika p – 4 = 1 maka p = 5 dan q = 15. Jadi persamaan garis adalah y = –3x + 15 yang melalui titik (4, 3)
  - Jika p – 4 = –3 maka p = 1 yang tidak memenuhi bahwa p adalah bilangan prima.
  - Jika p – 4 = 3 maka p = 7 dan q = 7. Jadi persamaan garis adalah y = –x + 7 yang melalui titik (4, 3)

Persamaan garis yang memenuhi adalah y = –3x + 15 dan y = –x + 7.

∴ Banyaknya garis yang memenuhi ada **2**.

6. Perhatikan gambar. Diketahui dari soal ∠BAC = 45°.



Alternatif 1 :

Misalkan luas segitiga ABC = [ABC]
Dengan dalil pitagoras didapat :
$AC^2 = AD^2 + 4$ .... (1)
$AB^2 = AD^2 + 9$ .... (2)
Persamaan (2) jumlahkan dengan (1) didapat
$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 13$ .... (3)
[ABC] = ½ BC · AD
Karena BC = 5 maka AD = $\frac{2[ABC]}{5}$ .... (4)
Pada segitiga ABC berlaku
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\ AB\ AC \cos 45^\circ = AB^2 + AC^2 - 2\ AB\ AC \sin 45^\circ$
$25 = 2\ AD^2 + 13 - 4[ABC]$ .... (5)
Subtitusikan persamaan (4) ke (5)

$$12 = \frac{8[ABC]^2}{25} - 4[ABC]$$

(2[ABC] + 5)([ABC] – 15) = 0
Maka [ABC] = 15

∴ Luas segitiga ABC adalah **15**.

Alternatif 2 :
Misalkan AD = t
$\angle BAD + \angle CAD = 45^o$

1 = tan 45^o = $\frac{\tan \angle BAD + \tan \angle CAD}{1 - \tan \angle BAD \cdot \tan \angle CAD}$

$1 = \frac{\frac{3}{t} + \frac{2}{t}}{1 - \frac{3}{t} \cdot \frac{2}{t}}$ yang ekivalen dengan

(t – 6)(t + 1) = 0
[ABC] = ½ · BC · AD = ½ · 5 · 6
∴ Luas segitiga ABC adalah **15**.

7. Persamaan tersebut dapat diubah menjadi $(3x^2 + 1)(y^2 - 10) = 507 = 3 \cdot 13^2$
Karena $3x^2 + 1$ bulat positif maka $y^2 - 10$ juga bilangan bulat positif. Faktor positif dari 507 ada 6 yaitu 1, 3, 13, 39, 169 dan 507.
$y^2 - 10$ adalah faktor dari 507 maka y^2 = 11, 13, 23, 49, 179 atau 517 dan yang merupakan bilangan kuadrat sempurna hanya 49. Maka $y^2 = 49$.
Sehingga $3x^2 + 1 = 13$.
∴ $3x^2y^2 = 12 \times 49$ **= 588.**

8. Alternatif 1 :

$$\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \cdot \frac{3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}} \quad \text{......................} \quad (1)$$

Dengan dalil cosinus

$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B}$ sehingga $\frac{\sin \angle A}{\sin \angle B} = \frac{a}{b} = 2 + \sqrt{3}$

$$\sin \angle A = \left(2 + \sqrt{3}\right) \sin \angle B \quad \text{..........................} \quad (2)$$

Karena $\angle C = 60^o$ maka $\angle A = 120^o - \angle B$
$\sin \angle A = \sin(120^o - \angle B) = \sin 120^o \cos \angle B - \cos 120^o \sin \angle B$

$$\left(2 + \sqrt{3}\right) \sin \angle B = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cos \angle B + \frac{1}{2} \sin \angle B$$

$$\left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right) \sin \angle B = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cos \angle B$$

$$\tan \angle B = \frac{\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}} = \tan 15^o$$

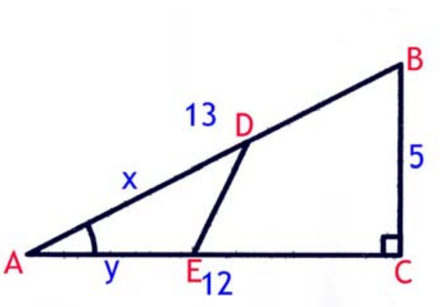
∴ Besarnya sudut B adalah **15^o**.

Alternatif 2 :
Misal AB = c dan dengan dalil cosinus didapat
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 60^\circ$
Subtitusikan $a = \left(2+\sqrt{3}\right)b$ yang didapat dari soal.
$c^2 = \left(2+\sqrt{3}\right)^2 b^2 + b^2 - 2\left(2+\sqrt{3}\right)b \cdot b \cdot \frac{1}{2}$
$c^2 = \left(6+3\sqrt{3}\right)b^2$
Dengan dalil sinus didapat
$$\frac{c^2}{(\sin\angle C)^2} = \frac{b^2}{(\sin\angle B)^2}$$
$$\frac{\left(6+3\sqrt{3}\right)b^2}{\frac{3}{4}} = \frac{b^2}{\sin^2\angle B}$$
$$\sin^2\angle B = \frac{1}{4\left(2+\sqrt{3}\right)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{3}$$
$\angle$B = 15°
$\therefore$ Besarnya sudut B adalah **15°**.

9. Karena banyaknya siswa = 100 orang sedangkan banyaknya siswa kelas II 50% lebih banyak dari siswa kelas III maka banyaknya siswa kelas II yang mengikuti seleksi = 60 orang sedangkan siswa kelas III = 40 orang.

Misalkan skor rata-rata kelas III adalah x maka skor rata-rata kelas II adalah $\frac{2}{3}$x.
$$100 = \frac{60 \cdot \frac{2}{3}x + 40 \cdot x}{100}$$
x = 125
$\therefore$ Skor rata-rata siswa kelas III adalah **125**.

10. Misalkan panjang AD = x dan panjang AE = y



Luas ΔABC = $\frac{1}{2}$(5)(12) = 30 dan sin A = $\frac{5}{13}$ serta cos A = $\frac{12}{13}$
Luas ΔADE = $\frac{1}{2}$xy sin A = 15. Maka xy = 78.

Sesuai dalil cosinus pada ΔADE maka :
$DE^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos A = x^2 + y^2 - 144$
Dengan AM-GM maka
$DE^2 \geq 2xy - 144 = 12$
DE^2 akan minimum sama dengan 12 jika x = y = $\sqrt{78}$
$\therefore$ $DE_{minimum} = 2\sqrt{3}$

11. Misalkan ke-4 akar tersebut adalah x_1, x_2, x_3 dan x_4 dengan $x_1 = \sqrt{2}$ dan $x_2 = \sqrt{2008} = 2\sqrt{502}$.

Alternatif 1 :

$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = 0$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a$ yang merupakan bilangan rasional. Maka ada 2 kemungkinan nilai x_3 dan x_4.

- $x_3 = p - \sqrt{2} - 2\sqrt{502}$ dan $x_4 = q$ untuk p dan q bilangan rasional.
  $x_1x_2x_3x_4 = d$ yang merupakan bilangan rasional.
  $\left(\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{502}\right)\left(p-\sqrt{2}-2\sqrt{502}\right)(q)$ = bilangan rasional untuk p, q rasional
  $4p\sqrt{251} - 4\sqrt{251} - 2008\sqrt{2}$ = bilangan rasional.
  Maka tidak ada p rasional yang memenuhi
- $x_3 = p - \sqrt{2}$ dan $x_4 = q - 2\sqrt{502}$ untuk p dan q bilangan rasional.
  $x_1x_2x_3x_4 = d$ yang merupakan bilangan rasional.
  $\left(\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{502}\right)\left(p-\sqrt{2}\right)\left(q-2\sqrt{502}\right)$ = bilangan rasional
  $4pq\sqrt{251} - 2008p\sqrt{2} - 4q\sqrt{502} + 4016$ = bilangan rasional
  Kesamaan di atas akan terpenuhi hanya jika p = q = 0 sehingga $x_3 = -\sqrt{2}$ dan $x_4 = -\sqrt{2008}$
  $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - \sqrt{2})(x - \sqrt{2008})(x + \sqrt{2})(x + \sqrt{2008})$
  $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x^2 - 2)(x^2 - 2008) = x^4 - 2010x^2 + 4016$
  Maka a = 0, b = –2010, c = 0 dan d = 4016
  a + b + c + d = 0 – 2010 + 0 + 4016

∴ Nilai a + b + c + d adalah **2006**.

Alternatif 2 :

Jika $\sqrt{2}$ disubtitusikan ke persamaan $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ didapat

$(2a + c)\sqrt{2} = -(2b + d + 4)$

Karena a, b, c dan d rasional maka kesamaan hanya mungkin terjadi jika 2a + c = 0 ·········· (1)

Sehingga 2b + d + 4 = 0 ··············· (2)

Jika $\sqrt{2008} = 2\sqrt{502}$ disubtitusikan ke persamaan $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ didapat

$(2008a + c)\sqrt{2} = -(2008b + d + 4032064)$

Karena a, b, c dan d rasional maka kesamaan hanya mungkin terjadi jika 2008a + c = 0 ········· (3)

Sehingga 2008b + d + 4032064 = 0 ··············· (4)

Dari persamaan (1) dan (3) didapat a = 0 dan c = 0

Dari persamaan (2) dan (4) didapat b = –2010 dan d = 4016

a + b + c + d = 0 – 2010 + 0 + 4016 = 2006

∴ Nilai a + b + c + d adalah **2006**.

12. Misalkan [ABC] menyatakan luas ΔABC.

Berdasarkan dalil cosinus, cos ∠A = $\frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$.

Maka ctg ∠A = $\frac{\cos\angle A}{\sin\angle A} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC \cdot \sin\angle A} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{4[ABC]}$

Dengan cara yang sama didapat :

ctg $\angle$B = $\frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{4[ABC]}$

ctg $\angle$C = $\frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{4[ABC]}$

ctg $\angle$A + ctg $\angle$B + ctg $\angle$C = $\frac{AB^2 + AC^2 + BC^2}{4[ABC]}$ = $\frac{16}{4}$

$\therefore$ ctg $\angle$A + ctg $\angle$B + ctg $\angle$C = **4.**

13. f(x) = x^2 + 4
f(xy) = x^2y^2 + 4
f(y – x) = $(y - x)^2 + 4$
f(y + x) = $(y + x)^2 + 4$
f(xy) + f(y – x) = f(y + x)
$x^2y^2 + 4 + (y - x)^2 + 4 = (y + x)^2 + 4$
$x^2y^2 + y^2 + x^2 - 2xy + 4 = y^2 + x^2 + 2xy$
$x^2y^2 + 4 = 4xy$
$(xy - 2)^2 = 0$
Jadi xy = 2
Dengan ketaksamaan AM-GM maka
$x + y \geq 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{2}$
Dengan memanfaatkan bilangan kuadrat tak mungkin negatif
$$x + y = x + \frac{2}{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2\sqrt{2}$$
tanda kesamaan terjadi jika $x = y = \sqrt{2}$
$\therefore$ Nilai minimum dari x + y adalah $2\sqrt{2}$

14. Jelas bahwa n harus genap.
Misalkan n = $2^y \cdot p_1^{x1} \cdot p_2^{x2} \cdot \cdots \cdot p_k^{xk}$ dengan p_i untuk i = 1, 2, ···, k semuanya bilangan prima ganjil dan x_i untuk i = i, 2, ···, k semuanya bilangan bulat tak negatif serta y asli.
Karena salah satu faktor dari n adalah 2 maka semua bilangan genap ≤ n tidak akan relatif prima dengan n. Banyaknya bilangan genap ≤ n ada tepat sebanyak $\frac{n}{2}$ dan banyaknya bilangan ganjil kurang dari n juga ada sebanyak $\frac{n}{2}$.
Tetapi untuk semua 1 < p_i < n dengan i = 1, 2, ···, k juga merupakan faktor dari n yang mengakibatkan semua 1 < p_i < n dengan i = 1, 2, ···, k tidak akan relatif prima dengan n.
Maka agar terpenuhi ada tepat $\frac{n}{2}$ bilangan kurang dari n dan relatif prima terhadap n maka n tidak boleh memiliki faktor ganjil selain 1. Jadi p_i = 1 untuk semua i = 1, 2, ···, k.
Maka n = 2^y untuk suatu bilangan asli y.

Karena n < 2008 maka 2^y < 2008. Jadi y ≤ 10.
Maka nilai n yang memenuhi adalah 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024.
∴ Banyaknya bilangan bulat positif n yang memenuhi ada **10**.

15. Misalkan f(x) berderajat n maka $f(x^2)$ akan berderajat 2n.
$x^3f(x)$ akan berderajat n + 3.
- Jika n > 3 maka 2n > n + 3 sehingga $f(x^2) - x^3f(x)$ akan berderajat 2n > 6. Jadi, tanda kesamaan tidak mungkin terjadi.
- Jika n = 3 maka $f(x^2)$ dan $x^3f(x)$ akan berderajat sama yaitu 6 sehingga masih dimungkinkan $f(x^2) - x^3f(x)$ akan berderajat 3.
  Jika $f(x) = x^3 - 2$ maka $f(x^2) - x^3f(x) = (x^6 - 2) - x^3(x^3 - 2) = 2(x^3 - 1)$ yang memenuhi.
- Jika n < 3 maka 2n < n + 3 sehingga $f(x^2) - x^3f(x)$ akan berderajat n + 3. Karena ruas kanan berderajat 3 maka n = 0.

∴ Derajat f(x) adalah **3**.

16. Banyaknya kemungkinan tanggal lahir dari 20 orang = 365^{20}.
Banyaknya kemungkinan dari 20 orang tersebut tidak ada satupun yang berulang tahun di hari yang sama = $365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \cdots \cdot 346 = {}_{365}P_{20}$.
Peluang yang ditanyakan pada soal dapat dicari dengan cara komplemen.
Peluang dari 20 orang yang dipilih secara acak ada dua orang yang berulang tahun pada hari yang sama adalah

$$1 - \frac{{}_{365}P_{20}}{365^{20}}$$

∴ Peluang dari soal = $1 - \frac{{}_{365}P_{20}}{365^{20}}$

17. Ada dua kemungkinan jumlah ketiga bilangan tersebut genap
- Ketiga bilangan tersebut semuanya genap

  Peluang = $\frac{{}_{1004}C_3}{{}_{2008}C_3} = \frac{\frac{1004 \cdot 1003 \cdot 1002}{6}}{\frac{2008 \cdot 2007 \cdot 2006}{6}} = \frac{167}{1338}$
- Ada satu bilangan genap dan dua lainnya ganjil

  $$\frac{{}_{1004}C_1 \cdot {}_{1004}C_2}{{}_{2008}C_3} = \frac{1004 \cdot \frac{1004 \cdot 1003}{2}}{\frac{2008 \cdot 2007 \cdot 2006}{6}} = \frac{502}{1338}$$

Peluang jumlah ketiga bilangan tersebut genap = $\frac{167}{1338} + \frac{502}{1338}$

∴ Peluang jumlah ketiga bilangan tersebut genap = $\frac{1}{2}$

18. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$10 = 4 + |B| - |A \cap B|$

$|B| - |A \cap B| = 6$

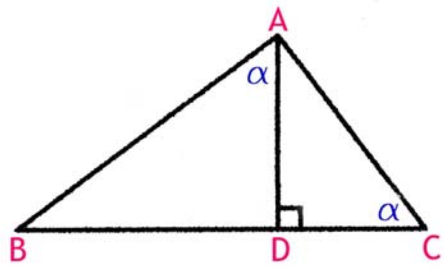
Jelas bahwa $0 \le |A \cap B| \le |A|$ sehingga $0 \le |A \cap B| \le 4$.

Jadi $6 \le |B| \le 10$

Karena $|B|$ bulat tak negatif maka $|B|$ = 6, 7, 8, 9 atau 10.

$\therefore$ $|B|$ = **6, 7, 8, 9 atau 10**.

19. Misalkan $\angle DAB = \angle ACD = \alpha$



ctg α = $\frac{AD}{BD} = \frac{CD}{AD}$

$\frac{6}{8} = \frac{CD}{6}$ sehingga CD = $\frac{9}{2}$

Luas segitiga ABC = ½ · (BD + CD) · AD = $\frac{75}{2}$

$\therefore$ Luas segitiga ABC = $\frac{75}{2}$

20. Dengan binom Newton didapat

$$4^{1004} = (3+1)^{1004} = \binom{1004}{0}3^0 + \binom{1004}{1}3^1 + \binom{1004}{2}3^2 + \cdots + \binom{1004}{1004}3^{1004} = \sum_{k=0}^{1004} 3^k \binom{1004}{k}$$

$\therefore$ $\sum_{k=0}^{1004} 3^k \binom{1004}{k}$ = $\mathbf{2^{2008}}$.

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2008

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2009

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Bagian Kedua

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN KEDUA

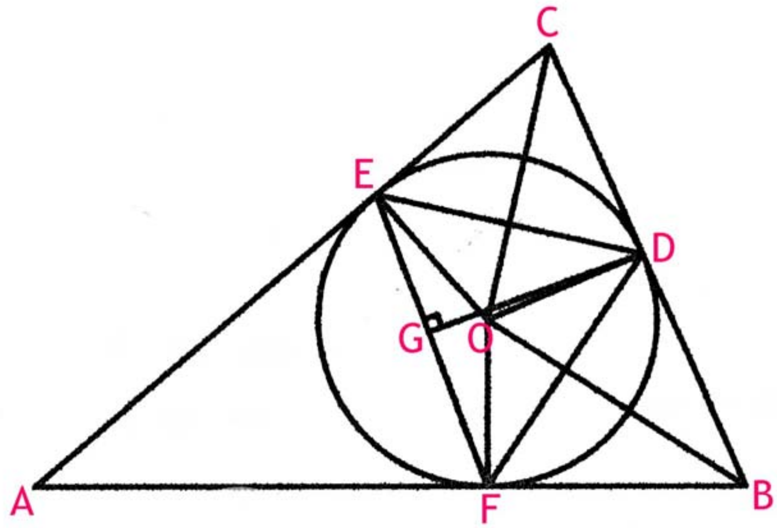
1. $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = 40$
   $x + x^2 + \cdots + x^n = 39$
   $x(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) = 39$
   Karena x dan n bilangan asli maka x merupakan faktor dari 39
   Nilai x yang mungkin memenuhi adalah 1, 3, 13 atau 39.
   - Jika x = 1 maka $1 + 1^2 + \cdots + 1^n = 39$.
     Jadi, n = 39
   - Jika x = 3
     Karena $x \neq 1$ maka $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = 40$
     Untuk x = 3 maka $3^{n+1} - 1 = 80$
     Nilai n yang memenuhi adalah n = 3.
   - Jika x = 13
     Karena $x \neq 1$ maka $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = 40$
     Untuk x = 13 maka $13^{n+1} - 1 = 480$
     $13^{n+1} = 481 = 13 \cdot 37$
     Karena 37 tidak habis dibagi 13 maka tidak ada n asli yang memenuhi.
   - Jika x = 39
     Karena $x \neq 1$ maka $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = 40$
     Untuk x = 39 maka $39^{n+1} - 1 = 1520$
     $39^{n+1} = 1521 = 39^2$
     Nilai n yang memenuhi adalah n = 1.

   $\therefore$ Semua pasangan bilangan asli (x, n) yang memenuhi adalah **(1, 39), (3, 3), (39, 1)**

2. Karena P(x) = 0 mempunyai 2008 selesaian real maka berlaku
   $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_{2008})$ dengan x_i semua real untuk i = 1, 2, ⋯, 2008.
   Karena $P(2008) \leq 1$ maka tidak mungkin semua $x_i < 2007$.
   $P(Q(x)) = P(x^2 + 2x + 2008)$
   $P(Q(x)) = (x^2 + 2x + 2008 - x_1)(x^2 + 2x + 2008 - x_2)\cdots(x^2 + 2x + 2008 - x_{2008}) = 0$
   Diskriminan $x^2 + 2x + 2008 - x_i$ adalah Diskriminan $= 4 - 4(2008 - x_i)$
   Diskriminan $= 4(x_i - 2007)$ untuk i = 1, 2, ⋯, 2008.
   Karena tidak semua $x_i < 2007$ maka akan terdapat x_k sehingga Diskriminan $= 4(x_i - 2007) \geq 0$.
   Karena diskriminan ≥ 0 maka terbukti ada sedikitnya 2 bilangan x real yang memenuhi P(Q(x))= 0

   $\therefore$ **Terbukti bahwa persamaan P(Q(x)) = 0 mempunyai selesaian real.**

3. Misalkan O adalah pusat lingkaran dalam segitiga ABC. Maka garis bagi dari B dan C akan melalui titik O.



Karena CO dan BO adalah garis bagi maka ∠ECO = ∠DCO dan ∠DBO = ∠FBO
Misalkan ∠ECO = ∠DCO = γ ·········· (1) dan ∠DBO = ∠FBO = β ·········· (2)
Jelas bahwa ∠CEO = ∠CDO = 90^o sehingga ∠EOD = $180^o - 2\gamma$ ························ (3)
Jelas juga bahwa ∠BDO = ∠BFO = 90^o sehingga ∠DOF = $180^o - 2\beta$ ························ (4)
Maka ∠EOF = 360^o − ∠EOD − DOF = $2(\gamma + \beta)$ ························ (5)
Segitiga EOF adalah segitiga sama kaki sehingga ∠OEF = ∠OFE = $90^o - (\gamma + \beta)$ ························ (6)

Lingkaran dalam menyinggung segitiga ABC di D, E dan F sehingga CE = CD dan BD = BF.
Karena CE = CD dan OE = OD maka segiempat CEOD adalah layang-layang. Jadi, CO ⊥ ED.
ED = 2 CE sin γ ······················ (7)
∠CED = $90^o - \gamma$ sehingga ∠OED = γ
∠GED = ∠OEF + ∠OED = $(90^o - (\gamma + \beta)) + (\gamma) = 90^o - \beta$ ·························· (8)
EG = ED cos ∠GED = (2 CE sin γ)(cos ($90^o - \beta$)

$$\frac{EG}{CE} = 2\sin\gamma\sin\beta \quad \cdots\cdots\cdots \quad (9)$$

Karena BD = BF dan OD = OF maka segiempat BDOF adalah layang-layang. Jadi, BO ⊥ DF.
DF = 2 BF sin β ······················ (10)
∠BFD = $90^o - \beta$ sehingga ∠OFD = β
∠GFD = ∠OFE + ∠OFD = $(90^o - (\gamma + \beta)) + (\beta) = 90^o - \gamma$ ·························· (11)
FG = DF cos ∠GFD = (2 BF sin β)(cos ($90^o - \gamma$)

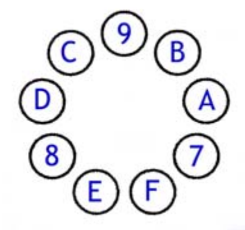
$$\frac{FG}{BF} = 2\sin\gamma\sin\beta \quad \cdots\cdots\cdots \quad (12)$$

Dari persamaan (9) dan (12) dapat disimpulkan bahwa $\frac{FG}{BF} = \frac{EG}{CE}$ sehingga $\frac{FG}{EG} = \frac{BF}{CE}$.

∴ **Terbukti bahwa** $\frac{FG}{EG} = \frac{BF}{CE}$

4. Alternatif 1 :

Andaikan bahwa tidak ada tiga bilangan berdekatan yang jumlahnya lebih besar dari 15.
Jika terdapat tiga bilangan dengan dua diantaranya adalah 7, 8 atau 9 maka ketiga bilangan tersebut akan memiliki jumlah lebih dari 15. Maka haruslah terdapat dua bilangan di antara 7, 8 dan 9. Kemungkinan susunan hanya ada 1, yaitu :



Rata-rata enam bilangan 1, 2, 3, 4, 5 dan 6 adalah 3,5.
Maka maks (A + B, C + D, E + F) $\geq$ 7.

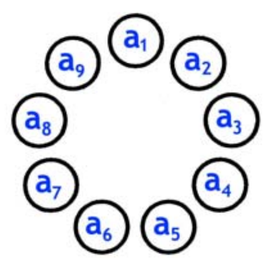
- Jika maks (A + B, C + D, E + F) = 7 maka A + B = C + D = E + F = 7
  Maka 9 jika dipasangkan dengan salah satu dari pasangan (A, B), (C, D) atau (E, F) akan membentuk tiga bilangan yang jumlahnya lebih dari 15. Kontradiksi dengan anggapan semula.
- Jika maks (A + B, C + D, E + F) > 7 maka maks (A + B, C + D, E + F) $\geq$ 8

Pasangan bilangan yang memiliki nilai maks tersebut pasti akan berdekatan dengan 8 atau 9 yang penjumlahan ketiga bilangan tersebut akan bernilai lebih besar dari 15. Kontradiksi dengan anggapan semula.

$\therefore$ **Terbukti bahwa ada tiga bilangan berdekatan yang jumlahnya lebih besar dari 15.**

Alternatif 2 :

Misalkan $a_i \in \{1, 2, 3, \cdots, 9\}$ untuk i = 1, 2, ⋯, 9.
Ke-9 bilangan a_i, i = 1, 2 ⋯, 9 disusun sebagai berikut.



Misalkan
$S_1 = a_1 + a_2 + a_3$
$S_2 = a_2 + a_3 + a_4$
$\vdots$
$S_9 = a_9 + a_1 + a_2$
Dengan demikian
$S_1 + S_2 + \cdots + S_9 = 3(a_1 + a_2 + \cdots + a_9) = 3 \cdot 45 = 135$
Karena $a_1 \neq a_4$ maka $S_1 \neq S_2$.
Andaikan tidak ada 3 bilangan berdekatan yang jumlahnya lebih besar dari 15, yaitu $S_i \leq 15$ untuk semua i = 1, 2, ⋯, 9.
Karena $S_1 \neq S_2$ maka S_1 atau S_2 kurang dari 15. Akibatnya
$S_1 + S_2 + \cdots + S_9 < 9 \times 15 = 135$. Kontradiksi.

$\therefore$ **Terbukti bahwa ada tiga bilangan berdekatan yang jumlahnya lebih besar dari 15.**

5. Sebuah bilangan akan habis dibagi 3 apabila penjumlahan angka-angkanya habis dibagi 3.
   Ada 4 angka/digit yang habis dibagi 3 dan masing-masing ada 3 angka/digit yang bersisa 1 atau 2 jika dibagi 3.
   Misalkan bilangan palindrom tersebut adalah abcba. Penjumlahan angka = 2(a + b) + c.
   Karena angka pertama tidak boleh 0 maka banyaknya cara memilih digit a $\equiv$ 0 (mod 3) hanya ada 3 kemungkinan.
   - Jika c $\equiv$ 0 (mod 3)
     Maka 2(a + b) $\equiv$ 0 (mod 3) sehingga a + b $\equiv$ 0 (mod 3)
     Tiga kemungkinan pasangan (a, b) adalah a $\equiv$ 0 (mod 3) dan b $\equiv$ 0 (mod 3), a $\equiv$ 1 (mod 3) dan b $\equiv$ 2 (mod 3) atau a $\equiv$ 2 (mod 3) dan b $\equiv$ 1 (mod 3)
     Banyaknya cara memilih digit c adalah 4.
     Maka banyaknya cara memilih bilangan palindrom jika c $\equiv$ 0 (mod 3) = $4 \cdot (3 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3)$
     Maka banyaknya cara memilih bilangan palindrom jika c $\equiv$ 0 (mod 3) = 120.
   - Jika c $\equiv$ 1 (mod 3)
     Maka 2(a + b) $\equiv$ 2 (mod 3) sehingga a + b $\equiv$ 1 (mod 3)
     Tiga kemungkinan pasangan (a, b) adalah a $\equiv$ 0 (mod 3) dan b $\equiv$ 1 (mod 3), a $\equiv$ 1 (mod 3) dan b $\equiv$ 0 (mod 3) atau a $\equiv$ 2 (mod 3) dan b $\equiv$ 2 (mod 3)
     Banyaknya cara memilih digit c adalah 3.
     Maka banyaknya cara memilih bilangan palindrom jika c $\equiv$ 1 (mod 3) = $3 \cdot (3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 3)$
     Maka banyaknya cara memilih bilangan palindrom jika c $\equiv$ 1 (mod 3) = 90.
   - Jika c $\equiv$ 2 (mod 3)
     Maka 2(a + b) $\equiv$ 1 (mod 3) sehingga a + b $\equiv$ 2 (mod 3)
     Tiga kemungkinan pasangan (a, b) adalah a $\equiv$ 0 (mod 3) dan b $\equiv$ 2 (mod 3), a $\equiv$ 1 (mod 3) dan b $\equiv$ 1 (mod 3) atau a $\equiv$ 2 (mod 3) dan b $\equiv$ 0 (mod 3)
     Banyaknya cara memilih digit c adalah 3.
     Maka banyaknya cara memilih bilangan palindrom jika c $\equiv$ 2 (mod 3) = $3 \cdot (3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4)$
     Maka banyaknya cara memilih bilangan palindrom jika c $\equiv$ 2 (mod 3) = 90.

   Banyaknya bilangan palindrom yang memenuhi adalah 120 + 90 + 90 = 300.
   $\therefore$ Banyaknya bilangan palindrom 5-angka yang habis dibagi 3 adalah **300**.

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2009

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2008

MAKASSAR (SULAWESI SELATAN), 8 – 14 AGUSTUS 2008

Bidang Matematika

Hari Pertama

Waktu : 4 Jam

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2008

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2008
8 – 14 AGUSTUS 2008
MAKASSAR, SULAWESI SELATAN

BIDANG : MATEMATIKA

HARI PERTAMA

WAKTU : 4 JAM

1. Diberikan segitiga ABC. Titik-titik D, E, dan F di luar segitiga ABC sedemikian sehingga segitiga ABD, segitiga BCE, dan segitiga CAF adalah segitiga sama sisi. Buktikan bahwa ketiga lingkaran luar segitiga tersebut berpotongan di satu titik.

2. Buktikan bahwa untuk x dan y bilangan real positif, berlaku
$$\frac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\sqrt{y}\right)^2}\geq\frac{2}{x+y+2}$$

3. Carilah semua bilangan asli yang dapat dinyatakan dalam bentuk
$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}$$
untuk suatu a, b, dan c bilangan asli dengan
FPB (a, b) = FPB (b, c) = FPB (c, a) = 1

4. Misalkan A = {1, 2, ···, 2008}
   (a) Tentukan cacah subhimpunan dari A yang hasilkali semua anggotanya habis dibagi 7.
   (b) Misalkan N(i) menyatakan cacah subhimpunan dari A yang jumlah semua anggotanya bersisa I jika dibagi 7. Buktikan bahwa
$$\sum_{i=0}^{7}(-1)^i N(i)=0$$

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2009

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2008

MAKASSAR (SULAWESI SELATAN), 8 – 14 AGUSTUS 2008

Bidang Matematika

Hari Kedua

Waktu : 4 Jam

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2008

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2008
8 – 14 AGUSTUS 2008
MAKASSAR, SULAWESI SELATAN

BIDANG : MATEMATIKA

HARI KEDUA

WAKTU : 4 JAM

5. Misalkan m, n > 1 bilangan-bilangan bulat sedemikian hingga n membagi $4^m - 1$ dan 2^m membagi $n - 1$. Haruskah $n = 2^m + 1$? Jelaskan.

6. Ada 21 orang berhubungan secara rahasia dengan menggunakan frekuensi gelombang radio yang berbeda. Ada pasangan dua orang yang dapat berhubungan, mungkin ada yang tidak dapat. Setiap pasang yang berhubungan hanya menggunakan satu frekuensi tertentu yang berbeda dengan frekuensi yang digunakan pasangan lain. Setiap tiga orang selalu ada dua orang di antaranya yang tidak dapat berhubungan. Tentukan banyak maksimum frekuensi berbeda yang diperlukan dan jelaskan.

7. Diberikan segitiga ABC dengan panjang sisi-sisinya a, b, dan c. Garis-garis singgung lingkaran dalam segitiga ABC yang sejajar dengan sisi-sisi segitiga ABC membentuk tiga segitiga kecil. Pada masing-masing segitiga kecil dibuat lingkaran dalam. Buktikan bahwa jumlah luas dari lingkaran dalam segitiga ABC dan ketiga lingkaran dalam segitiga kecil adalah
$$\frac{\pi\left(a^2+b^2+c^2\right)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{(a+b+c)^3}$$

8. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ yang memenuhi
$$f(mn) + f(m + n) = f(m)f(n) + 1$$
untuk semua $m, n \in \mathbb{N}$.

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2009

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2008

MAKASSAR (SULAWESI SELATAN), 8 – 14 AGUSTUS 2008

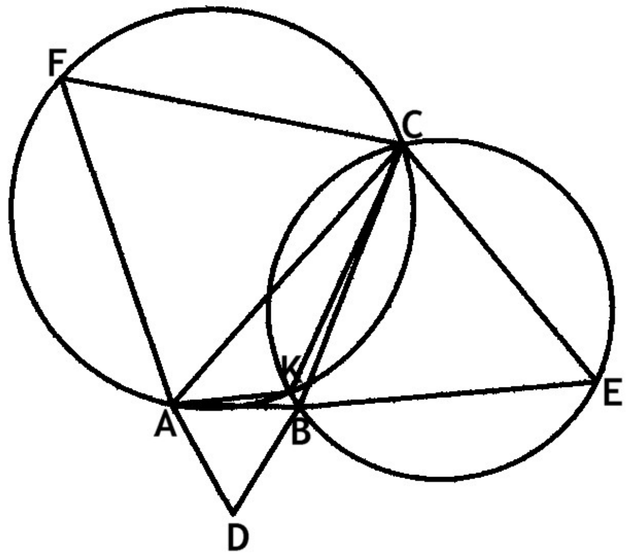
Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

1. Misalkan lingkaran luar ΔACF dan lingkaran luar ΔBCE berpotongan di titik C dan K.



Karena terletak pada satu lingkaran, segi empat AKCF adalah segiempat tali busur.
Maka ∠AKC = 180° − ∠AFC = 120°.
Karena terletak pada satu lingkaran, segi empat BKCE adalah segiempat tali busur.
Maka ∠BKC = 180° − ∠BEC = 120°.
Jadi, ∠AKB = 360° − ∠AKC − ∠BKC = 120°.
Karena ∠AKB + ∠ADB = 120° + 60° = 180° maka segiempat BKAD adalah segiempat talibusur.
Jadi ada sebuah lingkaran yang melalui titik D, B, K dan A.

Maka lingkaran luar ΔACF, lingkaran luar ΔBCE dan lingkaran luar ΔABD melalui titik K.
∴ Terbukti bahwa ketiga lingkaran luar segitiga ACF, BCE dan ABD berpotongan di satu titik

2. Alternatif 1 :
Dengan AM-GM maka

$$x+1 \geq 2\sqrt{x}$$

$$y+1 \geq 2\sqrt{y}$$

$$x+y+2 = \frac{x+y+2+(x+1)+(y+1)}{2} \geq \frac{x+y+2+2\sqrt{x}+2\sqrt{y}}{2} = \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2+\left(1+\sqrt{y}\right)^2}{2}$$

Dengan AM-HM maka

$$x+y+2 \geq \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2+\left(1+\sqrt{y}\right)^2}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\sqrt{y}\right)^2}}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\sqrt{y}\right)^2} \geq \frac{2}{x+y+2} \quad \text{(terbukti)}$$

Alternatif 2 :

Dengan ketaksamaan AM-GM didapat

$x+1 \ge 2\sqrt{x}$ .... (1)

Tanda kesamaan terjadi jika x = 1

$\left(1+\sqrt{x}\right)^2 = 1+2\sqrt{x}+x \le 2(x+1)$ maka

$\frac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2} \ge \frac{1}{2(x+1)}$ .... (2)

Dengan cara yang sama didapat

$\frac{1}{\left(1+\sqrt{y}\right)^2} \ge \frac{1}{2(y+1)}$ .... (3) maka

$$\frac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+\sqrt{y}\right)^2} \ge \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}\right)$$

Dengan ketaksamaan AM-HM didapat

$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1} \ge \frac{4}{x+1+y+1} = \frac{4}{x+y+2}$ maka

$\therefore \quad \frac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+\sqrt{y}\right)^2} \ge \frac{2}{x+y+2}$ (terbukti)

3. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan a = maks (a, b, c)

Misalkan juga $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}$ = k untuk suatu bilangan asli k.

$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b} = \frac{ab(a+b)+ac(a+c)+bc(b+c)}{abc}$ = k untuk suatu bilangan asli k.

Karena c | ac(a + c) + bc(b + c) maka c | ab(a + b)

Karena FPB(a, c) = FPB(b, c) = 1 maka c | (a + b)

Dengan cara yang sama didapat

b | (a + c)

a | (b + c)

Karena b ≤ a dan c ≤ a maka a ≤ b + c ≤ 2a

- Kasus 1, b + c = a

  Karena b | (a + c) maka b | 2a − b

  Jadi b | 2a

  Karena FPB(a, b) = 1 maka b | 2.

  Jadi, b = 1 atau 2

  Karena c | (a + b) maka c | 2a − c

  Jadi c | 2a

  Karena FPB(a, c) = 1 maka c | 2.

  Jadi, c = 1 atau 2

- Jika b = 1 dan c = 1 maka a = 2
  $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}=7$
- Jika b = 1 dan c = 2 atau b = 2 dan c = 1 maka a = 3
  $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}=8$
- Jika b = 2 dan c = 2 tidak memenuhi bahwa FPB(b, c) = 1

• Kasus 2, b + c = 2a
Kesamaan hanya terjadi jika a = b dan a = c.
Karena FPB(a, b) = FPB(a, c) = FPB(b, c) = 1 maka a = b = c = 1
$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}=6$

$\therefore$ Nilai dari $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}$ adalah **6, 7 atau 8**.

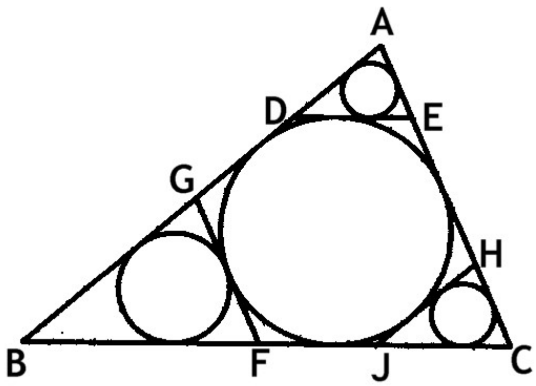
4. A = {1, 2, ⋯, 2008}
(a) Karena cacah anggota A sebanyak 2008 maka cacah subhimpunan A = 2^{2008}.
Jika suatu himpunan memiliki anggota yang merupakan kelipatan 7 maka hasil kali semua anggotanya merupakan kelipatan 7. Jadi agar hasil kali semua anggota dari suatu himpunan tidak habis dibagi 7 maka anggotanya tidak ada yang merupakan kelipatan 7.
Banyaknya anggota A yang merupakan kelipatan 7 ada 286, yaitu 7, 14, 28, ⋯, 2002.
Jadi cacah subhimpunan dari A yang hasilkali anggotanya habis dibagi 7 adalah $2^{2008} - 2^{2008-286}$
$\therefore$ Cacah subhimpunan dari A yang hasilkali anggotanya habis dibagi 7 adalah $\mathbf{2^{2008} - 2^{1722}}$.

(b) Misalkan $x_i \in A$ maka $2009 - x_i \in A$.
Akan dibuktikan bahwa jika ada sebanyak k bilangan yang merupakan anggota A yang memenuhi jumlah k bilangan tersebut bersisa i jika dibagi 7 maka ada sebanyak k bilangan yang juga merupakan anggota A dan memenuhi jumlah k bilangan tersebut akan bersisa 7 − i jika dibagi 7.
Misalkan ada sebanyak k bilangan yang merupakan anggota A dan memenuhi
$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = 7p + i$ untuk suatu bilangan asli p.
$(2009 - x_1) + x_1 + (2009 - x_2) + x_2 + \cdots + (2009 - x_k) + x_k = 2009k = 7m$ untuk suatu $m \in$ asli.
$(2009 - x_1) + (2009 - x_2) + \cdots + (2009 - x_k) = 7n + 7 - i$ untuk suatu bilangan asli n.
Jadi ada k bilangan $2009 - x_i$ untuk i = 1, 2, ⋯, k yang memenuhi jumlah k bilangan tersebut bersisa 7 − i jika dibagi 7.
Terbukti bahwa N(i) = N(7 − i)
$$\sum_{i=0}^{7}(-1)^i N(i) = N(0) - N(1) + N(2) - N(3) + N(4) - N(5) + N(6) - N(7) = 0$$
$\therefore$ Terbukti bahwa $\sum_{i=0}^{7}(-1)^i N(i) = 0$

5. Karena $2^m \mid n - 1$ maka $n = k \cdot 2^m + 1$ untuk suatu bilangan asli k.
   Karena $n \mid 4^m - 1$ maka $n \le 4^m - 1$
   $k \cdot 2^m + 1 \le 4^m - 1 < 4^m + 1$
   Maka $k < 2^m$ .... (1)
   Karena $n \mid 4^m - 1$ maka $n \mid (4^m - 1) \cdot k^2 = (k \cdot 2^m)^2 - k^2$.
   Sehingga $n \mid (n - 1)^2 - k^2 = n^2 - 2n + 1 - k^2$.
   Karena $n \mid n^2 - 2n$ maka $n \mid k^2 - 1$. Jadi, $n \le k^2 - 1$ untuk $k \ne 1$ .... (2)
   $n \le k^2 - 1 < k^2 < k \cdot 2^m < k \cdot 2^m + 1 = n$ kontradiksi untuk $k \ne 1$.
   Jika k = 1 maka $n = 2^m + 1$ yang memenuhi $2^m \mid n - 1$ dan $n \mid 4^m - 1$.
   $\therefore$ Jadi, **haruslah $n = 2^m + 1$**.

6. Misalkan terdapat 3 orang di antaranya , yaitu A, B dan C dan memiliki hubungan tepat ada dua frekuensi di antara mereka dan yang berhubungan adalah AB dan AC.
   Tentunya kita dapat membagi ketiga orang ini menjadi dua kelompok, misalkan A kelompok merah serta B dan C pada kelompok putih sehingga ketiganya hanya berhubungan jika berbeda kelompok.
   Misalkan juga D berhubungan dengan A maka tentunya A tidak dapat berhubungan C sehingga A dapat dimasukkan ke dalam kelompok yang berbeda dengan A.
   Misalkan juga E berhubungan dengan C maka tentunya E dapat berhubungan dengan B tetapi tidak dapat berhubungan dengan A sehingga E dapat dimasukkan ke dalam kelompok yang sama dengan A.
   Jadi, kita dapat membagi 21 orang tersebut ke dalam dua kelompok sehingga yang dapat berhubungan hanya jika berbeda kelompok.
   Misalkan banyaknya anggota masing-masing kelompok adalah k dan 21 − k.
   Banyaknya frekuensi yang mungkin = $k(21 - k) = \frac{21^2}{4} - \left(k - \frac{21}{2}\right)^2$
   Karena k bilangan asli Maka banyaknya frekuensi akan maksimal adalah jika k = 10 atau 11.
   $\therefore$ Banyaknya maksimum frekuensi berbeda yang diperlukan = $10 \cdot 11$ = **110**.

7. Perhatikan gambar !



   Karena DE sejajar BC maka ΔADE sebangun dengan ΔABC.

Misalkan jari-jari lingkaran dalam ΔABC = r, jari-jari lingkaran dalam ΔADE = r_1, jari-jari lingkaran dalam ΔBFG = r_2 dan jari-jari lingkaran dalam ΔCHJ = r_3.
Misalkan juga jarak dari A ke BC = t_A dan jarak dari A ke DE = t_1.
Misalkan s = ½ (a + b + c).

Luas ΔABC = $\frac{1}{2}r(a+b+c) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

$$r = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2(a+b+c)}$$

$$\frac{1}{2}t_A a = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$t_A = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2a}$$

Karena jarak dari A ke DE = t_1 maka $t_1 = t_A - 2r$

Karena ΔADE sebangun dengan ΔABC maka perbandingan sisi juga merupakan perbandingan garis tinggi kedua segitiga.

$$\frac{AD}{c} = \frac{AE}{b} = \frac{DE}{a} = \frac{r_1}{r} = \frac{t_1}{t_A} = \frac{t_A - 2r}{t_A}$$

Dengan rumus luas ΔABC maka $\frac{r}{t_A} = \frac{a}{a+b+c}$ sehingga $\frac{r_1}{r} = 1 - \frac{2a}{a+b+c} = \frac{b+c-a}{a+b+c}$

$$r_1 = \frac{b+c-a}{a+b+c}r$$

Dengan cara yang sama didapat

$$r_2 = \frac{a+c-b}{a+b+c}r$$

$$r_3 = \frac{a+b-c}{a+b+c}r$$

Misalkan jumlah luas dari lingkaran dalam segitiga ABC dan ketiga lingkaran dalam segitiga kecil adalah L.

$$L = \pi\left(r^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2\right) = \pi\left(\frac{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{4(a+b+c)}\right)\left(\frac{(a+b+c)^2 + (b+c-a)^2 + (a+c-b)^2 + (a+b-c)^2}{(a+b+c)^2}\right)$$

Misalkan P = $(a + b + c)^2 + (b + c - a)^2 + (a + c - b)^2 + (a + b - c)^2$

P = $(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc) + (a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc) + (a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc) + (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc)$

P = $4a^2 + 4b^2 + 4c^2$

$$L = \pi\frac{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{4(a+b+c)^3}\left(4a^2 + 4b^2 + 4c^2\right)$$

$$L = \frac{\pi\left(a^2 + b^2 + c^2\right)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{(a+b+c)^3}$$

$\therefore$ Terbukti bahwa jumlah luas dari lingkaran dalam segitiga ABC dan ketiga lingkaran dalam segitiga kecil adalah $\frac{\pi\left(a^2 + b^2 + c^2\right)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{(a+b+c)^3}$

8. Jika m = n = 1 maka f(1) + f(2) = f(1)f(1) + 1 .... (1)
Jika m = 1 dan n = 2 maka f(2) + f(3) = f(1)f(2) + 1 .... (2)
Jika m = n = 2 maka 2f(4) = f(2)f(2) + 1 .... (3)
Jika m = 1 dan n = 3 maka f(3) + f(4) = f(1)f(3) + 1 .... (4)
Misalkan f(1) = a, f(2) = b, f(3) = c dan f(4) = d serta subtitusikan persamaan (2) dan (3) ke (4).

$$(ab+1-b)+\left(\frac{b^2+1}{2}\right)=a(ab+1-b)+1$$

$2ab + 2 - 2b + b^2 + 1 = 2a^2b + 2a - 2ab + 2$
$2a^2b - b^2 - 4ab + 2a + 2b - 1 = 0$ .... (5)
Dari persamaan (1) didapat
$a + b = a^2 + 1$ .... (6)
$2a^2(a^2 - a + 1) - (a^2 - a + 1)^2 - 4a(a^2 - a + 1) + 2a + 2(a^2 - a + 1) - 1 = 0$
$(2a^4 - 2a^3 + 2a^2) - (a^4 + a^2 + 1 - 2a^3 + 2a^2 - 2a) - (4a^3 - 4a^2 + 4a) + 2a + (2a^2 - 2a + 2) - 1 = 0$
$(2a^4 - 2a^3 + 2a^2) - (a^4 - 2a^3 + 3a^2 - 2a + 1) - (4a^3 - 4a^2 + 4a) + 2a + (2a^2 - 2a + 2) - 1 = 0$
$a^4 - 4a^3 + 5a^2 - 2a = 0$
$a(a - 1)^2(a - 2) = 0$
Karena f : N → N maka nilai f(1) yang mungkin memenuhi hanya 1 atau 2.

- Jika f(1) = 1
  Untuk n = 1 maka f(m) + f(m + 1) = f(m)f(1) + 1
  Karena f(1) = 1 maka f(m + 1) = 1
  Jadi, f(x) = 1 untuk $x \in N$.
  Jika f(x) = 1 untuk $x \in N$ maka f(mn) + f(m + n) = 2 dan f(m)f(n) + 1 = 2. Memenuhi.
- Jika f(1) = 2
  Untuk n = 1 maka f(m) + f(m + 1) = f(m)f(1) + 1
  Karena f(1) = 2 maka f(m + 1) = f(m) + 1
  Jika m = 1 maka f(2) = f(1) + 1

  Jika m = 2 maka f(3) = f(2) + 1
  Jika m = 3 maka f(4) = f(3) + 1
  $\vdots$
  Jika m = x − 1 untuk $x \in N$ maka f(x) = f(x − 1) + 1
  Jumlahkan seluruh persamaan didapat :
  f(x) = f(1) + x − 1
  Karena f(1) = 2 maka f(x) = x + 1
  Jadi, f(x) = x + 1 untuk $x \in N$.
  Jika f(x) = x + 1 untuk $x \in N$ maka f(mn) + f(m + n) = mn + 1 + m + n + 1 = (m + 1)(n + 1) + 1 dan f(m)f(n) + 1 = (m + 1)(n + 1) + 1. Memenuhi.

∴ Semua fungsi f : N → N yang memenuhi adalah f(x) = 1 dan f(x) = x + 1 untuk $x \in N$.