SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA TAHUN 2007

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2008

Bidang Matematika

Waktu : 3,5 Jam

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2007

OLIMPIADE MATEMATIKA NASIONAL
SELEKSI TINGKAT KOTA/KABUPATEN
TAHUN 2007

Bagian Pertama

Pilih satu jawaban yang benar. Dalam hal terdapat lebih dari satu jawaban yang benar, pilih jawaban yang paling baik.

1. Jika $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan bilangan real x, maka $\left\lfloor \sqrt{3} - \sqrt{5} \right\rfloor^2$ =
   A. –1 B. 0 C. 1 D. 9 E. 81

2. Bilangan $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ merupakan bilangan
   A. bulat negatif B. bulat positif C. pecahan
   D. irrasional positif E. irrasional negatif

3. Banyaknya soal yang dikerjakan Amin hari ini bertambah tepat 40% dibandingkan dengan yang dikerjakannya kemarin.Banyaknya soal yang dikerjakan Amin hari ini paling sedikit ada
   A. 5 B. 6 C. 7 D. 8 E. tidak bisa ditentukan

4. Misalkan H adalah himpunan semua faktor positif dari 2007.Banyaknya himpunan bagian dari H yang tidak kosong adalah
   A. 6 B. 31 C. 32 D. 63 E. 64

5. Misalkan N sebuah bilangan asli dua-angka dan M adalah bilangan asli yang diperoleh dengan mempertukarkan kedua angka N.Bilangan prima yang selalu habis membagi N – M adalah
   A. 2 B. 3 C. 7 D. 9 E. 11

6. Sebuah sampel diperoleh dari lima pengamatan. Jika rataan hitung(mean) sampel sama dengan 10 dan median sampel sama dengan 12, maka nilai terkecil jangkauan sampel sama dengan
   A. 2 B. 3 C. 5 D. 7 E. 10

7. Peluang menemukan di antara tiga orang ada paling sedikit dua orang yang lahir dalam bulan yang sama adalah
   A. $\frac{17}{72}$ B. $\frac{33}{72}$ C. $\frac{39}{72}$ D. $\frac{48}{72}$ E. $\frac{55}{72}$

8. Keliling sebuah segitiga adalah 8. Jika panjang sisi-sisinya adalah bilangan bulat,maka luas segitiga tersebut sama dengan
   A. $2\sqrt{2}$ B. $\frac{16}{9}\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{3}$ D. 4 E. $4\sqrt{2}$

9. Sepotong kawat dipotong menjadi 2 bagian,dengan perbandingan panjang 3:2. Masing-masing bagian kemudian dibentuk menjadi sebuah persegi. Perbandingan luas kedua persegi adalah
   A. 4 : 3 B. 3 : 2 C. 5 : 3 D. 9 : 4 E. 5 : 2

10. Untuk setiap bilangan real x berlaku $\dfrac{\tan^2 x + \cos^2 x}{\sin x + \sec x} =$
   A. sec x + sin x B. sec x – sin x C. cos x + csc x
   D. cos x – csc x E. cos x + sin x

Bagian Kedua

Isikan hanya jawaban saja pada tempat yang disediakan

11. Misalkan f(x) = 2x - 1, dan g(x) = $\sqrt{x}$. Jika f(g(x)) = 3, maka x = ·····

12. Pengepakan buah “Drosophila” akan mengemas 44 apel ke dalam beberapa kotak. Ada dua jenis kotak yang tersedia, yaitu kotak untuk 10 apel dan kotak untuk 6 apel. Banyak kotak yang diperlukan adalah ······

13. Semua pasangan bilangan bulat (x,y) yang memenuhi x + y = xy – 1 dan x ≤ y, adalah ····

14. Jika n adalah bilangan asli sehingga 3^n adalah faktor dari 33!, maka nilai n terbesar yang mungkin adalah ····

15. Sebuah ruas garis mulai dari titik $\left(3, 2\frac{1}{5}\right)$ dan berakhir di $\left(99, 68\frac{3}{5}\right)$. Banyaknya titik dengan koordinat bilangan bulat yang dilalui garis tersebut adalah ······

16. Pada segitiga PQR samasisi diberikan titik-titik S dan T yang terletak berturut-turut pada sisi QR dan PR demikian rupa,sehingga ∠SPR = 40° dan ∠TQR = 35°. Jika titik X adalah perpotongan garis-garis PS dan QT,maka ∠SXT = ·········

17. Pada segitiga ABC yang siku-siku di C, AE dan BF adalah garis-garis berat (median). Maka $\dfrac{|AE|^2 + |BF|^2}{|AB|^2}$ = ······

18. Diketahui empat titik pada bidang dengan koordinat A(1,0), B(2008,2007), C(2007,2007), D(0,0). Luas jajaran genjang ABCD sama dengan ······

19. Sebuah lingkaran berjari-jari 1. Luas maksimal segitiga samasisi yang dapat dimuat di dalam lingkaran adalah ······

20. Sebuah daerah persegi dibagi menjadi 2007 daerah kecil dengan menarik garis-garis lurus yang menghubungkan dua sisi berbeda pada persegi. Banyak garis lurus yang harus ditarik paling sedikit ada ·····

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA 2007

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2008

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN PERTAMA

1. (Jawaban : C)
$\sqrt{3} \approx 1{,}7 \quad ; \quad \sqrt{5} \approx 2{,}2$
$\sqrt{3} - \sqrt{5} \approx -0{,}5$ sehingga $\lfloor \sqrt{3} - \sqrt{5} \rfloor = -1$. Maka $\lfloor \sqrt{3} - \sqrt{5} \rfloor^2 = 1$
$\therefore \lfloor \sqrt{3} - \sqrt{5} \rfloor^2 =$ **1**

2. (Jawaban : B)
Misalkan $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = X$
$X^3 = \left(\sqrt{5}+2\right) - \left(\sqrt{5}-2\right) - 3\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} + \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)$
$X^3 = 4 - 3\left(\sqrt[3]{5-4}\right)(X)$
$X^3 + 3X - 4 = 0$
$(X - 1)(X^2 + X + 4) = 0$
Akar-akar persamaan $X^2 + X + 4 = 0$ tidak real. Maka X = 1
$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = 1$
$\therefore \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ merupakan bilangan **bulat positif**.

3. (Jawaban : C)
Misalkan banyaknya soal yang dikerjakan Amin kemarin y maka banyaknya soal yang dikerjakan hari ini adalah n = $\frac{7}{5}$y dengan y dan n keduanya asli.
$\frac{n}{y} = \frac{7}{5}$
Maka y = 5k dan n = 7k untuk suatu bilangan asli k.
Nilai n terkecil adalah saat k = 1 sehingga n = 7
$\therefore$ Banyaknya soal yang dikerjakan Amin hari ini paling sedikit ada **7.**

4. (Jawaban : D)
$2007 = 3^2 \cdot 223^1$
Banyaknya faktor positif dari 2007 adalah (2 + 1)(1 + 1) = 6
Banyaknya himpunan bagian tak kosong dari H adalah $2^6 - 1 = 63$.
$\therefore$ Banyaknya himpunan bagian tak kosong dari H adalah $2^6 - 1 =$ **63.**

5. (Jawaban : B)
Misalkan N = 10a + b maka M = 10b + a
N – M = 9(a – b) sehingga $9 \mid (N - M)$
$\therefore$ Maka bilangan prima yang selalu membagi N – M adalah **3.**

6. (Jawaban : C)
Misalkan bilangan tersebut adalah $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4 \le x_5$.
Maka $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 50$ dan $x_3 = 12$.
Agar jangkauan minimal maka x_5 harus sekecil mungkin dan x_1 harus sebesar mungkin.
Jelas bahwa $x_1 < 10$ dan $x_5 \ge 12$.
Jika $x_1 = x_2 = 9$ maka $x_4 + x_5 = 20$. Tidak mungkin $x_5 \ge x_4 \ge 12$.
Jika $x_5 = x_4 = 12$ maka $x_1 + x_2 = 36$. Nilai terbesar x_1 adalah saat $x_1 = x_2 = 7$.
Kelima bilangan tersebut adalah 7, 7, 12, 12, 12.
∴ Jangkauan = 12 − 7 = **5.**

7. (Jawaban : A)
Alternatif 1 :
Misalkan A adalah kejadian sedikitnya 2 dari 3 orang lahir pada bulan yang sama. Maka A' adalah kejadian 3 orang lahir pada bulan yang berbeda.
Banyaknya kemungkinan tripel 3 orang lahir adalah 12x12x12 kemungkinan.
Banyaknya 3 orang lahir pada bulan yang berbeda adalah 12x11x10
$$p(A') = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{12\cdot 12\cdot 12} = \frac{55}{72}$$
Maka $p(A) = 1 - \frac{55}{72} = \frac{17}{72}$
Alternatif 2 :
Banyaknya kemungkinan tripel 3 orang lahir adalah 12x12x12 kemungkinan.
Banyaknya kemungkinan tepat 2 dari 3 orang lahir pada bulan yang sama = ${}_3C_2$ x 12x1x11 = 3x12x1x11
Banyaknya kemungkinan tepat 3 dari 3 orang lahir pada bulan yang sama = ${}_3C_3$ x 12x1x1 = 1x12x1x1
Peluang paling sedikit dua orang lahir dalam bulan yang sama = $\frac{3x\,12x\,1x\,11 + 1x\,12x\,1x\,1}{12x\,12x\,12} = \frac{17}{72}$
∴ Peluang di antara tiga orang ada paling sedikit dua orang lahir dalam bulan yang sama = $\frac{17}{72}$

8. (Jawaban : A)
a + b + c = 8 dengan a, b, dan c semuanya bilangan asli.
Syarat : panjang salah satu sisi selalu kurang dari jumlah kedua sisi yang lain, Dengan memperhatikan syarat tersebut maka panjang sisi-sisi segitiga yang memenuhi adalah 2, 3, 3.
s = ½ (a + b + c) = 4
Dengan rumus Heron, Luas Δ = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ = 2√2
∴ Luas Δ = **2√2**

9. (Jawaban : D)
Misalkan panjang kawat semula 20a maka kawat akan terbagi dua dengan panjang 12a dan 8a.
Panjang sisi persegi pertama = 3a dan panjang sisi persegi kedua = 2a.
Perbandingan luas = $3^2 : 2^2 = 9 : 4$.
∴ Perbandingan luas kedua persegi adalah **9 : 4**.

10. (Jawaban : B)

$$\frac{\tan^2 x + \cos^2 x}{\sin x + \sec x} = \frac{\sec^2 x - 1 + 1 - \sin^2 x}{\sin x + \sec x} = \frac{\sec^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \sec x} = \sec x - \sin x$$

$\therefore \quad \dfrac{\tan^2 x + \cos^2 x}{\sin x + \sec x} = \sec x - \sin x$

BAGIAN KEDUA

11. $f\left(\sqrt{x}\right) = 3$

    $2\sqrt{x} - 1 = 3$

    $\therefore$ x = **4**

12. Misalkan banyaknya keranjang berisi 10 apel = x dan keranjang berisi 6 apel = y dengan x dan y keduanya bulat tak negatif.
    Maka 10x + 6y = 44 sehingga 5x + 3y = 22
    $5x \le 22$
    Nilai x yang mungkin adalah 0, 1, 2, 3 atau 4.
    Setelah dicek satu-satu, nilai x yang memenuhi hanya x = 2 yang membuat y = 4
    Maka x + y = 6
    $\therefore$ Banyak kotak yang diperlukan adalah **6**

13. xy − x − y − 1 = 0 sehingga (x − 1)(y − 1) = 2
    Maka $(x - 1) \mid 2$. Nilai x − 1 yang mungkin adalah −1, 1, −2, 2
    Untuk x − 1 = −1 maka x = 0 dan y = −1
    Untuk x − 1 = 1 maka x = 2 dan y = 3
    Untuk x − 1 = −2 maka x = −1 dan y = 0
    Untuk x − 1 = 2 maka x = 3 dan y = 2
    Setelah dicek satu-satu pasangan (x, y) yang memenuhi persamaan dan berlaku $x \le y$ adalah (−1, 0) dan (2, 3)
    $\therefore$ Semua pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi adalah **(−1, 0), (2, 3)**

14. Alternatif 1 :

    n terbesar = $\left\lfloor \frac{33}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{33}{3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{33}{3^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{33}{3^4} \right\rfloor + \cdots$

    n terbesar = 11 + 3 + 1 + 0 + 0 + ⋯
    n terbesar = 15

    Alternatif 2 :

    Bilangan dari 1 sampai dengan 33 yang memiliki faktor 3 ada 11 yaitu 3, 6, 9, 12, 15, 18, ⋯, 33
    Di antara 11 bilangan tersebut yang habis dibagi 3^3 = 27 ada 1 yaitu 27.

Di antara 11 bilangan tersebut yang habis dibagi $3^2 = 9$ tetapi tidak habis dibagi $3^3 = 27$ ada 2 yaitu 9, 18.
Sisanya adalah 8 bilangan yang habis dibagi 3 tetapi tidak habis dibagi 9 maupun 27.
Maka nilai n terbesar yang membagi 33! = 3x1 + 2x2 + 1x8 = 15.
$\therefore$ Nilai n terbesar yang mungkin adalah **15**.

15. Persamaan garis yang melalui $\left(3, 2\frac{1}{5}\right)$ dan $\left(99, 68\frac{3}{5}\right)$ adalah 120y = 83x + 15.
    15(8y − 1) = 83x
    Karena 15 tidak membagi 83 maka 15 membagi x.
    Nilai x yang mungkin adalah 15, 30, 45, 60, 75 atau 90.
    Setelah dicek satu-satu maka nilai x bulat yang memenuhi y juga bulat hanyalah x = 75 yang membuat y = 52
    $\therefore$ Banyaknya titik dengan koordinat bilangan bulat yang dilalui garis tersebut adalah **1.**

16. Pada ΔQRT berlaku $\angle RTQ = 180^o - 60^o - 35^o = 85^o$
    Pada ΔPRS berlaku $\angle PSR = 180^o - 60^o - 40^o = 80^o$
    Pada segiempat RSXT berlaku $360^o = 60^o + \angle RTQ + \angle PSR + \angle SXT$
    $\angle SXT = 135^o$.
    $\therefore$ $\angle SXT$ = **135^o.**

17. Misalkan AC = b dan BC = a maka $AB^2 = a^2 + b^2$
    $AE^2 = (0{,}5a)^2 + b^2$ dan $BF^2 = a^2 + (0{,}5b)^2$
    $AE^2 + BF^2 = 1{,}25(a^2 + b^2)$
    $\therefore \quad \frac{AE^2 + BF^2}{AB^2} = \frac{5}{4}$

18. Diketahui A = (1, 0), B(2008, 2007), C(2007, 2007) dan D(0, 0)
    Alternatif 1 :
    Misalkan E(0, 2007) dan F(2008, 0)
    Luas jajaran genjang = Luas persegi panjang DFBE − Luas ΔDCE − Luas ΔAFB.
    Luas jajaran genjang = 2008 · 2007 − ½ · 2007 · 2007 − ½ · 2007 · 2007 = 2007
    Alternatif 2 :
    Panjang alas = $|DA|$ = 1
    Tinggi = 2007 − 0 = 2007
    Luas jajaran ganjang = alas x tinggi
    Luas jajaran genjang = 2007
    $\therefore$ Luas jajaran genjang = **2007**

19. Misalkan segitiga tersebut adalah ΔABC. Agar luas segitiga maksimum maka ketiga titik sudut segitiga sama sisi tersebut harus terletak pada lingkaran.

$R = \frac{abc}{4[ABC]}$ dengan [ABC] menyatakan luas segitiga ABC.

Karena ΔABC sama sisi maka abc = a^3

$1 = \frac{a^3}{2a^2 \sin 60^\circ}$

$a = \sqrt{3}$

Luas ΔABC = ½ a^2 sin 60^o

∴ Luas ΔABC = $\frac{3}{4}\sqrt{3}$

20. Misalkan r_n adalah banyaknya region maksimal yang terjadi akibat terdapat n buah garis lurus. Banyaknya region akan maksimal apabila tidak ada sedikitnya dua garis sejajar dan tidak ada sedikitnya tiga garis yang bertemu di satu titik.

Jelas bahwa r_0 = 1, r_1 = 2, r_2 = 4, r_3 = 7, r_4 = 11 dan seterusnya.

Ini dirumuskan dengan $r_n = r_{n-1} + n$

$r_2 - r_1 = 2$

$r_3 - r_2 = 3$

$r_4 - r_3 = 4$

⋮

$r_n - r_4 = n$

Jumlahkan semua persamaan didapat :

$r_n - r_1 = \frac{n-1}{2}(2+n)$

Karena r_1 = 2 maka $r_n = \frac{n^2+n+2}{2}$

Jika n = 62 maka r_n = 1954 < 2007

Jika n = 63 maka r_n = 2017 > 2007

Maka banyaknya garis minimal adalah 63.

∴ Banyaknya garis lurus yang harus ditarik paling sedikit ada **63.**

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2007

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2008

Bidang Matematika

Bagian Pertama

Waktu : 90 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2007

OLIMPIADE MATEMATIKA
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2007

BAGIAN PERTAMA

1. Bilangan ganjil 4-angka terbesar yang hasil penjumlahan semua angkanya bilangan prima adalah

2. Sejumlah uang terdiri dari koin pecahan Rp. 500, Rp. 200, dan Rp. 100 dengan nilai total Rp. 100.000. Jika nilai uang pecahan 500-an setengah dari nilai uang pecahan 200-an, tetapi tiga kali nilai uang pecahan 100-an, maka banyaknya koin adalah ····

3. Panjang sisi miring sebuah segitiga siku-siku sama dengan dua kali panjang sisi terpendeknya, sedangkan panjang sisi ketiga 1 satuan panjang lebih panjang dari panjang sisi terpendeknya. Luas segitiga itu adalah ·········· satuan luas.

4. Di antara bilangan-bilangan 2006, 2007 dan 2008, bilangan yang memiliki faktor prima berbeda terbanyak adalah ·······

5. Seorang pedagang mobil bekas menjual dua buah mobil dengan harga sama. Ia merugi 10% untuk mobil pertama, tetapi impas (kembali modal) untuk kedua mobil. Persentase keuntungan pedagang itu untuk mobil kedua adalah ·····

6. Dona menyusun lima buah persegi yang kongruen menjadi sebuah bangun datar. Tidak ada persegi yang menindih persegi lainnya. Jika luas bangun yang diperoleh Dona adalah 245 cm^2, keliling bangun tersebut paling sedikit adalah ···· cm.

7. Empat tim sepakbola mengikuti sebuah turnamen. Setiap tim bertanding melawan masing-masing tim lainnya sekali. Setiap kali bertanding, sebuah tim memperoleh nilai 3 jika menang, 0 jika kalah dan 1 jika pertandingan berakhir seri. Di akhir turnamen salah satu tim memperoleh nilai total 4. Jumlah nilai total ketiga tim lainnya paling sedikit adalah ····

8. Untuk bilangan asli n, didefinisikan $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$. Dalam bentuk sederhana, $1!1 + 2!2 + 3!3 + \cdots + n!n =$ ·······

9. Titik P terletak di kuadran I pada garis y = x. Titik Q terletak pada garis y = 2x demikian sehingga PQ tegak lurus terhadap garis y = x dan PQ = 2. Maka koordinat Q adalah ·····

10. Himpunan semua bilangan asli n sehingga 6n + 30 adalah kelipatan 2n + 1 adalah ·····

11. Suku konstanta pada ekspansi $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^9$ adalah ········

12. Absis titik potong garis ℓ dengan sumbu-x dan ordinat titik potong ℓ dengan sumbu-y adalah bilangan-bilangan prima. Jika ℓ juga melalui titik (3, 4), persamaan ℓ adalah ····

13. Tujuh belas permen dikemas ke dalam kantong-kantong sehingga banyak permen dalam setiap dua kantong berselisih paling banyak 1. Banyaknya cara mengemas permen tersebut ke dalam paling sedikit dua kantong adalah ····

14. Jika nilai maksimum x + y pada himpunan $\{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + 3y \leq 6, 3x + y \leq a\}$ adalah 4, haruslah a = ·····

15. Sebuah kubus berukuran 5 x 5 x 5 disusun dari 125 kubus satuan. Permukaan kubus besar lalu dicat. Rasio sisi (permukaan) ke-125 kubus satuan yang dicat terhadap yang tidak dicat adalah ···

16. Sebuah papan persegi dibagi ke dalam 4 x 4 petak dan diwarnai seperti papan catur. Setiap petak diberi nomor dari 1 hingga 16. Andi ingin menutup petak-petak pada papan dengan 7 kartu seukuran 2 x 1 petak. Agar ke-7 kartunya dapat menutupi papan, ia harus membuang dua petak. Banyak cara ia membuang dua petak adalah ····

17. Bilangan-bilangan asli 1, 2, ···, n dituliskan di papan tulis, kemudian salah satu bilangan dihapus. Rata-rata aritmatika bilangan yang tertinggal adalah $35\frac{7}{17}$. Bilangan n yang memungkinkan ini terjadi adalah ·····

18. Diberikan segitiga ABC siku-siku di A, titik D pada AC dan titik F pada BC. Jika AF $\perp$ BC dan BD = DC = FC = 1, maka AC = ····

19. Di antara semua solusi bilangan asli (x, y) persamaan $\frac{x+y}{2} + \sqrt{xy} = 54$, solusi dengan x terbesar adalah (x, y) = ······

20. Misalkan V adalah himpunan titik-titik pada bidang dengan koordinat bilangan bulat dan X adalah himpunan titik tengah dari semua pasangan titik pada himpunan V. Untuk memastikan bahwa ada angota X yang juga memiliki koordinat bilangan bulat, banyak anggota V paling sedikit harus ·····

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2007

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2008

Bidang Matematika

Bagian Kedua

Waktu : 120 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2007

OLIMPIADE MATEMATIKA
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2007

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan ABCD sebuah segiempat dengan AB = BC = CD = DA.
   (a) Buktikan bahwa titik A harus berada di luar segitiga BCD.
   (b) Buktikan bahwa setiap pasangan sisi berhadapan pada ABCD selalu sejajar.

2. Misalkan a dan b dua bilangan asli, yang satu bukan kelipatan yang lainnya. Misalkan pula KPK(a,b) adalah bilangan 2-angka, sedangkan FPB(a,b) dapat diperoleh dengan membalik urutan angka pada KPK(a,b). Tentukan b terbesar yang mungkin.
   [KPK : Kelipatan Persekutuan terKecil; FPB : Faktor (pembagi) Persekutuan terBesar]

3. Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$

4. Pada segitiga lancip ABC, AD, BE dan CF adalah garis-garis tinggi, dengan D, E, F berturut-turut pada sisi BC, CA, dan AB. Buktikan bahwa

$$DE + DF \leq BC$$

5. Bilangan-bilangan 1, 2, 3, ⋯, 15, 16 disusun pada persegi 4 x 4. Untuk i = 1, 2, 3, 4, misalkan b_i adalah jumlah bilangan-bilangan pada baris ke-i dan k_i adalah jumlah bilangan-bilangan pada kolom ke-i. Misalkan pula d_1 dan d_2 adalah jumlah bilangan-bilangan pada kedua diagonal. Susunan tersebut dapat disebut *antimagic* jika b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2 dapat disusun menjadi sepuluh bilangan berurutan. Tentukan bilangan terbesar di antara sepuluh bilangan berurutan ini dapat diperoleh dari sebuah *antimagic*.

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2007

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2008

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Bagian Pertama

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN PERTAMA

1. Penjumlahan semua angkanya maksimal = 36. Tetapi 36, 35, 34, 33 dan 32 bukan bilangan prima. Maka penjumlahan maksimal semua angkanya = 31.
   Dua angka pertama harus sebesar mungkin, yaitu 99. Jika angka ke-3 juga 9 maka angka ke-4 harus 4, tetapi 9994 bukanlah bilangan ganjil. Maka angka ketiga haruslah 8 dengan angka keempat adalah 5 yang merupakan bilangan ganjil.
   $\therefore$ Bilangan ganjil 4-angka yang memenuhi adalah **9985.**

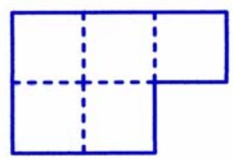
2. Misalkan nilai uang pecahan 100-an = x
   Maka nilai uang pecahan 500-an = 3x dan nilai uang pecahan 200-an = 6x
   Karena (x) + (3x) + (6x) = 100.000 maka x = 10.000
   Banyaknya koin 100-an = 10000 : 100 = 100
   Banyaknya koin 200-an = (6 · 10000) : 200 = 300
   Banyaknya koin 500-an = (3 · 10000) : 500 = 60
   $\therefore$ Banyaknya koin = 100 + 300 + 60 = **460.**

3. Misalkan panjang sisi miring segitiga tersebut = r, sisi terpendek = x dan sisi lainnya = y
   Diketahui bahwa r = 2x dan y = x + 1
   $x^2 + y^2 = r^2$ maka $x^2 + (x + 1)^2 = (2x)^2$
   $2x^2 - 2x - 1 = 0$ maka $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4(2)(-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$
   Ambil nilai x yang positif maka $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ sehingga $y = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$
   Luas segitiga = ½ · x · y
   $\therefore$ Luas segitiga = $\frac{3+2\sqrt{3}}{4}$

4. $2006 = 2 \cdot 17 \cdot 59$; $2007 = 3^2 \cdot 223$; $2008 = 2^3 \cdot 251$
   Banyaknya fakor prima dari 2006 = 3
   Banyaknya fakor prima dari 2007= 2
   Banyaknya fakor prima dari 2008= 2
   $\therefore$ Maka bilangan yang memiliki faktor prima berbeda terbanyak adalah **2006.**

5. Misalkan ia menjual mobil masing-masing seharga y. Misalkan juga modal mobil pertama adalah x. Maka agar impas modal mobil kedua haruslah 2y – x.
   $\frac{x-y}{x} = \frac{1}{10}$ sehingga 10y = 9x
   Keuntungan mobil kedua = $\frac{y-(2y-x)}{2y-x} = \frac{x-y}{2y-x} = \frac{10x-9x}{18x-10x} = \frac{1}{8}$
   $\therefore$ Persentase keuntungan pedagang untuk mobil kedua = **12,5 %**

6. Karena tidak ada yang tumpang tindih maka luas persegi = 245 : 5 = 49 cm^2.
   Panjang sisi persegi = 7.
   Agar kelilingnya kecil maka harus semakin banyak sisi-sisi persegi yang menempel dengan sisi-sisi yang lain.



   ∴ Keliling persegi = 10 x panjang sisi persegi = **70 cm**

7. Apabila pertandingan dua tim berakhir seri maka total nilai yang didapat kedua tim adalah 2 sedangkan apabila pertandingan dua buah tim berakhir dengan kemenangan salah satu tim maka total nilai kedua tim sama dengan 3.
   Total pertandingan = ${}_4C_2$ = 6.
   Nilai 4 hanya didapat jika tim tersebut menang satu kali, seri satu kali dan kalah satu kali.
   Agar jumlah nilai ketiga tim lainnya paling sedikit maka haruslah tiga pertandingan lainnya berakhir seri.
   Maka dari 6 pertandingan terdapat 4 pertandingan yang berakhir seri.
   Nilai total keempat tim = 2 · 4 + 3 · 2 = 14
   Maka total nilai ketiga tim lainnya = 14 − 4 = 10.
   ∴ Maka total nilai ketiga tim lainnya paling sedikit = 14 − 4 = **10**.

8. 1!1 + 2!2 + 3!3 + ··· + n!n = 1!(2 − 1) + 2!(3 − 1) + 3!(4 − 1) + ··· + n!((n + 1) − 1)
   1!1 + 2!2 + 3!3 + ··· + n!n = (2! − 1!) + (3! − 2!) + (4! − 3!) + ··· + (n + 1)! − n!
   1!1 + 2!2 + 3!3 + ··· + n!n = (n + 1)! − 1!
   ∴ 1!1 + 2!2 + 3!3 + ··· + n!n = **(n + 1)! − 1**

9. Misalkan koordinat $Q(x_Q, y_Q)$ dan $P(x_P, y_P)$
   Alternatif 1 :
   Karena P di kuadran I maka Q pun akan di kuadran I. Karena $y_Q = 2x_Q$ maka $y_Q \ge x_Q$
   Jarak Q ke garis y = x adalah PQ = 2.
   Jarak $Q(x_Q, y_Q)$ ke garis Ax + By + C = 0 dirumuskan dengan :
   $$d = \left|\frac{Ax_Q + By_Q + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$
   Maka :
   $$d = \left|\frac{y_Q - x_Q}{\sqrt{1^2 + 1^2}}\right| = 2$$. Maka $y_Q - x_Q = 2\sqrt{2}$ .... (1)
   Karena garis y = 2x melalui Q maka $y_Q = 2x_Q$ ······ (2)
   Dari persamaan (1) dan (2) didapat $x_Q = 2\sqrt{2}$ dan $y_Q = 4\sqrt{2}$

Alternatif 2 :

Gradien garis y = x adalah m = 1. Maka gradien garis yang melalui PQ adalah $m_{PQ} = -1$

$\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = -1$. Maka $2x_Q - x_P = x_P - x_Q$ sehingga $3x_Q = 2x_P$ .... (3)

$\sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} = 2$ sehingga $(x_Q^2 - 2x_Qx_P + x_P^2) + (4x_Q^2 - 4x_Qx_P + x_P^2) = 4$

$5x_Q^2 - 6x_Qx_P + 2x_P^2 = 4$ .... (4)

Subtitusikan persamaan $3x_Q = 2x_P$ ke persamaan (4)

$10x_Q^2 - 18x_Q^2 + 9x_Q^2 = 8$

Karena Q di kuadran I maka $x_Q = 2\sqrt{2}$ dan $y_Q = 4\sqrt{2}$

∴ Koordinat Q adalah $(2\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$.

10. 6n + 30 = k(2n + 1) untuk suatu k dan n bilangan asli.
    $(k - 3)(2n + 1) = 27 = 3^3$
    Nilai 2n + 1 yang memenuhi hanya jika 2n + 1 = 3, 9 atau 27
    Jika 2n + 1 = 3 maka k – 3 = 9 sehingga n = 1 dan k = 12
    Jika 2n + 1 = 9 maka k – 3 = 3 sehingga n = 4 dan k = 6
    Jika 2n + 1 = 27 maka k – 3 = 1 sehingga n = 13 dan k = 4
    ∴ Nilai n asli yang memenuhi 6n + 30 adalah kelipatan 2n + 1 adalah **n = 1, 4, 13.**

11. $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^9 = {}_9C_0(2x^2)^9(-\frac{1}{x})^0 + \cdots + {}_9C_k(2x^2)^k(-\frac{1}{x})^{9-k} + \cdots$
    Untuk mencari suku konstanta maka harus dipenuhi $x^{2k} \cdot x^{k-9} = x^0$ sehingga k = 3
    ${}_9C_3(2x^2)^3(x)^{3-9} = 672$
    ∴ Maka konstanta pada ekspansi $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^9$ adalah **672**.

12. Misalkan persamaan garis ℓ adalah y = mx + c
    Karena titik potongnya dengan sumbu y bilangan prima maka c adalah bilangan prima.
    Titik potong dengan sumbu x jika y = 0. Maka mx + c = 0 sehingga $x = -\frac{c}{m}$ adalah bilangan prima.
    Karena c prima maka $-\frac{c}{m}$ akan prima hanya jika m = –1. Maka y = –x + c
    Karena garis melalui titik (3, 4) maka 4 = –3 + c. Akibatnya c = 7 dan y = –x + 7
    ∴ Persamaan garis ℓ adalah **y = –x + 7.**

13. Karena dalam setiap dua kantong berselisih paling bayak 1, maka banyaknya permen hanya akan ada 2 jenis, yaitu m dan m + 1.
    Pendapat 1 :
    Karena 17 ≡ 1 (mod 2) maka untuk dua kantong akan terdapat dua kemungkinan yaitu satu kantong berisi 8 permen sedangkan kantong lainnya 9 permen dan sebaliknya.

Karena 17 ≡ 2 (mod 3) maka untuk tiga kantong, kemungkinan mengemas permen akan terdiri dari dua kantong berisi 6 permen dan satu kantong lagi berisi 5 permen. Banyaknya cara mengemas permen pada kasus ini adalah $\frac{3!}{2!\cdot 1!}$ = 3 cara.

Karena 17 ≡ 1 (mod 4) maka untuk empat kantong, kemungkinan mengemas permen akan terdiri dari satu kantong berisi 5 permen dan tiga kantong lagi berisi 4 permen. Banyaknya cara mengemas permen pada kasus ini adalah $\frac{4!}{1!\cdot 3!}$ = 4 cara. Demikian seterusnya.

Misalkan Banyaknya cara = N maka :

$$N = \frac{2!}{1!\cdot 1!} + \frac{3!}{2!\cdot 1!} + \frac{4!}{1!\cdot 3!} + \frac{5!}{2!\cdot 3!} + \frac{6!}{5!\cdot 1!} + \frac{7!}{3!\cdot 4!} + \frac{8!}{1!\cdot 7!} + \frac{9!}{8!\cdot 1!} + \frac{10!}{7!\cdot 3!} + \frac{11!}{6!\cdot 5!} + \frac{12!}{5!\cdot 7!} + \frac{13!}{4!\cdot 9!} + \frac{14!}{3!\cdot 11!} + \frac{15!}{2!\cdot 13!} + \frac{16!}{1!\cdot 15!} + \frac{17!}{0!\cdot 17!}$$

Banyaknya cara = 2 + 3 + 4 + 10 + 6 + 35 + 8 + 9 + 120 + 462 + 792 + 715 + 364 + 105 + 16 + 1

∴ Banyaknya cara mengemas permen = **2652**

Pendapat 2 :

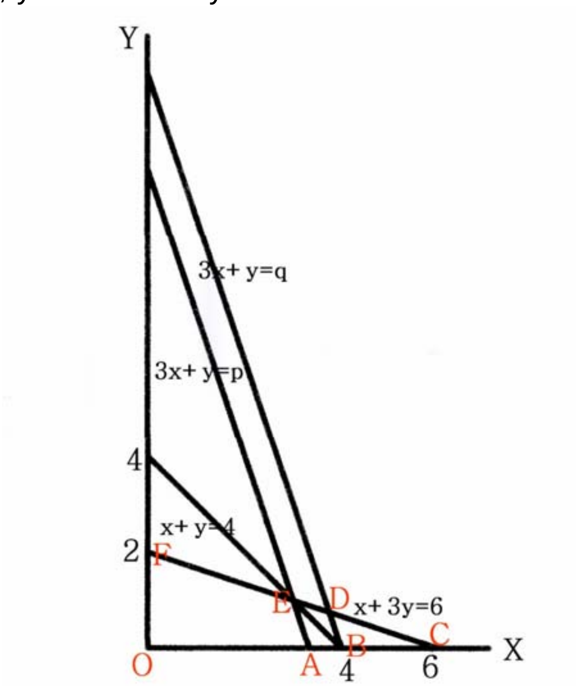
Karena banyaknya permen pada masing-masing kantong adalah m atau m + 1 maka pada masing-masing banyaknya kantong hanya akan ada 1 kemungkinan cara mengemas permen.

∴ Karena kemungkinan banyaknya kantong ada 16, maka banyaknya cara mengemas permen ada **16.**

Catatan : Pendapat 1 didasarkan asumsi bahwa kantong-kantong tersebut semuanya berbeda sehingga 8 permen dimasukkan ke kantong pertama dan 9 permen dimasukkan ke kantong kedua akan berbeda dengan bila 9 permen dimasukkan ke kantong pertama dan 8 permen dimasukkan ke kantong kedua. Sedangkan Pendapat 2 didasarkan asumsi bahwa kantong-kantong tersebut semuanya identik sehingga 8 permen dimasukkan ke kantong pertama dan 9 permen dimasukkan ke kantong kedua akan sama dengan bila 9 permen dimasukkan ke kantong pertama dan 8 permen dimasukkan ke kantong kedua. Solusi Panitia Pusat adalah sesuai dengan pendapat 2.

14. Alternatif 1 :

Digambar daerah x ≥ 0, y ≥ 0 dan x + 3y ≤ 6.



Daerah yang memenuhi $x \geq 0$, $y \geq 0$ dan $x + 3y \leq 6$ adalah OCF.
Dibuat garis $x + y = 4$
Perpotongan garis $x + 3y = 6$ dengan $x + y = 4$ adalah di E(3, 1).
Perpotongan garis $y = 0$ dengan $x + y = 4$ adalah di B(4, 0).
Dibuat garis $3x + y = p$ yang melalui E(3, 1) dan $3x + y = q$ yang melalui B(4, 0).
Maka akan didapat nilai p = 10 dan q = 12.

Garis $3x + y = 12$ memotong garis $x + 3y = 6$ di $D\left(\frac{15}{4}, \frac{3}{4}\right)$ yang membuat $x + y > 4$.

Garis $3x + y = 10$ memotong garis $y = 0$ di $A\left(\frac{10}{3}, 0\right)$ yang membuat $x + y < 4$.

Karena nilai $x + y$ yang diminta dalam soal adalah nilai maksimum maka persamaan $3x + y \leq a$ yang memenuhi adalah $3x + y \leq 10$.

$\therefore$ Maka nilai a yang memenuhi adalah **a = 10.**

Alternatif 2 :

Karena $x + 3y \leq 6$ dan $3x + y \leq a$ maka $4(x + y) \leq 6 + a$
Karena maks$(x + y) = 4$ maka haruslah dipenuhi $4 \cdot 4 = 6 + a$
a = 10

$\therefore$ Maka nilai a yang memenuhi adalah **a = 10.**

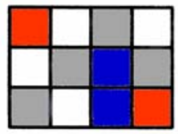
15. Banyaknya sisi dapat dinyatakan dalam luasan.
Luasan yang dicat = 6 x 5 x 5 = 150.
Luasan keseluruhan = 125 buah x 6 x 1 x 1 = 750
Luasan yang tidak dicat = 750 − 150 = 600

$\therefore$ Rasio sisi yang dicat terhadap yang tidak dicat = 150 : 600 = **1 : 4.**

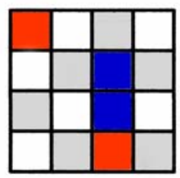
16. Jika satu kartu ditaruh pada papan maka kartu tersebut akan menutupi satu petak warna hitam dan satu petak warna putih. Maka jelas bahwa dua petak yang dibuang agar dipenuhi bahwa sisa petak dapat ditutupi oleh 7 buah kartu harus memenuhi bahwa kedua petak tersebut berbeda warna.
Akan dibuktikan bahwa bagaimana pun cara memilih petak asalkan berbeda warna maka sisanya akan dapat ditutupi oleh 7 buah kartu.
Dalam satu baris 4 x 1 petak maupun dalam satu kolom 1 x 4 petak, jelas dapat ditutupi oleh dua buah kartu.

- Jika dua petak yang dibuang berada pada satu baris
Jika 2 petak tersebut berada pada kolom ke-1 dan 2 atau kolom 3 dan 4 maka sisanya dapat ditutupi oleh 1 buah kartu. Tiga baris sisa akan dapat ditutupi oleh 6 buah kartu. Jika 2 petak tersebut berada pada kolom ke-2 dan 3 maka jelas baris tersebut dan baris didekatnya dapat ditutupi oleh 3 buah kartu. Sedangkan 2 baris sisanya dapat ditutupi oleh 4 buah kartu lagi.
- Jika dua petak yang dibuang, salah satunya di baris ke-n sedangkan satu lagi di baris ke-(n+1)
Jelas juga bahwa dua baris tersebut dapat ditutupi oleh tiga buah kartu. Dua baris lainnya sesuai dengan keterangan sebelumnya dapat ditutupi oleh 4 buah kartu.

- Jika dua petak yang dibuang, salah satunya di baris ke-n sedangkan satu lagi di baris ke-(n+2) Taruh sebuah kartu dalam arah vertikal sedemikian sehingga terdapat satu baris berisi satu petak yang dibuang dan satu petak lagi merupakan salah satu petak dari kartu yang ditaruh dengan warna kedua petak tersebut berbeda. Maka akan terbentuk 2 bagian. Satu bagian terdiri dari 2 baris dengan 2 petak "dibuang" dan satu baris sisanya terdiri 2 petak yang 'dibuang'. Sesuai dengan keterangan sebelumnya maka sisa petak akan dapat ditutupi oleh 6 buah kartu.



- Jika dua petak yang dibuang, salah satunya di baris ke-1 sedangkan satu lagi di baris ke-4 Taruh sebuah kartu vertikal dengan kedua petaknya terletak pada baris ke-2 dan ke-3 sedemikian sehingga dua petak pada baris ke-1 dan ke-2 yang tidak dapat ditaruh kartu lagi akan berbeda warna. Maka sesuai dengan keterangan sebelumnya pada baris ke-1 dan ke-2 dapat ditutupi oleh tiga buah kartu lagi. Demikian juga dengan baris ke-3 dan ke-4.



Terbukti bahwa bagaimana pun cara memilih petak asalkan berbeda warna maka sisanya akan dapat ditutupi oleh 7 buah kartu..
Banyaknya petak hitam dan putih masing-masing ada 8. Maka banyaknya cara memilih dua petak agar dapat dipenuhi adalah 8 x 8 = 64.
$\therefore$ Banyaknya cara memilih dua petak = **64.**
(Catatan : Persoalan persegi panjang dengan ukuran yang lebih umum pernah dibahas di www.olimpiade.org. Pembuktian dapat dilakukan dengan induksi matematika)

17. Misalkan bilangan yang dihapus adalah k.

$\frac{1+2+\cdots+n-k}{n-1} = \frac{602}{17}$ maka $\frac{n}{2} + \frac{n-k}{n-1} = 35\frac{7}{17}$

Karena k $\geq$ 1 maka n – k $\leq$ n – 1 sehingga $0 \leq \frac{n-k}{n-1} \leq 1$

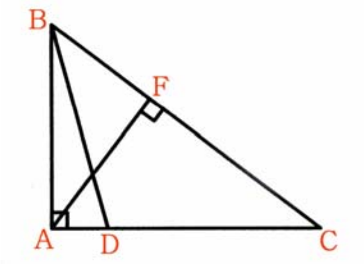
$34\frac{7}{17} \leq \frac{n}{2} \leq 35\frac{7}{17}$ sehingga 68 < n $\leq$ 70

Jika n = 70 maka $k = (1+2+3+\cdots+70) - \frac{602}{17}\cdot 69$. Karena 17 tidak membagi 69 maka tidak ada nilai k asli yang memenuhi.

Jika n = 69 maka $k = (1+2+3+\cdots+69) - \frac{602}{17}\cdot 68 = 7$

$\therefore$ Maka **n = 69**

18. Misalkan panjang AC = x maka AD = x – 1



Pada ΔAFC berlaku AC cos C = FC maka cos C = $\frac{1}{x}$

Karena DC = DB maka ΔCDB sama kaki sehingga ∠DBC = C.
Akibatnya ∠BDA = 2C
Pada ΔBDA berlaku :
BD cos ∠BDA = AD. Maka 1 · cos 2C = x – 1 sehingga $2\cos^2 C - 1 = x - 1$

$\frac{2}{x^2} = x$

$x = \sqrt[3]{2}$

∴ Maka AC = $\sqrt[3]{2}$

19. $\frac{x+y}{2} + \sqrt{xy} = 54$. Maka $\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 = 108$

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 6\sqrt{3}$

Karena x dan y keduanya bilangan asli maka x dan y keduanya harus berbentuk $3k^2$.
Agar didapat solusi x terbesar maka y haruslah minimal. Nilai terkecil y adalah y = 3.
Maka didapat $\sqrt{x} = 5\sqrt{3}$ sehingga x = 75.
∴ Maka solusi dengan x terbesar adalah (x, y) = **(75, 3)**.

20. Misal koordinat $V_1(x_1, y_1)$ dan $V_2(x_2, y_2)$ dengan titik tengah V_1 dan V_2 adalah X_{12}.
Maka koordinat X_{12} adalah (½($x_1 + x_2$), ½($y_2 + y_2$)).
Jika X_{12} memiliki koordinat bilangan bulat maka haruslah $x_1 + x_2$ dan $y_1 + y_2$ genap.
Syarat itu terjadi haruslah x_1 dan x_2 memiliki paritas yang sama dan y_1 dan y_2 juga memiliki paritas yang sama.
Kemungkinan jenis koordinat (dalam bahasa lain disebut paritas) suatu titik letis pada bidang hanya ada 4 kemungkinan yaitu (genap, genap), (genap,ganjil), (ganjil, ganjil) dan (ganjil, genap).
Agar dapat dipastikan bahwa ada anggota X yang memiliki koordinat bilangan bulat maka sesuai *Pigeon Hole Principle* (PHP) maka haruslah terdapat sekurang-kurangnya 5 buah titik letis.
∴ Maka anggota V paling sedikit harus **5**.

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2007

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2008

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

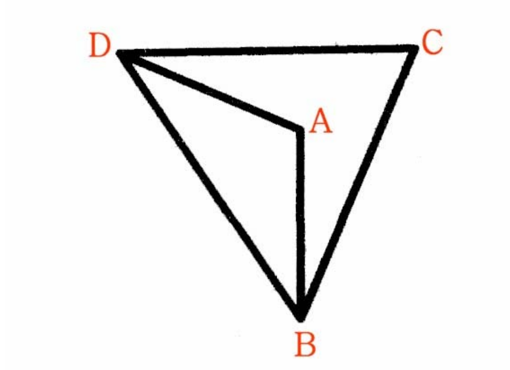
Bidang Matematika

Bagian Kedua

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN KEDUA

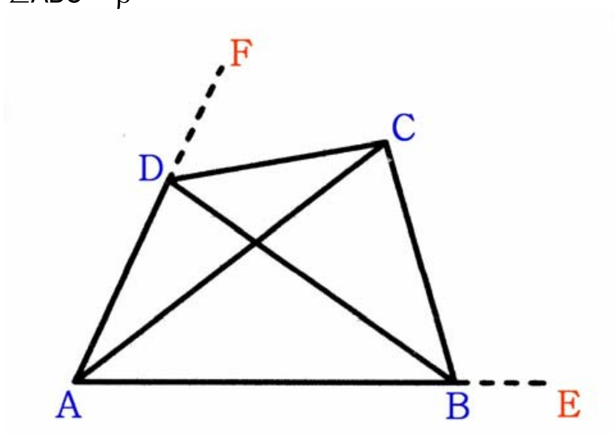
1. (a) Andaikan A berada di dalam segitiga BCD.



Karena panjang sisi-sisi ΔBAD dan ΔBDC sama maka ΔBAD dan ΔBCD kongruen dan karena sisi BD berhimpit serta AB = AD = BC = CD maka titik A haruslah berhimpit dengan C. Kontradiksi dengan kenyataan bahwa ABCD adalah segiempat.

$\therefore$ **Terbukti bahwa A haruslah berada di luar segitiga BDC.**

(b) Misalkan $\angle BAD = \alpha$ dan $\angle ABC = \beta$



Pada ΔBAD dan ΔBDC berlaku :

$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2 \cdot AD \cdot AB \cos \angle BAD$

$BD^2 = CD^2 + CB^2 - 2 \cdot CD \cdot CB \cos \angle BCD$

Karena AD = AB = CD = CB maka $\angle BAD = \angle BCD = \alpha$

Pada ΔABC dan ΔADC berlaku :

$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2 \cdot BA \cdot BC \cos \angle ABC$

$AC^2 = DA^2 + DC^2 - 2 \cdot DA \cdot DC \cos \angle ADC$

Karena BA = BC = DA = DC maka $\angle ABC = \angle ADC = \beta$

Akibatnya $\alpha + \beta = 180^o$

Karena $\alpha + \beta = 180^o$ dan $\angle ABC = \beta$ maka $\angle CBE = \alpha$

Karena $\angle DAE = \angle CBE = \alpha$ maka haruslah AD sejajar BC

Karena $\alpha + \beta = 180^o$ dan $\angle ADC = \beta$ maka $\angle CDF = \alpha$

Karena $\angle BAF = \angle CDF = \alpha$ maka haruslah AB sejajar DC

$\therefore$ **Terbukti bahwa setiap pasangan sisi berhadapan pada ABCD selalu sejajar.**

2. Misalkan FPB(a, b) = d = 10p + q maka KPK(a, b) = 10q + p

Pendapat 1 :

a = dx dan b = dy untuk suatu bilangan asli d, x, y serta FPB(x, y) = 1 dan x, y $\neq$ 1
Karena a dan b simetri dan diinginkan b maksimum maka b > a sehingga y > x
Jelas bahwa KPK(a, b) = dxy
(10p + q)xy = (10q + p)
Karena 10p + q dan 10q + p keduanya bilangan asli dua angka maka xy < 10
Karena x, y $\neq$ 1 dan FPB(x, y) = 1 maka pasangan (x, y) yang memenuhi hanya x = 2 dan y = 3.
6(10p + q) = 10q + p sehingga 59p = 4q
Karena 59 adalah bilangan prima maka q haruslah kelipatan 59. Tetapi q bilangan asli satu angka. Maka tidak ada nilai q yang memenuhi.
$\therefore$ **Tidak ada nilai b yang memenuhi.**

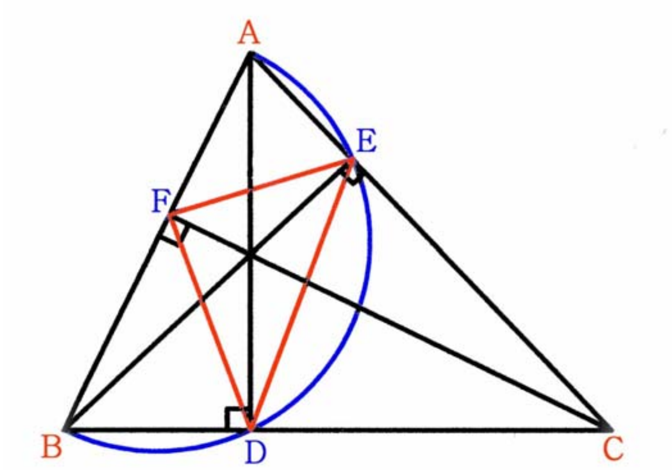
Pendapat 2 :

Jika p $\geq$ 1.
Karena 10p + q $\mid$ 10q + p maka 10p + q $\mid$ 10(q + 10p) $-$ 99p sehingga 10p + q $\mid$ 99p
Jika 11 tidak membagi q + 10p maka 10p + q $\mid$ 9p tetapi 0 < 9p < q + 10p. Kontradiksi.
Jika 11 $\mid$ 10p + q maka 11 $\mid$ 11p + q $-$ p sehingga 11 $\mid$ q $-$ p
Karena 0 $\leq$ q $-$ p $\leq$ 9 maka q $-$ p = 0 sehingga KPK (a, b) = FPB (a, b). Akibatnya a = b. Kontradiksi.
Jadi p = 0
KPK (a, b) = 10q dan FPB (a, b) = q.
Misalkan a = xq dan b = yq dengan FPB (x, y) = 1.
Karena KPK (a, b) = 10q maka KPK (x, y) = 10.
Maka y = 10, 5, 2, 1.
Jika y = 10 maka x = 1. Akibatnya x $\mid$ y sehingga a $\mid$ b. Kontradiksi.
Jika y = 5 maka x = 2. Akibatnya karena 1 $\leq$ q $\leq$ 9 maka b_{maks} = yq = 45 dan a = 18.
b = 45 dan a = 18 memenuhi syarat pada soal.
Untuk 1 $\leq$ y $\leq$ 5 maka karena 1 $\leq$ q < 9 maka b = yq $\leq$ 45
$\therefore$ Nilai maksimum b yang memenuhi adalah b_{maks} = **45.**

Pendapat 1 memiliki pendapat sebagai berikut. Pada soal diketahui bahwa KPK(a, b) adalah bilangan 2-angka, sedangkan FPB(a, b) dapat diperoleh dengan membalik urutan angka pada KPK(a, b). Artinya jika KPK(a, b) = xy maka FPB(a, b) = yx. Jika KPK(a, b) = 90 maka FPB(a, b) = 09. Dari pengertian ini maka KPK(a, b) tidak boleh berakhiran dengan angka 0 sebab akan menyebabkan penulisan FPB(a, b) akan dimulai dengan angka 0 sehingga hal ini tidak lazim.
Pendapat 2 memiliki pendapat sebagai berikut. Berdasarkan soal maka hanya KPK (a, b) yang harus merupakan bilangan dua angka sedangkan FPB(a, b) tidak harus merupakan bilangan dua angka. Membalik urutan angka bukan merupakan fungsi satu-satu. Ekspresi matematika haruslah kita tuliskan dalam bentuk yang paling sederhana walaupun dari mana asalnya. 009, 09, dan 9 mempunyai arti yang sama kalau mereka kita artikan sebagai bilangan. Dengan demikian mereka merupakan satu kelas dan cukup diwakili oleh 9 (sebagai ekspresi yang paling sederhana).
Solusi dari Panitia Pusat adalah sesuai dengan pendapat 2.

3. $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$
$(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) - x^2 = 0$
$((x - 1)^2)^2 - x^2 = 0$
Mengingat $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ maka :
$(x^2 - 2x + 1 - x)(x^2 - 2x + 1 + x) = 0$
$(x^2 - 3x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$
Karena $(-1)^2 - 4(1)(1) < 0$ maka tidak ada x real yang memenuhi $x^2 - x + 1 = 0$.
Untuk $x^2 - 3x + 1 = 0$ dipenuhi oleh $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(1)}}{2 \cdot 1}$ sehingga $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$
$\therefore$ Maka nilai x real yang memenuhi adalah $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ **atau** $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

4. Misalkan $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ dan $\angle ACB = \gamma$



Karena ΔAEB siku-siku di E dan ΔADB siku-siku di D maka dengan AB sebagai diameter, dapat dibuat sebuah lingkaran yang melalui A, E, D dan B. Maka AEDB adalah segiempat talibusur.
Karena AEDB adalah segiempat talibusur maka $\angle ABD + \angle AED = 180^o$
$(\beta) + (90^o + \angle BED) = 180^o$ sehingga $\angle BED = 90^o - \beta$. Maka $\angle DEC = \beta$
Dengan cara yang sama ACDF adalah segiempat talibusur.
Karena ACDF segiempat talibusur maka $\angle ACD + \angle DFA = 180^o$
$(\gamma) + (90^o + \angle CFD) = 180^o$ sehingga $\angle CFD = 90^o - \gamma$. Maka $\angle BFD = \gamma$
Karena ΔBFC siku-siku di F maka $\angle BCF = 90^o - \beta$
Karena ΔBEC siku-siku di E maka $\angle EBC = 90^o - \gamma$

Pada ΔBDF berlaku $\frac{DF}{\sin\beta} = \frac{BD}{\sin\gamma}$ .... (1)

Pada ΔCDF berlaku $\frac{DF}{\sin(90° - \beta)} = \frac{DC}{\sin(90° - \gamma)}$ sehingga $\frac{DF}{\cos\beta} = \frac{DC}{\cos\gamma}$ .... (2)

Pada ΔCDE berlaku $\frac{DE}{\sin\gamma} = \frac{DC}{\sin\beta}$ .... (3)

Pada ΔBDE berlaku $\frac{DE}{\sin(90° - \gamma)} = \frac{BD}{\sin(90° - \beta)}$ sehingga $\frac{DE}{\cos\gamma} = \frac{BD}{\cos\beta}$ .... (4)

Dari persamaan (1) dan (4) didapat :

$$DE + DF = BD\left(\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} + \frac{\cos\gamma}{\cos\beta}\right)$$

Mengingat sin 2x = 2 sin x cos x maka :

$2 \sin\gamma \cos\beta\ (DE + DF) = BD\ (\sin 2\beta + \sin 2\gamma)$ .... (5)

Dari persamaan (2) dan (3) didapat :

$$DE + DF = DC\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} + \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)$$

Mengingat sin 2x = 2 sin x cos x maka :

$2 \sin\beta \cos\gamma\ (DE + DF) = DC\ (\sin 2\beta + \sin 2\gamma)$ .... (6)

Mengingat $\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma = \sin(\beta + \gamma)$ dan $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{1}{2}(x + y) \cos \frac{1}{2}(x - y)$ maka :

Persamaan (5) + Persamaan (6) :

$2 \sin(\beta + \gamma)(DE + DF) = 2\ (BD + DC) \sin(\beta + \gamma) \cos(\beta - \gamma)$

$DE + DF = BC \cos(\beta - \gamma)$

Mengingat $\cos(\beta - \gamma) \le 1$ maka $DE + DF \le BC$ (terbukti)

Tanda kesamaan terjadi apabila $\beta - \gamma = 0$ atau $\beta = \gamma$ sehingga ΔABC sama kaki dengan AB = AC yang berakibat D adalah pertengahan BC.

∴ Terbukti bahwa **DE + DF ≤ BC**

5. 1 + 2 + 3 + 4 + ⋯ + 16 = 136. Jelas bahwa $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 136$.

Misalkan m = min ($b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4$) dan M = maks ($b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4$)

Misalkan juga $S = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 2 \cdot 136 = 272$

Alternatif 1 :

Andaikan bahwa ($b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4$) dapat disusun menjadi 8 bilangan berurutan, maka haruslah terdapat nilai n bulat sehingga memenuhi :

$(n - 4) + (n - 3) + (n - 2) + (n - 1) + (n) + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 2 \cdot 136 = 272$

Karena $8n - 4 = 272$ maka tidak ada n bulat yang memenuhi.

Maka harus terdapat sedikitnya salah satu d_1 atau d_2 yang memenuhi $m < d_i < M$.

- Jika $m < d_1 < M$ dan $d_2 > M$

  Maka maks ($b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2$) = d_2 dan M = m + 8 dan d_2 = m + 9

  $(m) + (m + 1) + \cdots + (m + 6) + (m + 8) \le S \le (m) + (m + 2) + (m + 3) + \cdots + (m + 8)$

  $8m + 29 \le 272 \le 8m + 35$ sehingga $29 < m \le 30$. Maka nilai m yang mungkin hanya m = 30

  $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + d_1 = 30 + 31 + 32 + \cdots + 38 = 306$

  $d_1 = 306 - 272 = 34$ sehingga $d_2 = m + 9 = 39$

  Maka maks ($b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2$) = 39

  Contoh *antimagic* yang memenuhi nilai maksimumnya = 39

	15	2	12	4	33
	1	14	10	5	30
	8	9	3	16	36
	11	13	6	7	37
34	35	38	31	32	39

- Jika $m < d_1 < d_2 < M$
  Maka maks $(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2) = M$ dan $M = m + 9$
  $(m) + (m + 1) + \cdots + (m + 6) + (m + 9) \le S \le (m) + (m + 3) + (m + 4) + \cdots + (m + 9)$
  $8m + 30 \le 272 \le 8m + 42$ sehingga $28 < m \le 30$. Maka nilai m yang mungkin hanya m = 29 atau 30
  Karena ingin dicapai nilai M maksimum maka dipilih m = 30 sehingga M = m + 9 = 39

Alternatif 2 :
Nilai maks $(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2)$ semakin besar apabila m semakin besar.
Jika $m \ge 31$ maka $31 + 32 + 33 + 34 + 35 + 36 + 37 + 38 \le S$ sehingga $276 \le 272$ (tidak memenuhi)
Maka tidak mungkin min $(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4) \ge 31$ sehingga $m \le 30$
Jika m = 30 maka $30 + 31 + 32 + \cdots + 37 \le S \le 32 + 33 + 34 + \cdots + 39$ sehingga $268 \le 272 \le 284$
Ada kemungkin terdapat *antimagic* yang memenuhi m = 30.
Jika ada *antimagic* yang memenuhi untuk m = 30 maka maks $(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2) = 39$.
Contoh *antimagic* yang memenuhi untuk m = 30.

	15	2	12	4	33
	1	14	10	5	30
	8	9	3	16	36
	11	13	6	7	37
34	35	38	31	32	39

Untuk m < 30 tidak perlu dicari sebab nilai maks $(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2)$ akan semakin kecil.
$\therefore$ Nilai maks $(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2) = \mathbf{39}$.

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2008

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2007

SURABAYA (JAWA TIMUR), 3 - 8 SEPTEMBER 2007

Bidang Matematika

Hari Pertama

Waktu : 180 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2007

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2007
3 – 8 SEPTEMBER 2007
SURABAYA, JAWA TIMUR

BIDANG : MATEMATIKA

HARI PERTAMA

WAKTU : 180 MENIT

1. Misalkan ABC segitiga dengan $\angle ABC = \angle ACB = 70^o$. Misalkan titik D pada sisi BC sehingga AD garis tinggi, titik E pada sisi AB sehingga $\angle ACE = 10^o$, dan titik F adalah perpotongan AD dan CE. Buktikan bahwa CF = BC.

2. Untuk setiap bilangan asli n, b(n) menyatakan banyaknya faktor positif n dan p(n) menyatakan hasil penjumlahan semua faktor positif n. Sebagai contoh, b(14) = 4 dan p(14) = 24. Misalkan k sebuah bilangan asli yang lebih besar dari 1.
   a. Buktikan bahwa ada tak berhingga banyaknya bilangan asli n yang memenuhi $b(n) = k^2 - k + 1$.
   b. Buktikan bahwa ada berhingga banyaknya bilangan asli n yang memenuhi $p(n) = k^2 - k + 1$.

3. Misalkan a, b, c bilangan-bilangan real positif yang memenuhi ketaksamaan $5(a^2 + b^2 + c^2) < 6(ab+bc+ca)$.
   Buktikan bahwa ketiga ketaksamaan berikut berlaku : $a + b > c$, $b + c > a$, dan $c + a > b$

4. Suatu susunan 10-angka 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dikatakan cantik jika (i) saat dibaca dari kiri ke kanan, 0, 1, 2, 3, 4 membentuk barisan naik, sedangkan 5, 6, 7, 8, 9 membentuk barisan turun, dan (ii) angka 0 tidak berada pada ujung kiri. Sebagai contoh, 9807123654 adalah susunan cantik. Tentukan banyaknya susunan cantik.

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2008

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2007

SURABAYA (JAWA TIMUR), 3 - 8 SEPTEMBER 2007

Bidang Matematika

Hari Kedua

Waktu : 180 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2007

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2007
3 – 8 SEPTEMBER 2007
SURABAYA, JAWA TIMUR

BIDANG : MATEMATIKA

HARI KEDUA

WAKTU : 180 MENIT

5. Misalkan r,s dua bilangan asli dan P sebuah `papan catur' dengan r baris dan s lajur. Misalkan M menyatakan banyak maksimal benteng yang dapat diletakkan pada P sehingga tidak ada dua benteng yang saling menyerang.
   a. Tentukan M.
   b. Ada berapa cara meletakkan M buah benteng pada pada P sehingga tidak ada dua benteng yang saling menyerang ?

6. Tentukan semua tripel bilangan real (x,y,z) yang memenuhi ketiga persamaan berikut sekaligus
   $x = y^3 + y - 8$
   $y = z^3 + z - 8$
   $z = x^3 + x - 8$

7. Titik-titik A,B,C,D terletak pada lingkaran S demikian rupa, sehingga AB merupakan garis tengah S, tetapi CD bukan garis tengah S. Diketahui pula bahwa C dan D berada pada sisi yang berbeda terhadap AB. Garis singgung terhadap S di C dan D berpotongan di titik P. Titik-titik Q dan R berturut-turut adalah perpotongan garis AC dengan garis BD dan garis AD dengan garis BC.
   a. Buktikan bahwa P,Q dan R segaris.
   b. Buktikan bahwa garis QR tegak lurus terhadap garis AB.

8. Misalkan m dan n dua bilangan asli. Jika ada tak berhingga banyaknya bilangan bulat k sehingga $k^2 + 2kn + m^2$ adalah bilangan kuadrat sempurna, buktikan bahwa $m = n$.

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2008
OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2007
SURABAYA (JAWA TIMUR), 3 – 8 SEPTEMBER 2007

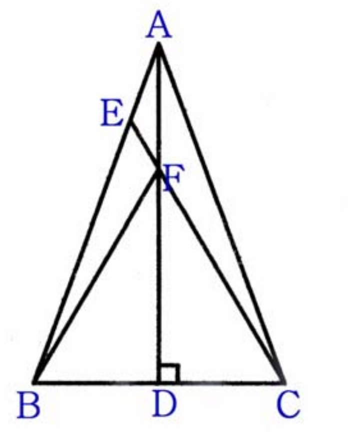
Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

1. Karena $\angle ABC = \angle ACB = 70^o$ maka ΔABC sama kaki.



Alternatif 1 :

Karena AD adalah garis tinggi dan ΔABC sama kaki maka AD akan memotong pertengahan BC.
Karena FD memotong pertengahan BC dan FD garis tinggi ΔBFC maka ΔBFC sama kaki dengan FB = FC.
$\angle FCB = 70^o - 10^o = 60^o$. Maka $\angle FBC = \angle FCB = 60^o$. Akibatnya $\angle BFC = 60^o$.
Maka ΔFBC adalah segitiga sama sisi.
$\therefore$ Jadi CF = BC (terbukti)

Alternatif 2 :

$\angle BAC = 180^o - 70^o - 70^o = 40^o$. Karena AD garis tinggi maka $\angle FAC = 20^o$ sehingga $\angle AFC = 150^o$.

Karena $\angle ACF = 10^o$ maka pada ΔAFC berlaku $\dfrac{CF}{\sin 20^\circ} = \dfrac{AC}{\sin 150^\circ}$

Sehingga CF = 2 AC sin 20^o .... (1)

Pada ΔABC berlaku $\dfrac{BC}{\sin 40^\circ} = \dfrac{AC}{\sin 70^\circ}$

Mengingat $\sin 70^o = \cos 20^o$ dan $\sin 40^o = 2 \sin 20^o \cos 20^o$ maka
BC = 2 AC sin 20^o .... (2)

$\therefore$ Dari (1) dan (2) dapat disimpulkan bahwa CF = BC (terbukti)

2. Misalkan $n = p_1^{d1} \cdot p_2^{d2} \cdot p_3^{d3} \cdot \cdots \cdot p_n^{dn}$ dengan $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ adalah bilangan prima maka banyaknya faktor positif dari n adalah $(d_1 + 1)(d_2 + 1)(d_3 + 1) \cdots (d_n + 1)$

a. Dengan mengambil $n = p^{k^2 - k}$ maka banyaknya faktor positif $n = b(n) = k^2 - k + 1$

$\therefore$ Karena ada tak berhingga bilangan prima maka ada tak berhingga n yang memenuhi banyaknya faktor positif $n = b(n) = k^2 - k + 1$ (terbukti).

b. Untuk n > 1 maka n memiliki sedikitnya 2 faktor positif.

Untuk $n > 1$ maka $p(n) \ge 1 + n > 2$

$k^2 - k + 1 \ge 1 + n > 2$

$1 < n \le k^2 - k$

Karena n terletak pada suatu selang tertentu maka tidak mungkin ada tak berhingga banyaknya bilangan asli n yang memenuhi $p(n) = k^2 - k + 1$.

$\therefore$ Maka berhingga banyaknya bilangan asli n yang memenuhi $p(n) = k^2 - k + 1$.

3. $5(a^2 + b^2 + c^2) < 6(ab+bc+ca)$ .... (1)

Alternatif 1 :

Tanpa mengurangi keumuman misalkan maks (a, b, c) = c

$5ac + 5bc - 5c^2 - a^2 - ab + ac - ab - b^2 + bc > 4a^2 - 8ab + 4b^2$

$(5c - a - b)(a + b - c) > (2a - 2b)^2$

Karena bilangan kudrat tidak mungkin negatif maka

$(5c - a - b)(a + b - c) > 0$ .... (2)

Karena maks (a, b, c) = c maka $5c - a - b > 0$

Maka agar ketaksamaan (2) terpenuhi maka haruslah $a + b > c$

Karena $c > a$ maka $b + c > a$ dan karena $c > b$ maka $a + c > b$

∴ Terbukti bahwa $a + b > c$, $b + c > a$ dan $a + c > b$

Alternatif 2 :

Tanpa mengurangi keumuman misalkan maks (a, b, c) = c

Ketaksamaan (1) ekuivalen dengan

$4(a + b)(a + b - c) > 4(a - b)^2 + 5(a + b - c)^2$

Karena bilangan kudrat tidak mungkin negatif maka

$4(a + b)(a + b - c) > 0$ .... (3)

Karena a dan b positif maka ketaksamaan (3) akan terpenuhi bila $a + b > c$

Karena $c > a$ maka $b + c > a$ dan karena $c > b$ maka $a + c > b$

∴ Terbukti bahwa $a + b > c$, $b + c > a$ dan $a + c > b$

Alternatif 3 :

Tanpa mengurangi keumuman misalkan maks (a, b, c) = c

$5(a^2 + b^2 + c^2) < 6(ab+bc+ca)$

$(b + c - a)^2 + (a + c - b)^2 + (a + b - c)^2 < 4(ab + ac + bc) - 2(a^2 + b^2 + c^2) = 2((b + c - a)(c + a - b) + (b + c - a)(a + b - c) + (c + a - b)(a + b - c))$

Misalkan $x = b + c - a$, $y = c + a - b$ dan $z = a + b - c$.

$x^2 + y^2 + z^2 < 2(xy + xz + yz)$ .... (4)

Jelas bahwa karena maks (a, b, c) = c maka $x > 0$ dan $y > 0$. Akan dibuktikan bahwa $z > 0$

Jika $z \le 0$ maka

$x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + xz + yz) = (x - y)^2 + z^2 - 2z(x + y)$

Karena $z \le 0$ maka $2z(x + y) \le 0$ maka $x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + xz + yz) \ge 0$. Kontradiksi dengan ketaksamaan (4).Maka haruslah terpenuhi $z > 0$.

∴ Terbukti bahwa $a + b > c$, $b + c > a$ dan $a + c > b$

Alternatif 4 :

Tanpa mengurangi keumuman misalkan c = maks (a, b, c)

Ketaksamaan (1) ekuivalen dengan

$5(a + b + c)(a + b - c) > 10a^2 + 10b^2 + 4ab - 6ac - 6bc$ .... (5)

Misalkan $x = a + b - c$, $y = a + c - b$, $z = b + c - a$ maka $2a = x + y$, $2b = x + z$ dan $2c = y + z$

Ketaksamaan (5) akan menjadi

$10(x + y + z)x > 5(x + y)^2 + 5(x + z)^2 + 2(x + y)(x + z) - 3(x + y)(y + z) - 3(x + z)(y + z)$

$10(x + y + z)x > 12x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 6xy + 6xz - 4yz$

$10(x + y + z)x > 6x^2 + 6x(x + y + z) + 2(y - z)^2$

$4(x + y + z)x > 6x^2 + 2(y - z)^2$

Karena bilangan kuadrat tidak mungkin negatif maka

$4(x + y + z)x > 0$

Karena $a + b + c > 0$ maka $x + y + z > 0$ sehingga $x > 0$. Jadi $a + b - c > 0$

Karena $c > a$ maka $b + c > a$ dan karena $c > b$ maka $a + c > b$.

∴ Terbukti bahwa $a + b > c$, $b + c > a$ dan $a + c > b$

4. Karena saat dibaca dari kiri ke kanan, 0, 1, 2, 3, 4 membentuk barisan naik, sedangkan 5, 6, 7, 8, 9 membentuk barisan turun maka jelas bahwa angka paling kiri haruslah 0 atau 9. Tetapi karena 0 tidak berada di ujung kiri maka angka paling kiri haruslah 9.

   Alternatif 1 :

   Misalkan ujung paling kiri adalah tempat pertama. Maka angka-angka 5, 6, 7 dan 8 akan berada di 9 tempat lainnya. Banyaknya cara memilih 4 dari 9 tempat lainnya tersebut = ${}_9C_4$ = 126. Angka-angka 5, 6, 7 dan 8 akan ditempatkan di 4 tempat tersebut. Karena angka-angka 5, 6, 7, 8 tersebut telah ditentukan urutannya maka hanya ada 1 cara menempatkan angka-angka 5, 6, 7, dan 8 pada ke-4 tempat tersebut.

   Lima tempat tersisa akan diisi oleh angka-angka 0, 1, 2, 3 dan 4. Karena angka-angka 0, 1, 2, 3, dan 4 tersebut telah ditentukan urutannya maka hanya ada 1 cara menempatkan angka-angka 0, 1, 2, 3 dan 4 pada 5 tempat tersisa tersebut.

   ∴ Maka banyaknya susunan cantik = ${}_9C_4$ x 1 x 1 = 126 susunan.

   Alternatif 2 :

   Angka-angka 5, 6, 7 dan 8 akan ditempatkan pada 4 dari 9 tempat.

   Misalkan x_1 menyatakan banyaknya angka-angka yang terletak di antara angka 9 dan 8.
   x_2 menyatakan banyaknya angka-angka yang terletak di antara angka 8 dan 7.
   x_3 menyatakan banyaknya angka-angka yang terletak di antara angka 7 dan 6.
   x_4 menyatakan banyaknya angka-angka yang terletak di antara angka 6 dan 5.
   x_5 menyatakan banyaknya angka-angka yang terletak di sebelah kanan angka 5.

   Jelas bahwa x_1, x_2, x_3, x_4 dan x_5 adalah bilangan bulat tak negatif dan kurang dari 6 serta memenuhi persamaan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5$.

   Banyaknya pasangan bulat tak negatif (x_i, x_j) yang memenuhi $x_i + x_j = m$ adalah m + 1, yaitu (0, m), (1, m − 1), (2, m − 2), ⋯, (m, 0).

   Misalkan $x_i + x_j + x_k = n$. Karena x_k adalah bilangan bulat tak negatif maka banyaknya tripel bilangan bulat tak negatif (x_i, x_j, x_k) yang memenuhi adalah merupakan penjumlahan banyaknya pasangan (x_i, x_j) yang memenuhi $x_i + x_j = p$ dengan p = 0, 1, 2, ⋯, n.

   Banyaknya pasangan (x_1, x_2) yang memenuhi $x_1 + x_2 = 0$ ada 1.
   Banyaknya pasangan (x_1, x_2) yang memenuhi $x_1 + x_2 = 1$ ada 2.
   Banyaknya pasangan (x_1, x_2) yang memenuhi $x_1 + x_2 = 2$ ada 3.
   Banyaknya pasangan (x_1, x_2) yang memenuhi $x_1 + x_2 = 3$ ada 4.
   Banyaknya pasangan (x_1, x_2) yang memenuhi $x_1 + x_2 = 4$ ada 5.
   Banyaknya pasangan (x_1, x_2) yang memenuhi $x_1 + x_2 = 5$ ada 6.
   Banyaknya tripel (x_3, x_4, x_5) yang memenuhi $x_3 + x_4 + x_5 = 0$ ada 1.
   Banyaknya tripel (x_3, x_4, x_5) yang memenuhi $x_3 + x_4 + x_5 = 1$ ada 1 + 2 = 3
   Banyaknya tripel (x_3, x_4, x_5) yang memenuhi $x_3 + x_4 + x_5 = 2$ ada 1 + 2 + 3 = 6
   Banyaknya tripel (x_3, x_4, x_5) yang memenuhi $x_3 + x_4 + x_5 = 3$ ada 1 + 2 + 3 + 4 = 10
   Banyaknya tripel (x_3, x_4, x_5) yang memenuhi $x_3 + x_4 + x_5 = 4$ ada 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15
   Banyaknya tripel (x_3, x_4, x_5) yang memenuhi $x_3 + x_4 + x_5 = 5$ ada 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21
   Maka banyaknya susunan cantik = $1 \cdot 21 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 1$

   ∴ Maka banyaknya susunan cantik = 126.

5. Misalkan p = min (r, s) dan q = maks (r, s)

   Agar tidak ada dua benteng yang saling menyerang maka tidak boleh ada sedikitnya dua benteng terletak pada baris maupun lajur yang sama.

a. Jika M > min (r, s)
Jika min (r, s) = r maka sesuai dengan *Pigeon Hole Principle* maka akan ada sedikitnya dua benteng terletak pada satu baris yang sama. Maka akan terdapat dua benteng yang saling menyerang.
Jika min (r, s) = s maka sesuai dengan *Pigeon Hole Principle* maka akan ada sedikitnya dua benteng terletak pada satu lajur yang sama. Maka akan terdapat dua benteng yang saling menyerang.
Jadi, jelas bahwa $M \leq \min(r, s)$.
Misalkan $x_{i,j}$ menyatakan petak catur pada baris ke-i dan lajur ke-j.
Jika p = min (r, s) buah benteng diletakkan pada petak $x_{k,k}$ dengan k = 1, 2, 3, ⋯, p maka p buah benteng ini tidak akan saling menyerang.
∴ Maka M = min (r, s).

b. Jika min (r, s) = r
Cara meletakkan benteng pada baris ke-1 ada s cara.
Karena benteng pada baris ke-1 dan ke-2 tidak boleh pada satu lajur maka banyaknya cara meletakkan benteng pada baris ke-2 ada s − 1 cara.
Cara meletakkan benteng pada baris ke-3 ada s − 2 cara. Dan seterusnya.
Cara meletakkan benteng pada baris ke-r ada s − r + 1
Maka banyaknya cara meletakkan r benteng tersebut = $s \cdot (s-1) \cdot (s-2) \cdot \cdots \cdot (s-r+1)$
Banyaknya cara meletakkan r benteng tersebut = $\frac{s!}{(s-r)!} = \frac{(maks\ (r,s))!}{(maks\ (r,s) - \min(r,s))!}$
Jika min (r, s) = s
Cara meletakkan benteng pada lajur ke-1 ada r cara.
Karena benteng pada lajur ke-1 dan ke-2 tidak boleh pada satu baris maka banyaknya cara meletakkan benteng pada lajur ke-2 ada r − 1 cara.
Cara meletakkan benteng pada lajur ke-3 ada r − 2 cara. Dan seterusnya.
Cara meletakkan benteng pada lajur ke-s ada r − s + 1
Maka banyaknya cara meletakkan s benteng tersebut = $r \cdot (r-1) \cdot (r-2) \cdot \cdots \cdot (r-s+1)$
Banyaknya cara meletakkan r benteng tersebut = $\frac{r!}{(r-s)!} = \frac{(maks\ (r,s))!}{(maks\ (r,s) - \min(r,s))!}$
∴ Dapat disimpulkan bahwa banyaknya cara meletakkan M buah benteng pada pada P sehingga tidak ada dua benteng yang saling menyerang = $\frac{(maks\ (r,s))!}{(maks\ (r,s) - \min(r,s))!}$

6. $x = y^3 + y - 8$ .... (1)
$y = z^3 + z - 8$ .... (2)
$z = x^3 + x - 8$ .... (3)

Alternatif 1 :
Jika x < 0, berdasarkan persamaan (3) maka z < 0. Sedangkan jika z < 0, berdasarkan persamaan (2) maka y < 0 serta jika y < 0, berdasarkan persamaan (1) maka x < 0.
Maka dapat disimpulkan bahwa jika salah satu x, y atau z negatif maka x, y dan z semuanya negatif.

- Jika y > x
  $y - x = (z^3 - y^3) + (z - y)$
  Maka $(z - y)(z^2 + yz + y^2 + 1) > 0$

Karena jika salah satu dari y atau z negatif akan menyebabkan y dan z keduanya negatif maka jelas bahwa $z^2 + yz + y^2 + 1 > 0$. Akibatnya $z > y$.
Karena $z > y$ maka $z - y = (x^3 - z^3) + (x - z) > 0$
Maka $(x - z)(x^2 + xz + z^2 + 1) > 0$
Karena jika salah satu dari x atau z negatif akan menyebabkan x dan z keduanya negatif maka jelas bahwa $x^2 + xz + z^2 + 1 > 0$. Akibatnya $x > z$.
Maka dapat disimpulkan bahwa $x > z > y > x$. Kontradiksi.

- Jika $y < x$
  $y - x = (z^3 - y^3) + (z - y)$
  Maka $(z - y)(z^2 + yz + y^2 + 1) < 0$
  Karena jika salah satu dari y atau z negatif akan menyebabkan y dan z keduanya negatif maka jelas bahwa $z^2 + yz + y^2 + 1 > 0$. Akibatnya $z < y$.
  Karena $z < y$ maka $z - y = (x^3 - z^3) + (x - z) < 0$
  Maka $(x - z)(x^2 + xz + z^2 + 1) < 0$
  Karena jika salah satu dari x atau z negatif akan menyebabkan x dan z keduanya negatif maka jelas bahwa $x^2 + xz + z^2 + 1 < 0$. Akibatnya $x < z$.
  Maka dapat disimpulkan bahwa $x < z < y < x$. Kontradiksi.
- Jika $y = x$
  Berdasarkan persamaan (1) maka $x^3 - 8 = 0$ sehingga $x = y = 2$.
  $z = 2^3 + 2 - 8 = 2$

$\therefore$ Maka $x = y = z = 2$ adalah satu-satunya penyelesaian.

Alternatif 2 :

Perhatikan bahwa fungsi $f(t) = t^3 + t - 8$ adalah fungsi monoton naik.
Andaikan bahwa $x \neq y$.
Tanpa mengurangi keumuman misalkan $x < y$.
Karena f(t) merupakan fungsi monoton naik maka $z = f(x) < f(y) = x$.
Karena $z < x$ maka $y = f(z) < f(x) = z$ sehingga $y < z < x$ yang merupakan kontradiksi dengan pengandaian bahwa $x < y$.
Jadi $x = y$.
Dengan cara yang sama akan diperoleh bahwa $y = z$.
Dengan demikian $x = y = z$.
Maka $x = x^3 + x - 8$ sehingga $x^3 = 8$.
$x = y = z = 2$.
Setelah diuji ke persamaan (1), (2) dan (3) ternyata tripel (2, 2, 2) memenuhi ketiga persamaan tersebut.
Jadi (2, 2, 2) merupakan penyelesaian persamaan pada soal.

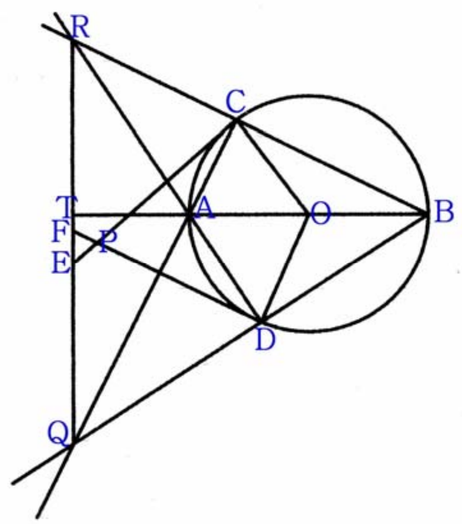
$\therefore$ Maka $x = y = z = 2$ adalah satu-satunya penyelesaian.

Alternatif 3 :

Jumlahkan persamaan (1), (2) dan (3) diperoleh
$x^3 + y^3 + z^3 = 24$ .... (4)
Tanpa mengurangi keumuman misalkan $x \geq y, z$.
Jadi $3x^3 \geq x^3 + y^3 + z^3 = 24$ sehingga $x \geq 2$.
Akibatnya $z = x^3 + x - 8 \geq 2$ dan $y = z^3 + z - 8 \geq 2$.
Karena $x \geq 2$, $y \geq 2$ dan $z \geq 2$ maka $x^3 + y^3 + z^3 \geq 24$.
Agar memenuhi persamaan (4) maka haruslah $x = y = z = 2$.
Setelah diuji ke persamaan (1), (2) dan (3) ternyata $x = y = z = 2$ memenuhi ketiga persamaan tersebut.

$\therefore$ Maka $x = y = z = 2$ adalah satu-satunya penyelesaian.

7.



Alternatif 1 :

b. Karena AB diameter dan C terletak pada lingkaran S maka $\angle ACB = 90^o$ sehingga QC tegak lurus BR.
Karena AB diameter dan D terletak pada lingkaran S maka $\angle ADB = 90^o$ sehingga RD tegak lurus BQ.
Karena RD dan QC merupakan garis tinggi dan keduanya melalui titik A maka perpanjangan BA haruslah merupakan garis tinggi ΔBRQ.
$\therefore$ Terbukti bahwa QR tegak lurus terhadap garis AB.

a. Misalkan $\angle CBA = \alpha$ dan $\angle ABD = \beta$ serta perpotongan AB dengan RQ adalah titik T.
Karena BT tegak lurus RQ maka $\angle ERB = 90^o - \alpha$
Karena O pusat lingkaran maka $\angle OCB = \alpha$ sedangkan $CQ \perp BC$ maka $\angle QCO = 90^o - \alpha$
EC adalah garis singgung di titik C maka FC tegak lurus CO sehingga $\angle ECQ = \alpha$
Karena QC tegak lurus CR maka $\angle ECR = 90^o - \alpha$.
Karena $\angle ERC = \angle ECR$ maka ER = EC.
Karena BT tegak lurus RQ maka $\angle FQD = 90^o - \beta$
Karena O pusat lingkaran maka $\angle ODB = \beta$ sedangkan $DR \perp BD$ maka $\angle RDO = 90^o - \beta$
FD adalah garis singgung di titik D maka ED tegak lurus DO sehingga $\angle EDA = \beta$
Karena RD tegak lurus DQ maka $\angle FDQ = 90^o - \beta$.
Karena $\angle FQD = \angle FDQ$ maka FD = FQ.
Karena RC tegak lurus CQ dan $\angle QRC = 90^o - \alpha$ maka $\angle EQC = \alpha$ sehingga ΔEQC sama kaki dengan EQ = EC = ER. Karena $\angle QCR = 90^o$ maka E adalah pusat lingkaran yang melalui titik Q, C dan R dengan QR adalah diameter sehingga E adalah pertengahan QR.
Karena QD tegak lurus DR dan $\angle RQD = 90^o - \beta$ maka $\angle FRD = B$ sehingga ΔFRD sama kaki dengan FR = FD = FQ. Karena $\angle RDQ = 90^o$ maka F adalah pusat lingkaran yang melalui titik Q, D dan R dengan QR adalah diameter sehingga F adalah pertengahan QR.
Akibatnya haruslah E dan F berhimpit. Tetapi garis singgung terhadap S di C dan D berpotongan di titik P, maka P = E = S sehingga P adalah pertengahan QR.
$\therefore$ Terbukti bahwa P, Q dan R segaris.

Alternatif 2 :

a. Karena AB diameter maka $\angle ACB = \angle ADB = 90^o$ sehingga $\angle CQB = \angle BRD = 90^o - \angle DBC$.
Misalkan O adalah pusat lingkaran S.
$\angle CPD = 180^o - \angle DOC = 180^o - 2\angle CAD = 2\angle CQB = 2\angle CQD$.

Karena $\angle CPD = 2\angle CQD$ maka titik C, D dan Q terletak pada satu lingkaran dengan P adalah pusat lingkaran tersebut.
Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa P juga merupakan pusat lingkaran yang melalui titik C, D dan R.
Karena P adalah pusat sebuah lingkaran yang melalui titik-titik Q, D, C dan R maka ΔPCR dan ΔPQD keduanya adalah segitiga sama kaki.
$\angle DPQ + \angle RPC = (180^o - 2\angle PDQ) + (180^o - 2\angle PCR) = 2((90^o - \angle PDQ) + (90^o - \angle PCR))$
Karena RD tegak lurus BQ dan QC tegak lurus BR maka
$\angle DPQ + \angle RPC = 2(\angle RDP + \angle PCQ)$
Karena $\angle ADB = \angle ACB = 90^o$ maka $\angle RDP = \angle ODB$ dan $\angle PCQ = \angle OCB$.
Karena ΔOCB dan ΔODB keduanya sama kaki maka $\angle ODB = \angle OBD$ dan $\angle OCB = \angle OBC$.
$\angle DPQ + \angle RPC = 2(\angle OBD + \angle OBC) = 2\angle DBC = \angle DOC = 180^o - \angle CPD$
Sehingga didapat $\angle DPQ + \angle RPC + \angle CPD = 180^o$.
$\therefore$ Akibatnya haruslah titik-titik R, P dan Q segaris (terbukti).

b. Karena AB diameter dan C terletak pada lingkaran S maka $\angle ACB = 90^o$ sehingga QC tegak lurus BR.
Karena AB diameter dan D terletak pada lingkaran S maka $\angle ADB = 90^o$ sehingga RD tegak lurus BQ.
Karena RD dan QC merupakan garis tinggi dan keduanya melalui titik A maka perpanjangan BA haruslah merupakan garis tinggi ΔBRQ.
$\therefore$ Terbukti bahwa QR tegak lurus terhadap garis AB.

8. Alternatif 1 :

* Jika $m^2 \neq n^2$
Untuk suatu bilangan bulat $a > |m^2 - n^2|$ tidak mungkin merupakan faktor dari $m^2 - n^2$.
Misalkan t adalah faktor dari $m^2 - n^2$ maka jelas bahwa $-|m^2 - n^2| \leq t \leq |m^2 - n^2|$.
Maka berhingga banyaknya kemungkinan t yang memenuhi.
Misalkan $k^2 + 2kn + m^2 = p^2$ untuk suatu bilangan asli p.
$(k + n)^2 + m^2 - n^2 = p^2$
$m^2 - n^2 = (p + k + n)(p - (k + n))$
Maka p + k + n adalah faktor dari $m^2 - n^2$.
Misalkan p + k + n = t untuk suatu bilangan bulat tak nol t maka $p - (k + n) = \frac{m^2 - n^2}{t}$.
Jika kedua persamaan tersebut dikurangkan akan didapat $k = -n + \frac{t}{2} - \frac{m^2 - n^2}{2t}$
Karena berhingga banyaknya kemungkinan nilai t maka akan berhingga juga banyaknya bilangan bulat k yang memenuhi. Kontradiksi karena dinyatakan bahwa ada tak berhingga banyaknya bilangan bulat k yang memenuhi.
* Jika $m^2 = n^2$
$k^2 + 2kn + m^2 = (k + n)^2$
Maka berapapun bilangan bulat k akan menyebabkan $k^2 + 2kn + m^2$ merupakan bilangan kuadrat sempurna untuk suatu bilangan asli m dan n.
Sehingga ada tak berhingga banyaknya bilangan bulat k yang memenuhi.

Maka didapat bahwa $k^2 + 2kn + m^2$ akan merupakan bilangan kuadrat sempurna jika $m^2 = n^2$.
$\therefore$ Karena m dan n keduanya bilangan asli maka $k^2 + 2kn + m^2$ akan merupakan bilangan kuadrat sempurna jika m = n (terbukti).

Alternatif 2 :

Andaikan $m \neq n$ sehingga $m^2 - n^2 \neq 0$.

Misalkan k_1, k_2, ⋯ dan s_1, s_2, ⋯ adalah barisan-barisan bilangan bulat demikian sehingga $k_i^2 + 2k_in + m^2 = s_i^2$ untuk semua i = 1, 2, ⋯

Maka $m^2 - n^2 = s_i^2 - k_i^2 + 2k_in - n^2$

$m^2 - n^2 = s_i^2 - (k_i + n)^2$

$m^2 - n^2 = (s_i - k_i - n)(s_i + k_i + n)$

Akibatnya

$\left|m^2 - n^2\right| \geq s_i + k_i + n$ dan $\left|m^2 - n^2\right| \geq -(s_i - k_i - n)$

Sehingga

$2\left|m^2 - n^2\right| \geq (s_i + k_i + n) - (s_i - k_i - n) = 2k_i + 2n$

$\left|m^2 - n^2\right| \geq k_i + n$

$\left|m^2 - n^2\right| - n \geq k_i$ untuk semua I = 1, 2, ⋯

Karena m dan n adalah suatu nilai tetap maka hanya ada 1 nilai k_i untuk semua i = 1, 2, ⋯ kontradiksi dengan kenyataan bahwa ada tak berhingga banyaknya bilangan bulat k yang memenuhi.

Jadi haruslah m = n.