SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA TAHUN 2006

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2007

Bidang Matematika

Waktu : 3,5 Jam

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL

DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH

DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS

TAHUN 2006

OLIMPIADE MATEMATIKA NASIONAL
SELEKSI TINGKAT KOTA/KABUPATEN
TAHUN 2006

Bagian Pertama

Pilih satu jawaban yang benar. Dalam hal terdapat lebih dari satu jawaban yang benar, pilih jawaban yang paling baik.

1. Jumlah tiga bilangan prima pertama yang lebih dari 50 adalah
   A. 169 B. 171 C. 173 D. 175 E. 177

2. Dalam sebuah kotak terdapat 5 bola merah dan 10 bola putih. Jika diambil dua bola secara bersamaan, peluang memperoleh dua bola berwarna sama adalah
   A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{2}{21}$ D. $\frac{10}{21}$ E. $\frac{11}{21}$

3. Jika $X = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}$, maka X =
   A. $\frac{2}{9}$ B. $\frac{5}{12}$ C. $\frac{4}{9}$ D. $\frac{9}{4}$ E. $\frac{12}{5}$

4. Pada segitiga ABC, titik F membagi sisi AC dalam perbandingan 1 : 2. Misalkan G titik tengah BF dan E titik perpotongan antara sisi BC dengan AG. Maka titik E membagi sisi BC dalam perbandingan
   A. 1 : 4 B. 1 : 3 C. 2 : 5 D. 4 : 11 E. 3 : 8

5. Dalam suatu pertemuan terjadi 28 jabat tangan (salaman). Setiap dua orang salaing berjabat tangan paling banyak sekali. Banyaknya orang yang hadir dalam pertemuan tersebut paling sedikit adalah
   A. 28 B. 27 C. 14 D. 8 E. 7

6. Gaji David lebih banyak 20% daripada gaji Andika. Ketika Andika memperoleh kenaikan gaji, gajinya menjadi lebih banyak 20% daripada gaji David. Persentase kenaikan gaji Andika adalah
   A. 0,44 B. 20 C. 44 D. 144 E. tidak bisa dipastikan

7. Misalkan T adalah himpunan semua titik pada bidang-xy yang memenuhi $|x| + |y| \leq 4$. Luas daerah T adalah
   A. 4 B. 8 C. 12 D. 16 E. 32

8. Definisikan a*b = a + b + 1 untuk semua bilangan bulat a, b. Jika p memenuhi a*p = a, untuk setiap bilangan bulat a, maka p =
   A. –1 B. 0 C. 1 D. 2 E. tidak ada yang memenuhi

9. Setiap dong adalah ding, dan beberapa dung juga dong.
   X : Terdapat dong yang juga ding sekaligus dung
   Y : Beberapa ding adalah dung
   Z : Terdapat dong yang bukan dung
   A. Hanya X yang benar   C. Hanya Z yang benar   E. X, Y dan Z semuanya salah
   B. Hanya Y yang benar   D. X dan Y keduanya benar

10. Banyaknya solusi pasangan bilangan bulat positif persamaan $3x + 5y = 501$ adalah
    A. 33   B. 34   C. 35   D. 36   E. 37

Bagian Kedua

Isikan hanya jawaban saja pada tempat yang disediakan

11. Diketahui $a + (a + 1) + (a + 2) + \cdots + 50 = 1139$. Jika a bilangan positif, maka a = ·····

12. Di antara lima orang gadis, Arinta, Elsi, Putri, Rita, dan Venny, dua orang memakai rok dan tiga orang memakai celana panjang. Arinta dan Putri mengenakan jenis pakaian yang sama. Jenis pakaian Putri dan Esi berbeda, demikian pula dengan Elsi dan Rita. Kedua gadis yang memakai rok adalah ······

13. Barisan 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, ··· terdiri dari semua bilangan asli yang bukan kuadrat atau pangkat tiga bilangan bulat. Suku ke-250 barisan adalah ·····

14. Jika $f(xy) = f(x + y)$ dan $f(7) = 7$, maka $f(49)$ = ····

15. Pada sebuah barisan aritmatika, nilai suku ke-25 tiga kali nilai suku ke-5. Suku yang bernilai dua kali nilai suku pertama adalah suku ke ······

16. Dimas membeli majalah setiap 5 hari sekali, sedangkan Andre membeli majalah setiap 8 hari sekali. Kemarin Dimas membeli majalah. Andre membeli majalah hari ini. Keduanya paling cepat akan membeli majalah pada hari yang sama ····· hari lagi.

17. Nanang mencari semua bilangan empat-angka yang selisihnya dengan jumlah keempat angkanya adalah 2007. Banyaknya bilangan yang ditemukan Nanang tidak akan lebih dari ······

18. Parabola $y = ax^2 + bx + c$ memiliki puncak dengan koordinat (4, 2). Jika titik (2, 0) terletak pada parabola, maka abc = ······

19. Sebuah garis ℓ_1 mempunyai kemiringan -2 dan melalui titik $(p, -3)$. Sebuah garis lainnya ℓ_2, tegaklurus terhadap ℓ_1 di titik (a, b) dan melalui titik (6, p). Bila dinyatakan dalam p, maka a =

20. Pada segitiga ABC yang tumpul di C, titik M adalah titik tengah AB. Melalui C dibuat garis tegak lurus pada BC yang memotong AB di titik E. Dari M tarik garis memotong BC tegak lurus di D. Jika luas segitiga ABC adalah 54 satuan luas, maka luas segitiga BED adalah ·····

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA 2006
TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2007

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

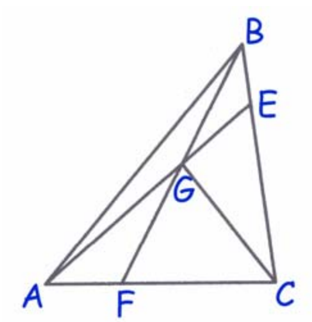
BAGIAN PERTAMA

1. (Jawaban : C)
   Tiga bilangan prima pertama yang lebih besar dari 50 adalah 53, 59 dan 61.
   53 + 59 + 61 = 173
   $\therefore$ Jumlah tiga bilangan prima pertama yang lebih besar dari 50 = **173**

2. (Jawaban : E)
   Kemungkinan kedua bola tersebut adalah keduanya berwarna merah atau keduanya berwarna putih.
   Peluang = $\frac{{}_5C_2}{{}_{15}C_2} + \frac{{}_{10}C_2}{{}_{15}C_2}$
   $\therefore$ Peluang = $\frac{11}{21}$

3. (Jawaban : B)
   $$X = \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2+\frac{2}{5}} = \frac{5}{12}$$
   $\therefore$ X = $\frac{5}{12}$

4. (Jawaban : B)



   Misalkan tanda [KML] menyatakan luas ΔKML
   Misalkan [ABC] = X. Karena AF : FC = 1 : 2 maka [ABF]= $\frac{1}{3}$[ABC] = $\frac{1}{3}$X
   Karena G pertengahan BF maka [ABG]= ½ [ABF]= $\frac{1}{6}$X = [AFG]
   Karena AF : FC = 1 : 2 maka [CGF]= 2 [AFG]= $\frac{1}{3}$X sehingga [CGB] = $\frac{1}{3}$X
   Misalkan [CGE] = P dan [EGB] = Q

$$\frac{BE}{EC} = \frac{Q}{P} = \frac{Q + X\ /\ 6}{P\ + X\ /\ 3 + X\ /\ 6}$$

6PQ + 3XQ = 6PQ + PX

$\frac{Q}{P} = \frac{1}{3}$ sehingga BE : EC = 1 : 3

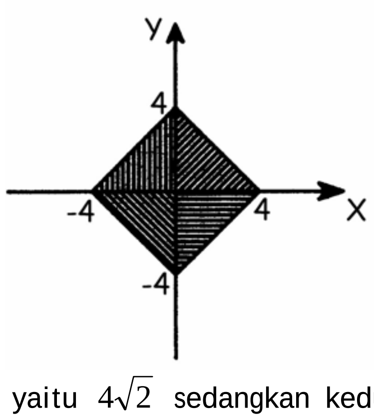
∴ Titik E membagi BC dalam perbandingan = **1 : 3**

5. (Jawaban : D)
   Misalkan banyaknya orang = n
   ${}_nC_2$ = 28, maka $\frac{n(n-1)}{2} = 28$
   $n^2 - n - 56 = 0$, maka $(n - 8)(n + 7) = 0$
   ∴ Banyaknya orang yang hadir = **8**

6. (Jawaban : C)
   Misal gaji Andika sebelum kenaikan = A dan setelah memperoleh kenaikan gaji gajinya menjadi A_x.
   Gaji David sebelum kenaikan = 1,2A .
   A_x = 1,2 · (1,2A) = 1,44A
   Kenaikan gaji Andika = 1,44A – A = 0,44A
   ∴ Kenaikan gaji Andika adalah **44 %**

7. (Jawaban : E)
   $|x| + |y| \leq 4$
   - Jika x dan y di kuadran I maka $|x|$ = x dan $|y|$ = y. Persamaannya adalah $x + y \leq 4$
   - Jika x dan y di kuadran II maka $|x|$ = –x dan $|y|$ = y. Persamaannya adalah $-x + y \leq 4$
   - Jika x dan y di kuadran III maka $|x|$ = –x dan $|y|$ = –y. Persamaannya adalah $-x - y \leq 4$
   - Jika x dan y di kuadran IV maka $|x|$ = x dan $|y|$ = –y. Persamaannya adalah $x - y \leq 4$

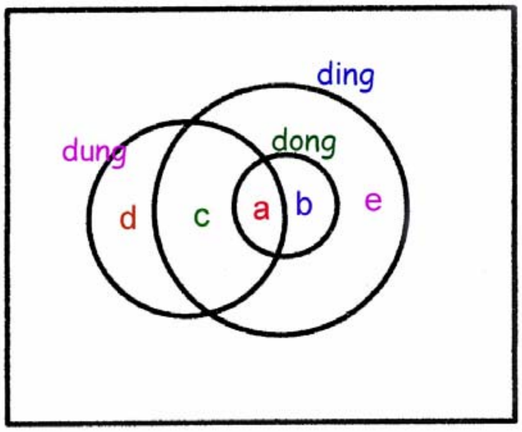
   Gambar persamaan-persamaan tersebut adalah :



   Karena panjang sisi-sisinya sama yaitu $4\sqrt{2}$ sedangkan kedua diagonalnya saling tegak lurus maka luasan berupa persegi.
   Luas daerah T = $4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}$
   ∴ Luas daerah T = **32**

8. (Jawaban : A)
   a * b = a + b + 1
   a * p = a + p + 1
   a = a + p + 1
   ∴ p = −**1**

9. (Jawaban : D)



Karena setiap dong adalah ding maka dong merupakan himpunan bagian dari ding.
Karena beberapa dung juga dong maka dung dan dong memiliki irisan. Maka a pasti ada.
Karena a pasti ada maka a merupakan dong yang ding sekaligus dung (pernyataan X benar)
Karena a pasti ada maka a adalah merupakan ding yang sekaligus dung (pernyataan Y benar).
Dong yang bukan dung adalah b. Karena b belum pasti ada maka pernyataan Z belum dapat dibuktikan kebenarannya.
∴ **X dan Y keduanya benar.**

10. (Jawaban : A)
    3x + 5y = 501
    5y = 3(167 − x)
    Karena 3 dan 5 relatif prima maka y = 3k dan 167 − x = 5k untuk suatu k bulat positif.
    Jelas bahwa $0 < 5y \le 501$ dan $0 < 3x \le 501$, maka $0 < y \le 100$ dan $0 < x \le 167$
    Karena terdapat 100 nilai y yang memenuhi dan 167 nilai x yang memenuhi maka banyaknya nilai k yang memenuhi adalah $\left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor = 33$ atau $\left\lfloor \frac{167}{5} \right\rfloor = 33$ yaitu $1 \le k \le 33$.
    Contoh : Jika k = 1 maka y = 3 dan x = 162 memenuhi. (k, x, y) = (2,157,6) ; (3,152,9) ; ··· juga memenuhi.
    ∴ Banyaknya pasangan (x, y) yang memenuhi adalah **33**

BAGIAN KEDUA

11. $a + (a + 1) + (a + 2) + \cdots + 50 = 1139$.
    Banyaknya bilangan a, $(a + 1)$, $(a + 2)$, $\cdots$, 50 adalah $50 - a + 1 = 51 - a$
    $\frac{1}{2}(51 - a) \cdot (a + 50) = 1139$, maka $a^2 - a - 272 = 0$ sehingga $(a - 17)(a + 16) = 0$
    $\therefore$ **a = 17**

12. Karena pakaian Elsi baik dengan Putri maupun Rita berbeda maka Putri dan Rita memakai pakaian yang sama.
    Karena Arinta, Putri dan Rita memakai pakaian yang sama maka ketiganya tidak mungkin mamakai rok. Maka Arinta, Putri dan Rita memakai celana panjang sedangkan Elsi dan Venny memakai rok.
    $\therefore$ Kedua gadis yang memakai rok adalah **Elsi dan Venny.**

13. Bilangan kuadrat yang sekaligus juga bilangan pangkat tiga adalah bilangan pangkat enam.
    Bilangan kuadrat ≤ 265 adalah 1^2, 2^2, $\cdots$, 16^2 ada sebanyak 16 bilangan.
    Bilangan pangkat tiga ≤ 265 adalah 1^3, 2^3, $\cdots$, 6^3 ada sebanyak 6 bilangan.
    Bilangan pangkat enam ≤ 265 adalah 1^6 dan 2^6 ada sebanyak 2 bilangan.
    Banyaknya bilangan yang bukan pangkat dua atau pangkat tiga yang $\leq 265 = 16 + 6 - 2 = 20$.
    Maka 265 adalah suku ke $265 - 20 = 245$.
    Lima bilangan setelah 265 yang bukan bilangan kuadrat atau pangkat tiga adalah 266, 267, 268, 269 dan 270.
    $\therefore$ Suku ke-250 dari barisan tersebut adalah **270**

14. $f(xy) = f(x + y)$
    Jika $x = n$ dan $y = 1$ maka $f(n) = f(n + 1)$
    Maka $f(49) = f(48) = f(47) = f(46) = \cdots = f(7)$
    $\therefore$ $f(49) =$ **7**

15. $u_{25} = 3(u_5)$, maka $a + 24b = 3(a + 4b)$ sehingga $a = 6b$
    $u_n = a + (n - 1)b = 2u_1 = 2a$
    $6b + (n - 1)b = 2(6b)$, maka $n = 7$
    $\therefore$ Suku tersebut adalah suku ke-**7**

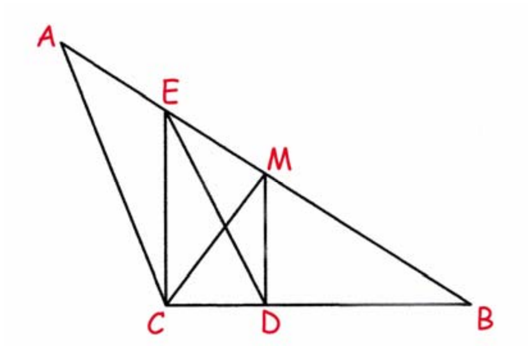
16. Misalkan hari ini adalah hari ke-0
    Karena kemarin Dimas membeli majalah sedangkan Dimas membeli setiap 5 hari sekali maka Dimas akan membeli majalah pada hari $h_1 = 5k + 4$ dengan k bilangan asli.
    Karena hari ini Andre membeli majalah sedangkan Andre membeli setiap 8 hari sekali maka Andre akan membeli majalah pada hari $h_2 = 8n$ dengan n bilangan asli.
    Mereka akan membeli majalah pada hari yang sama jika $5k + 4 = 8n$.
    Karena 4 dan 8 keduanya habis dibagi 4 maka k harus habis dibagi 4. Nilai k terkecil adalah 4.
    $h_1 = h_2 = 5(4) + 4 = 24$
    $\therefore$ Maka mereka akan membeli majalah pada hari yang sama paling cepat **24** hari lagi.

17. Misalkan bilangan tersebut adalah 1000a + 100b + 10c + d
    Maka 1000a + 100b + 10c + d – a – b – c – d = 2007
    999a + 99b + 9c = 2007, maka 111a + 11b + c = 223
    Karena a > 0 dan 111a < 223 maka a = 1 atau 2.
    Jika a = 1 maka 11b + c = 112 > 11(9) + 9 = 108 (tidak ada nilai b dan c yang memenuhi).
    Jika a = 2 maka 11b + c = 1. Nilai b dan c yang memenuhi hanya b = 0 dan c = 1.
    Tripel (a, b, c) yang memenuhi hanya ada 1 kemungkinan yaitu (2, 0, 1). Nilai d yang memenuhi ada 10 kemungkinan yaitu 0, 1, 2, ··, 9.
    Bilangan 4 angka tersebut yang memenuhi ada 10 yaitu 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, ···, 2019.
    ∴ Banyaknya bilangan yang ditemukan Nanang tidak akan lebih dari **10.**

18. Persamaan parabola yang berpuncak di (x_p, y_p) adalah $y = a(x - x_p)^2 + y_p$.
    Karena titik puncak parabola di (4, 2) maka $y = a(x - 4)^2 + 2$
    Karena titik (2, 0) terletak pada parabola maka :
    $0 = a(2 - 4)^2 + 2$, maka $a = -½$
    Persamaan parabola tersebut adalah $y = -½(x - 4)^2 + 2 = -½x^2 + 4x - 6$
    $a = -½$; $b = 4$ dan $c = -6$
    ∴ **abc =** 12

19. Persamaan garis ℓ_1 adalah $y + 3 = -2(x - p)$
    Karena ℓ_2 tegak lurus ℓ_1 maka gradien garis ℓ_2 adalah ½.
    Persamaan garis ℓ_2 adalah $y - p = ½(x - 6)$
    Kedua garis melalui (a, b) maka :
    $b + 3 = -2(a - p)$ dan $b - p = ½(a - 6)$
    $3 + p = -2(a - p) - ½(a - 6)$
    $6 + 2p = -4a + 4p - a + 6$
    ∴ $a = \frac{2}{5}\mathbf{p}$

20. Misalkan ∠ABC = β
    Luas ΔABC = ½ · BA · BC sin β = 54
    Karena MD sejajar EC maka ΔBMD sebangun dengan ΔBEC
    $$\frac{BM}{BD} = \frac{BE}{BC}$$
    BM · BC = BD · BE
    Luas ΔBED = ½ · BE · BD sin β = ½ · BM · BC sin β
    Luas ΔBED = ½ (½ · BA · BC sin β)
    Luas ΔBED = ½ Luas ΔABC
    ∴ Luas segitiga BED adalah **27 satuan luas.**



SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2006

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2007

Bidang Matematika

Bagian Pertama

Waktu : 90 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL

DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH

DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS

TAHUN 2006

OLIMPIADE MATEMATIKA
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2006

BAGIAN PERTAMA

1. Hasil penjumlahan semua bilangan bulat di antara $\sqrt[3]{2006}$ dan $\sqrt{2006}$ adalah ····
2. Pada trapesium ABCD, sisi AB sejajar dengan DC. Sebuah lingkaran yang menyinggung keempat sisi trapesium dapat dibuat. Jika AB = 75 dan DC = 40, maka keliling trapesium ABCD = ········
3. Himpunan semua x yang memenuhi $(x - 1)^3 + (x - 2)^2 = 1$ adalah ·····
4. Bilangan prima dua angka terbesar yang merupakan jumlah dua bilangan prima lainnya adalah ····
5. Afkar memilih suku-suku barisan geometri takhingga 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ··· untuk membuat barisan geometri takhingga baru yang jumlahnya $\frac{1}{7}$. Tiga suku pertama pilihan Afkar adalah ·····
6. Luas sisi-sisi sebuah balok adalah 486, 486, 243, 243, 162, 162. Volume balok tersebut adalah ·····
7. Nilai maksimum fungsi f(x) = $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x+3}$ adalah ····
8. Diberikan fungsi f(x) = $\left|\,|x - 2| - a\right| - 3$. Jika grafik f memotong sumbu-x tepat di tiga titik, maka a = ····
9. Untuk bilangan asli n, tuliskan s(n) = 1 + 2 + ··· + n dan p(n) = 1 x 2 x ··· x n. Bilangan genap n terkecil yang memenuhi p(n) habis dibagi s(n) adalah ····
10. Jika $|x| + x + y = 10$ dan $x + |y| - y = 12$, maka x + y = ······
11. Sebuah himpunan tiga bilangan asli disebut *himpunan aritmatika* jika salah satu unsurnya merupakan rata-rata dari dua unsur lainnya. Banyaknya subhimpunan aritmatika dari {1,2,3,···,8} adalah ····
12. Dari setiap bilangan satu-angka a, bilangan N dibuat dengan menyandingkan ketiga bilangan a + 2, a + 1, a yaitu N = $\overline{(a+2)(a+1)a}$. Sebagai contoh, untuk a = 8, N = 1098. Kesepuluh bilangan N semacam itu memiliki faktor persekutuan terbesar ·····
13. Jika $x^2 + \frac{1}{x^2} = 47$, maka $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} =$ ············

14. Sebuah kelas akan memilih seorang murid di antara mereka untuk mewakili kelas tersebut. Setiap murid mempunyai kesempatan yang sama untuk dipilih. Peluang seorang murid laki-laki terpilih sama dengan $\frac{2}{3}$ kali peluang terpilihnya seorang murid perempuan. Persentase murid laki-laki di kelas tersebut adalah ····

15. Pada segitiga ABC, garis bagi sudut A memotong sisi BC di titik D. Jika AB = AD = 2 dan BD = 1, maka CD = ·····

16. Jika $(x - 1)^2$ membagi $ax^4 + bx^3 + 1$, maka ab = ····

17. Dari titik O ditarik dua setengah-garis (sinar) ℓ_1 dan ℓ_2 yang membentuk sudut lancip α. Titik – titik berbeda A_1, A_3, A_5 terletak pada garis ℓ_2, sedangkan titik-titik A_2, A_4, A_6 terletak di ℓ_1. Jika $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4O = OA_5 = A_5A_6 = A_6A_1$, maka α = ·····

18. Banyaknya bilangan 7-angka berbeda yang dapat dibentuk dengan cara mengubah susunan angka 2504224 adalah ····

19. Evan membuat sebuah barisan bilangan asli a_1, a_2, a_3, ··· yang memenuhi $a_{k+1} - a_k = 2(a_k - a_{k-1}) - 1$, untuk k = 2, 3, ···, dan $a_2 - a_1 = 2$. Jika 2006 muncul dalam barisan, nilai a_1 terkecil yang mungkin adalah ·····

20. Pada segitiga ABC, garis-garis berat dari titik sudut B dan titik sudut C saling berpotongan tegak lurus. Nilai minimum ctg B + ctg C adalah ·····

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2006

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2007

Bidang Matematika

Bagian Kedua

Waktu : 120 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2006

OLIMPIADE MATEMATIKA
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2006

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan segitiga ABC siku-siku di B. Garis tinggi dari B memotong sisi AC di titik D. Jika titik E dan F berturut-turut adalah titik tengah BD dan CD, buktikan bahwa $AE \perp BF$.

2. Misalkan m bilangan asli yang memenuhi $1003 < m < 2006$. Diberikan himpunan bilangan asli $S = \{1, 2, 3, \cdots, m\}$, berapa banyak anggota S harus dipilih agar selalu terdapat paling sedikit satu pasang anggota terpilih yang hasil tambahnya 2006 ?

3. Misalkan $d = \text{FPB}(7n + 5, 5n + 4)$, dimana n adalah bilangan asli.
   (a) Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku d = 1 atau 3.
   (b) Buktikan bahwa d = 3 jika dan hanya jika $n = 3k + 1$, untuk suatu bilangan asli k.

4. Win memiliki dua koin. Ia akan melakukan prosedur berikut berulang-ulang selama ia masih memiliki koin : lempar semua koin yang dimilikinya secara bersamaan; setiap koin yang muncul dengan sisi angka akan diberikannya kepada Albert. Tentukan peluang bahwa Win akan mengulangi prosedur ini lebih dari tiga kali.

5. Misalkan a, b, c bilangan-bilangan asli. Jika semua akar ketiga persamaan
$$x^2 - 2ax + b = 0$$
$$x^2 - 2bx + c = 0$$
$$x^2 - 2cx + a = 0$$
   adalah bilangan asli, tentukan a, b dan c.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2007
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2006

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

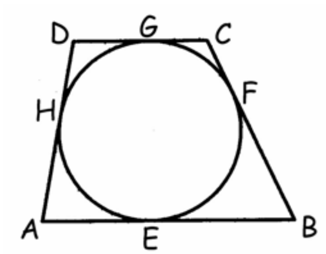
Bagian Pertama

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN PERTAMA

1. $12^3 = 1728$; $13^3 = 2197$; $44^2 = 1936$; $45^2 = 2025$
   $\sqrt[3]{2006} < m < \sqrt{2006}$ dapat disederhanakan menjadi $13 \le m \le 44$ untuk m bulat
   Himpunan m yang memenuhi = {13, 14, 15, ⋯, 44}
   13 + 14 + 15 + ⋯ + 44 = 912
   ∴ Penjumlahan semua bilangan yang memenuhi sama dengan **912.**

2. Jika titik P di luar lingkaran dan garis yang ditarik dari titik P menyinggung lingkaran tersebut di titik Q dan R maka PQ = PR



   Dari gambar di atas didapat DG = DH ; CG = CF ; BF = BE ; AE = AH
   Keliling = AE + AH + BE + BF + CF + CG + DG + DH = 2 (DG + CG + AE + BE)
   Keliling = 2(DC + AB) = 2(40 + 75)
   ∴ Keliling trapesium = **230**

3. $(x - 1)^3 + (x - 2)^2 = 1$
   $(x - 1)^3 = 1 - (x - 2)^2 = (1 - (x - 2))(1 + (x - 2)) = (3 - x)(x - 1)$
   $(x - 1)((x - 1)^2 - (3 - x)) = 0$
   $(x - 1)(x^2 - x - 2) = 0$
   $(x - 1)(x + 1)(x - 2) = 0$
   ∴ Himpunan semua nilai x yang memenuhi adalah **{−1, 1, 2}**

4. Misalkan a, b dan c adalah ketiga bilangan prima tersebut dengan a = b + c
   Bilangan prima genap hanya ada satu yaitu 2.
   Karena a > 2 maka a pasti ganjil yang menyebabkan paritas b dan c harus berbeda.
   Tanpa mengurangi keumuman misalkan $c \le b$ maka c = 2
   a = b + 2 sehingga a − b = 2
   Karena a − b = 2 maka terdapat tepat 1 bilangan asli di antara a dan b. Misalkan bilangan tersebut adalah k. Maka b, k dan a adalah 3 bilangan asli berurutan. Salah satunya harus habis dibagi 3. Karena b dan a bilangan prima lebih dari 3 maka k habis dibagi 3. Karena k juga genap maka k habis dibagi 6.
   Jika k = 16 · 6 = 96 maka b = 95 bukan prima. Jika k = 15 · 6 = 90 maka a = 91 bukan prima. Jika k = 14 · 6 = 84 maka a = 85 bukan prima. Jika k = 13 · 6 = 78 maka b = 77 bukan prima. Jika k = 12 · 6 = 72 maka a = 73 dan b = 71 yang memenuhi keduanya prima
   ∴ Bilangan prima dua angka terbesar yang memenuhi adalah **73.**

5. $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

Misalkan bilangan pertama yang dipilih Afkar adalah $(½)^a$ untuk a bilangan bulat tak negatif dan rasio, r = $(½)^b$ untuk b bilangan asli maka :

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^a}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^b} = \frac{1}{7}$$

Karena b asli maka ½ ≤ 1 − $(½)^b$ < 1

$$\frac{1}{14} \le \left(\frac{1}{2}\right)^a < \frac{1}{7}$$

Nilai a yang memenuhi hanya a = 3 sehingga b = 3

Maka 3 suku pertama yang dipilih Afkar adalah $(½)^3$, $(½)^6$ dan $(½)^9$

∴ Tiga suku pertama yang dipilih Afkar adalah $\frac{1}{8}$**,** $\frac{1}{64}$**,** $\frac{1}{512}$**.**

6. Misalkan panjang sisi-sisi balok tersebut adalah a, b dan c.

Tanpa mengurangi keumuman misalkan ab = 486 = $2 \cdot 3^5$; ac = 243 = 3^5 ; bc = 162 = $2 \cdot 3^4$

(ab)(ac)(bc) = $(abc)^2 = 2^2 \cdot 3^{14}$

abc = $2 \cdot 3^7$ = 4374

∴ Volume balok = **4374**

7. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x+3}$, maka $f(x) = 3^{-x^2+4x-3}$

Agar f(x) maksimum maka y = $-x^2 + 4x - 3$ harus maksimum.

y = $-x^2 + 4x - 3 = -(x-2)^2 + 1$

y maksimum = 1 saat x = 2

$f(x)_{maksimum}$ = 3

∴ $f(x)_{maksimum}$ = **3**

8. f(x) = $\left|\,|x-2| - a\right| - 3$

f memotong sumbu x maka $\left|\,|x-2| - a\right| - 3 = 0$

$\left|\,|x-2| - a\right| = 3$

$|x-2| - a = 3$ atau $|x-2| - a = -3$

$|x-2| = a + 3$ atau $|x-2| = a - 3$

Jika a + 3 = 0 maka $|x-2| = 0$ hanya ada 1 penyelesaian. Sebaliknya jika a + 3 ≠ 0 maka penyelesaian $|x-2| = a + 3$ ada 2 penyelesaian yaitu x − 2 = a + 3 atau x − 2 = −(a + 3)

Hal yang sama untuk persamaan $|x-2| = a - 3$

Maka jika a = −3 akan menyebabkan hanya ada 1 penyelesaian x untuk persamaan $|x-2| = a + 3$ namun ada dua nilai x untuk penyelesaian $|x-2| = a - 3$

Sedangkan jika a = 3 akan menyebabkan hanya ada 1 penyelesaian x untuk persamaan $|x - 2| = a - 3$ namun ada dua nilai x untuk penyelesaian $|x - 2| = a + 3$

∴ Nilai a yang membuat grafik f memotong sumbu x tepat di 3 titik adalah **a = 3 atau a = –3.**

9. s(n) = 1 + 2 + ⋯ + n = ½n(n + 1)
   p(n) = 1 x 2 x ⋯ x n
   Karena n genap maka ½n bilangan bulat.
   Karena n + 1 > 1 ; n + 1 > 2 ; ⋯ ; n + 1 > n maka agar p(n) habis dibagi s(n) maka n + 1 tidak boleh prima.
   Bilangan genap terkecil yang menyebabkan n + 1 bukan prima adalah 8.
   ∴ Bilangan genap terkecil yang memenuhi p(n) habis dibagi s(n) adalah **8.**

10. $|x| + x + y = 10$ dan $x + |y| - y = 12$
    * Jika x dan y di kuadran I maka $|x| = x$ dan $|y| = y$
      2x + y = 10 dan x = 12 sehingga y = –14 (tidak memenuhi (x, y) di kuadran I)
    * Jika x dan y di kuadran II maka $|x| = -x$ dan $|y| = y$
      y = 10 dan x = 12 (tidak memenuhi (x, y) di kuadran II)
    * Jika x dan y di kuadran III maka $|x| = -x$ dan $|y| = -y$
      y = 10 dan x – 2y = 12 sehingga x = 32 (tidak memenuhi (x, y) di kuadran III)
    * Jika x dan y di kuadran IV maka $|x| = x$ dan $|y| = -y$
      2x + y = 10 dan x – 2y = 12
      Nilai (x, y) yang memenuhi adalah $\left(\frac{32}{5}, -\frac{14}{5}\right)$ (memenuhi (x, y) di kuadran IV)

    ∴ $x + y = \frac{32}{5} - \frac{14}{5} = \frac{18}{5}$

11. Jika a, b dan c adalah himpunan aritmatika maka 2b = a + c dengan a < c.
    * Jika b = 2 maka a + c = 4. Ada 1 pasangan (a, c) yang memenuhi yaitu (1, 3)
    * Jika b = 3 maka a + c = 6. Ada 2 pasangan (a, c) yang memenuhi yaitu (1, 5), (2, 4)
    * Jika b = 4 maka a + c = 8. Ada 3 pasangan (a, c) yang memenuhi yaitu (1, 7), (2, 6), (3, 5)
    * Jika b = 5 maka a + c = 10. Ada 3 pasangan (a, c) yang memenuhi yaitu (2, 8), (3, 7), (4, 6)
    * Jika b = 6 maka a + c = 12. Ada 2 pasangan (a, c) yang memenuhi yaitu (4, 8), (5, 7)
    * Jika b = 7 maka a + c = 14. Ada 1 pasangan (a, c) yang memenuhi yaitu (6, 8)

    ∴ Banyaknya himpunan aritmatika = 1 + 2 + 3 + 3 + 2 + 1 = **12**

12. (a + 2) + (a + 1) + a = 3(a + 1)
    Maka semua bilangan yang berbentuk N = $\overline{(a+2)(a+1)a}$ habis dibagi 3 sebab penjumlahan digitnya habis dibagi 3.
    321 = 3 · 107 dengan 3 dan 107 adalah bilangan prima.
    Tetapi 432/107 bukan bilangan bulat atau 107 tidak membagi 432.
    FPB (321, 432) = 3
    ∴ Maka kesepuluh bilangan N semacam itu memiliki faktor persekutuan terbesar = **3**

13. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 47$, maka $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 47$ sehingga $x + \frac{1}{x} = 7$

$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - 2 = 7$

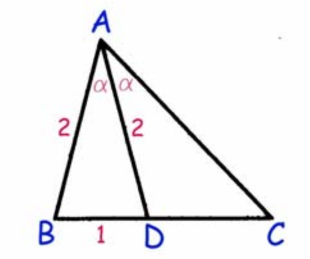
$\therefore\ \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 3$

14. Misalkan jumlah murid laki-laki = m dan jumlah murid perempuan = n
(m : (m + n)) : (n : (m + n)) = 2 : 3
m : n = 2 : 3, maka 3m = 2n

$\frac{m}{m+n} = \frac{2m}{2m+3m} = \frac{2}{5}$

$\therefore$ Persentase murid laki-laki di kelas tersebut adalah **40 %**

15.



Karena α < 45 maka AC > AD sehingga AC > 2

Karena AD adalah garis bagi ΔABC maka berlaku $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$ sehingga AC = 2 CD

Misalkan panjang CD = x maka AC = 2x

Pada ΔABD berlaku $\cos\alpha = \frac{2^2 + 2^2 - 1^2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{7}{8}$

Pada ΔABC berlaku $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{(2x)^2 + 2^2 - (1+x)^2}{2 \cdot (2x) \cdot 2}$

$\frac{34}{64} = \frac{4x^2 + 4 - (1 + 2x + x^2)}{8x}$

$17x = 12x^2 - 8x + 12$

$(4x - 3)(3x - 4) = 0$

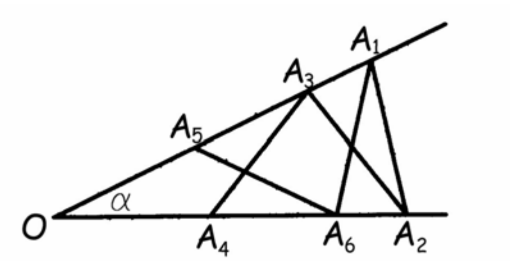
Karena AC > 2 maka x > 1

Nilai x yang memenuhi hanya x = $\frac{4}{3}$

$\therefore$ CD = $\frac{4}{3}$

16. $ax^4 + bx^3 + 1 = q(x) \cdot (x - 1)^2$
Jelas bahwa q(x) harus merupakan fungsi kuadrat.
Karena koefisien x^4 adalah a dan konstanta ruas kiri = 1 maka $q(x) = ax^2 + px + 1$
$ax^4 + bx^3 + 1 = (ax^2 + px + 1) \cdot (x^2 - 2x + 1)$
$ax^4 + bx^3 + 1 = ax^4 + (-2a + p)x^3 + (a - 2p + 1)x^2 + (p - 2)x + 1$
Dari persamaan di atas didapat :
Berdasarkan koefisien x maka p − 2 = 0 sehingga p = 2
Berdasarkan koefisien x^2 maka a − 2p + 1 = 0 sehingga a = 3
Berdasarkan koefisien x^3 maka b = −2a + p sehingga b = −4
∴ ab = −**12**

17.

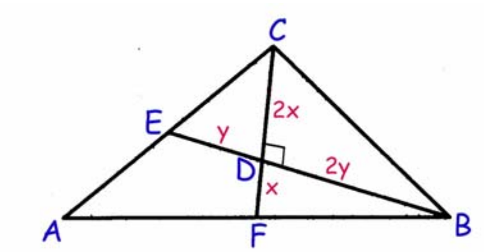


Karena $A_4O = A_3A_4$ maka ΔOA_4A_3 sama kaki sehingga $\angle OA_3A_4 = \alpha$ dan $\angle A_3A_4A_6 = 2\alpha$
Pada $\Delta A_4A_3A_2$ sama kaki berlaku $\angle A_3A_2A_4 = 2\alpha$, maka $\angle A_4A_3A_2 = 180^o - 4\alpha$ sehingga $\angle A_2A_3A_1 = 3\alpha$
Pada $\Delta A_1A_2A_3$ sama kaki berlaku $\angle A_2A_1A_3 = 3\alpha$, maka $\angle A_1A_2A_3 = 180^o - 6\alpha$
$\angle A_1A_2A_6 = \angle A_3A_2A_4 + \angle A_1A_2A_3 = 180^o - 4\alpha$
Pada $\Delta A_1A_2A_6$ sama kaki berlaku $\angle A_1A_6A_2 = \angle A_1A_2A_6 = 180^o - 4\alpha$, maka $\angle A_6A_1A_2 = 8\alpha - 180^o$
$\angle A_5A_1A_6 = \angle A_2A_1A_3 - \angle A_6A_1A_2 = 3\alpha - (8\alpha - 180^o) = 180^o - 5\alpha$
Pada $\Delta A_1A_6A_5$ sama kaki berlaku $\angle A_6A_5A_1 = \angle A_5A_1A_6 = 180^o - 5\alpha$, maka $\angle A_6A_5O = 5\alpha$
Pada ΔOA_5A_6 sama kaki berlaku $\angle OA_6A_5 = \angle A_5OA_6 = \alpha$
Pada ΔOA_5A_6 berlaku $\angle A_5OA_6 + \angle OA_5A_6 + \angle OA_6A_5 = 180^o$
$\alpha + 5\alpha + \alpha = 180^o$
∴ $\alpha = \frac{180°}{7}$

18. Banyaknya susunan 7 angka dengan 3 buah angka 2 yang sama dan 2 buah angka 4 yang sama adalah $\frac{7!}{3! \cdot 2!}$ = 420. Tetapi 420 bilangan tersebut termasuk bilangan dengan angka 0 pada angka pertama.
Banyaknya bilangan dengan 0 pada angka pertama adalah $\frac{6!}{3! \cdot 2!}$ = 60
∴ Banyaknya bilangan yang dapat dibentuk adalah 420 − 60 = **360.**

19. $a_{k+1} - a_k = 2(a_k - a_{k-1}) - 1$
Misalkan $a_2 - a_1 = 2 = u_1$
$a_3 - a_2 = 2(a_2 - a_1) - 1 = 2u_1 - 1 = u_2$
$a_4 - a_3 = 2(a_3 - a_2) - 1 = 2u_2 - 1 = u_3$
$\vdots$
$a_{k+1} - a_k = 2(a_k - a_{k-1}) - 1 = 2u_{k-1} - 1 = u_k$
Jumlahkan seluruh persamaan di atas didapat :
$a_{k+1} - a_1 = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k$
Karena a_1, a_2, a_3, ⋯ semuanya asli maka $a_{k+1} > u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k$
Misalkan $a_{k+1} = 2006$
Agar didapat $(a_1)_{minimal}$ maka $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k$ harus paling dekat dengan 2006 namun kurang dari 2006
$u_1 = 2$; $u_2 = 3$; $u_3 = 5$; $u_4 = 9$; $u_5 = 17$; $u_6 = 33$; $u_7 = 65$; $u_8 = 129$; $u_9 = 257$; $u_{10} = 513$ dan $u_{11} = 1025$.
$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{10} = 1033$ sedangkan $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{11} = 2058 > 2006$
maka $2006 = a_{11}$
$a_{11} - a_1 = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{10} = 1033$
$(a_1)_{minimum} = 2006 - 1033$
$\therefore$ $(a_1)_{minimum} = \mathbf{973}$

20.



CF dan BE adalah garis berat yang berpotongan di titik D. Maka CD : DF = 2 : 1 dan BD : DE = 2 : 1
Misalkan DF = x maka CD = 2x dan jika DE = y maka BD = 2y

$$\tan B = \tan(\angle CBD + \angle FBD) = \frac{\tan\angle CBD + \tan\angle FBD}{1 - \tan\angle CBD \cdot \tan\angle FBD}$$

$$\tan B = \frac{\frac{2x}{2y} + \frac{x}{2y}}{1 - \frac{2x}{2y}\cdot\frac{x}{2y}} = \frac{3xy}{2y^2 - x^2}, \text{ maka } ctgB = \frac{2y}{3x} - \frac{x}{3y}$$

$$\tan C = \tan(\angle BCD + \angle ECD) = \frac{\tan\angle BCD + \tan\angle ECD}{1 - \tan\angle BCD \cdot \tan\angle ECD}$$

$$\tan C = \frac{\frac{2y}{2x} + \frac{y}{2x}}{1 - \frac{2y}{2x}\cdot\frac{y}{2x}} = \frac{3xy}{2x^2 - y^2}, \text{ maka } ctgC = \frac{2x}{3y} - \frac{y}{3x}$$

$$ctgB + ctgC = \frac{x}{3y} + \frac{y}{3x}$$

Berdasarkan ketaksamaan AM-GM maka :

$$ctgB + ctgC \geq 2\sqrt{\frac{x}{3y} \cdot \frac{y}{3x}} = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ Maka nilai minimum ctg B + ctg C adalah $\frac{2}{3}$

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2007
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2006

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

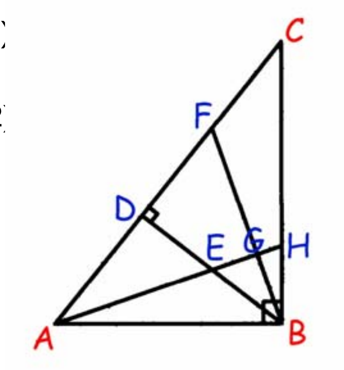
Bagian Kedua

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN KEDUA

1. Alternatif 1 :

Misalkan $\angle GAF = \alpha$ dan $\angle GFA = \gamma$



$\tan A = \frac{BD}{AD}$ sedangkan $\tan \alpha = \frac{DE}{AD} = \frac{BD}{2AD} = \frac{\tan A}{2}$ .... (1)

$\tan C = \frac{BD}{CD}$ sedangkan $\tan \gamma = \frac{BD}{FD} = \frac{2BD}{CD} = 2\tan C$ .... (2)

A + C = 90°, maka tan A = tan (90° − C) = ctg C sehingga tan A tan C = 1

$\tan \alpha \cdot \tan \gamma = \tan A \cdot \tan C = 1$

$$\tan(\alpha + \gamma) = \frac{\tan \alpha + \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \tan \gamma}$$

Karena $\tan \alpha \cdot \tan \gamma = 1$ maka $\alpha + \gamma = 90^o$

Pada ΔAGF berlaku $\angle AGF = 180^o - (\alpha + \gamma) = 90^o$

Karena $\angle AGF = 90^o$ maka AG tegak lurus FG

∴ **Terbukti bahwa AE ⊥ BF**

Alternatif 2 :

Misalkan $\angle BAC = \theta$ maka $\angle ABD = 90^o - \theta$

Jelas bahwa $\angle DBC = \theta$. Karena ΔBCD siku-siku di D maka $\angle BCD = 90^o - \theta$.

Akibatnya ΔABD sebangun dengan ΔBCD.

Karena E pertengahan BD dan F pertengahan CD maka ΔEAD sebangun dengan ΔBDF.

Misalkan $\angle GAF = \alpha$. Karena ΔEAD sebangun dengan ΔBDF, maka $\angle FBD = \alpha$.

Karena ΔAED siku-siku di D maka $\angle DEA = \angle GEB = 90^o - \alpha$.

Pada ΔBEG berlaku :

$\angle BEG + \angle FBD + \angle EGB = 180^o$

$(\alpha) + (90^o - \alpha) + \angle EGB = 180^o$

$\angle EGB = 90^o$

Karena $\angle EGB = 90^o$ maka garis AG tegak lurus BF.

Jadi garis AE tegak lurus BF (terbukti).

∴ **Terbukti bahwa AE ⊥ BF**

2. Dibuat subhimpunan {1, 2005}, {2, 2004}, {3, 2003}, ···, {1002, 1004}, {1003}

Jika diambil satu bilangan dari masing-masing subhimpunan tersebut maka terdapat 1003 bilangan yang tidak ada sepasang di antaranya yang berjumlah 2006.

Jika ditambahkan satu bilangan lagi selain 1003 bilangan tersebut maka dapat dipastikan terdapat sepasang bilangan yang berjumlah 2006.

∴ Banyaknya anggota S harus dipilih agar selalu terdapat paling sedikit satu pasang anggota terpilih yang hasil tambahnya 2006 adalah **1004.**

3. d = FPB(7n + 5, 5n + 4)
   a. Maka $d \mid 7n + 5$ dan $d \mid 5n + 4$
      Karena d membagi 7n + 5 maka d juga membagi 5(7n + 5)
      Karena d membagi 5n + 4 maka d juga membagi 7(5n + 4)
      Akibatnya d juga membagi 7(5n + 4) − 5(7n + 5) = 3
      Karena $d \mid 3$ maka d = 1 atau 3 (terbukti)
   b. Sebuah bilangan akan termasuk ke dalam salah satu bentuk dari 3k, 3k + 1 atau 3k + 2
      Jika n = 3k maka 7n + 5 = 21k + 5 ≡ 2 (mod 3) dan 5n + 4 = 15k + 4 ≡ 1 (mod 3)
      Jika n = 3k + 1 maka 7n + 5 = 21k + 12 ≡ 0 (mod 3) dan 5n + 4 = 15k + 9 ≡ 0 (mod 3)
      Jika n = 3k + 2 maka 7n + 5 = 21k + 19 ≡ 1 (mod 3) dan 5n + 4 = 15k + 14 ≡ 2 (mod 3)

   ∴ **Terbukti bahwa hanya bentuk n = 3k + 1 yang menyebabkan kedua bilangan 7n + 5 dan 5n + 4 habis dibagi 3 untuk n bilangan asli.**

4. Agar Win akan mengulangi prosedur pelemparan koin lebih dari tiga kali maka pada lemparan yang ketiga masih terdapat sedikitnya satu koin yang muncul dengan sisinya bukan angka.
   Pada lemparan pertama agar hal tersebut terjadi maka sisi koin yang muncul haruslah terdapat tepat satu sisi angka dan satu sisi bukan angka atau kedua sisi bukan angka.
   - Jika pada lemparan pertama yang muncul adalah satu sisi angka dan satu bukan angka.
     Peluang tersebut adalah ½.
     Pada lemparan kedua dan ketiga sisi satu-satunya koin yang ia lempar harus bukan angka.

     Peluang pada masing-masing kejadian adalah ½ .

     Peluang Win akan mengulangai prosedur lebih dari tiga kali adalah ½ · ½ · ½ = $\frac{1}{8}$
   - Jika pada lemparan pertama kedua koin muncul dengan sisi bukan angka
     Peluang kejadian tersebut adalah ½ · ½ = ¼
     Agar Win akan mengulangi prosedur maka pada lemparan kedua sisi koin yang muncul haruslah terdapat tepat satu sisi angka dan satu sisi bukan angka atau kedua sisi bukan angka.
     - Jika pada lemparan kedua yang muncul adalah satu sisi angka dan satu bukan angka
       Peluang tersebut adalah ½.
       Pada lemparan ketiga sisi satu-satunya koin yang ia lempar tersebut harus bukan angka.
       Peluang kejadian tersebut adalah ½ .

       Peluang Win akan mengulangi prosedur lebih dari tiga kali adalah ¼ · ½ · ½ = $\frac{1}{16}$
     - Jika pada lemparan kedua, kedua koin muncul dengan sisi bukan angka
       Peluang kejadian tersebut adalah ½ · ½ = ¼
       Agar Win akan mengulangai prosedur maka pada lemparan ketiga sisi koin yang muncul haruslah terdapat tepat satu sisi angka dan satu sisi bukan angka atau kedua sisi bukan angka. Peluang kejadian ini adalah ¾.

       Peluang Win akan mengulangi prosedur lebih dari tiga kali adalah ¼ · ¼ · ¾ = $\frac{3}{64}$

   ∴ Maka peluang Win akan mengulangi prosedur tersebut lebih dari 3 kali adalah $\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{3}{64}=\frac{15}{64}$

5. $x^2 - 2ax + b = 0$ .... (1)
$x^2 - 2bx + c = 0$ .... (2)
$x^2 - 2cx + a = 0$ .... (3)
Karena akar-akar persamaan kuadrat di atas adalah bilangan asli maka diskriminannya harus merupakan kuadrat sempurna.
Dari pers (1) didapat fakta bahwa $4a^2 - 4b$ merupakan kuadrat sempurna
Maka $a^2 - b$ merupakan kuadrat sempurna .... (4)
Dengan cara yang sama untuk persamaan (2) dan (3) didapat :
$b^2 - c$ juga kuadrat sempurna .... (5)
$c^2 - a$ juga kuadrat sempurna .... (6)
Pada persamaan (4) karena a dan b bilangan asli maka $a^2 - b < a^2$ atau $a^2 - b \le (a-1)^2$
$-b \le -2a + 1$, maka $b \ge 2a - 1$ .... (7)
Dengan cara yang sama untuk persamaan (5) dan (6) didapat :
$c \ge 2b - 1$ .... (8)
$a \ge 2c - 1$ .... (9)
Maka :
$a \ge 2c - 1 \ge 2(2b - 1) - 1 \ge 2(2(2a - 1) - 1) - 1$.
$a \ge 8a - 7$, maka $a \le 1$ sehingga $a = 1$
Dari persamaan (9) didapat $1 \ge 2c - 1$ maka $c \le 1$ sehingga $c = 1$
Dari persamaan (8) didapat $1 \ge 2b - 1$ maka $b \le 1$ sehingga $b = 1$
$\therefore$ a, b dan c yang memenuhi persamaan tersebut hanya **a = b = c = 1**

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2007

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2006

SEMARANG (JAWA TENGAH), 4 – 9 SEPTEMBER 2006

Bidang Matematika

Hari Pertama

Waktu : 180 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2006

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2006
4 – 9 SEPTEMBER 2006
SEMARANG, JAWA TENGAH

BIDANG : MATEMATIKA

HARI PERTAMA

WAKTU : 180 MENIT

1. Tentukan semua pasangan bilangan real (x, y) yang memenuhi
   $x^3 - y^3 = 4(x - y)$
   $x^3 + y^3 = 2(x + y)$

2. Misalkan a, b, c adalah bilangan-bilangan asli. Jika $30 \mid (a + b + c)$, buktikan bahwa $30 \mid (a^5 + b^5 + c^5)$
   [Catatan : $x \mid y$ menyatakan x habis membagi y.]

3. Misalkan S adalah himpunan semua segitiga ABC yang memenuhi sifat : tan A, tan B dan tan C adalah bilangan-bilangan asli. Buktikan bahwa semua segitiga anggota S sebangun.

4. Misalkan n > 2 sebuah bilangan asli tetap.
   Sebuah bidak hitam ditempatkan pada petak pertama dan sebuah bidak putih ditempatkan pada petak terakhir sebuah papan ‘catur’ berukuran 1 x n. Wiwit dan Siti lalu melangkah bergantian. Wiwit memulai permainan dengan bidak putih. Pada setiap langkah, pemain memindahkan bidaknya sendiri satu atau dua petak ke kanan atau ke kiri tanpa melompati bidak lawan. Pemain yang tidak bisa melangkah dinyatakan kalah. Pemain manakah yang memiliki cara (strategi) untuk selalu memenangkan permainan, apa pun yang dilakukan lawannya ? Jelaskan strategi pemain tersebut ?

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2007

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2006

SEMARANG (JAWA TENGAH), 4 – 9 SEPTEMBER 2006

Bidang Matematika

Hari Kedua

Waktu : 180 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2006

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2006
4 – 9 SEPTEMBER 2006
SEMARANG, JAWA TENGAH

BIDANG : MATEMATIKA

HARI KEDUA

WAKTU : 180 MENIT

5. Pada segitiga ABC, M adalah titik tengah BC dan G adalah titik berat segitiga ABC. Sebuah garis ℓ melalui G memotong ruas garis AB di P dan ruas garis AC di Q, dimana P $\neq$ B dan Q $\neq$ C. Jika [XYZ] menyatakan luas segitiga XYZ, tunjukkan bahwa
$$\frac{[BGM]}{[PAG]}+\frac{[CMG]}{[QGA]}=\frac{3}{2}$$

6. Setiap nomor telepon di suatu daerah terdiri dari 8 angka dan diawali dengan angka 8. Pak Edy, yang baru pindah ke daerah itu, mengajukan pemasangan sebuah telepon baru. Berapakah peluang pak Edy mendapatkan nomor telepon yang memuat tidak lebih dari 5 angka berbeda ?

7. Misalkan a, b, c bilangan-bilangan real sehingga ab, bc, ca bilangan-bilangan rasional. Buktikan bahwa ada bilangan-bilangan bulat x, y, z yang tidak semuanya nol, sehingga ax + by + cz = 0.

8. Tentukan bilangan bulat 85-angka terbesar yang memenuhi sifat ; jumlah semua angkanya sama dengan hasilkali semua angkanya.

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2007

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2006

SEMARANG (JAWA TENGAH), 4 – 9 SEPTEMBER 2006

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

1. $x^3 - y^3 = 4(x - y)$, maka $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 4(x - y)$ .... (1)
   $x^3 + y^3 = 2(x + y)$, maka $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = 2(x + y)$ .... (2)
   - Jika x = y
     Subtitusikan ke persamaan (2).
     $(2x)(x^2) = 4x$, maka $x(x^2 - 2) = 0$ sehingga x = 0 atau x = $\pm\sqrt{2}$
     Pasangan (x, y) yang memenuhi adalah (0,0), $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$
   - Jika x = −y
     Subtitusikan ke persamaan (1).
     $(2x)(x^2) = 8x$, maka $x(x^2 - 4) = 0$
     x = 0 , x = 2 atau x = −2
     Pasangan (x, y) yang memenuhi adalah (0,0), (2, −2), (−2, 2)
   - Jika $x \neq y$ dan $x \neq -y$
     $x^2 + xy + y^2 = 4$ .... (3)
     $x^2 - xy + y^2 = 2$ .... (4)
     Kurangkan (3) dengan (4), maka xy = 1 dan $x^2 + y^2 = 3$
     $(x + y)^2 - 2xy = 3$, maka $(x + y)^2 = 5$
     * Jika x + y = $\sqrt{5}$
       $x\left(\sqrt{5} - x\right) = 1$
       $x^2 - x\sqrt{5} + 1 = 0$
       $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, maka $y = \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ sehingga (x y) = $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$
       $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, maka $y = \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ sehingga (x y) = $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$
     * Jika x + y = $-\sqrt{5}$
       $x\left(-\sqrt{5} - x\right) = 1$
       $x^2 + x\sqrt{5} + 1 = 0$
       $x = \frac{-\sqrt{5}+1}{2}$, maka $y = \frac{1}{x} = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ sehingga (x y) = $\left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2}, -\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$
       $x = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$, maka $y = \frac{1}{x} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ sehingga (x y) = $\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}, -\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

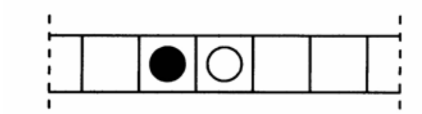
   Setelah dicek ke persamaan semula, semua pasangan (x, y) tersebut memenuhi.

   $\therefore$ **Pasangan (x, y) yang memenuhi adalah (0,0), $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, (2, −2), (−2, 2),** $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$, $\left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2}, -\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$, $\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}, -\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

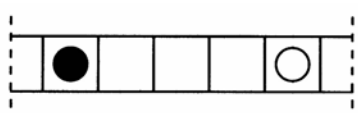
2. Akan dibuktikan bahwa $30 \mid n^5 - n$ untuk n bilangan asli.
   $n^5 - n = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n - 1)(n + 1)(n^2 - 4 + 5)$
   $n^5 - n = (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) + 5(n - 1)n(n + 1)$
   Karena n–2, n–1, n, n+1, n+2 adalah 5 bil. bulat berurutan maka $(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$ habis dibagi 5! = 120 sehingga $30 \mid (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$
   $n - 1$, n dan $n + 1$ adalah 3 bilangan bulat berurutan maka 3! = 6 membagi $(n - 1)n(n + 1)$.
   Akibatnya $30 \mid 5(n - 1)n(n + 1)$
   Maka $30 \mid n^5 - n$ untuk n bilangan asli
   $30 \mid a^5 - a + b^5 - b + c^5 - c$ untuk a, b, c bilangan asli, maka$30 \mid a^5 + b^5 + c^5 - (a + b + c)$
   $\therefore$ **Karena $30 \mid (a + b + c)$ maka $30 \mid (a^5 + b^5 + c^5)$ (terbukti)**

3. Pada segitiga ABC berlaku $A + B = 180^o - C$
   $\tan (A + B) = \tan (180^o - C)$
   $$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} = -\tan C$$
   $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$
   Misalkan tan A = x, tan B = y dan tan C = z untuk x, y, z $\in$ Bilangan Asli
   Tanpa mengurangi keumuman misalkan $x \le y \le z$
   $x + y + z = xyz$, maka $3z \ge xyz$ sehingga $xy \le 3$
   Nilai (x, y) yang memenuhi adalah (1, 1), (1, 2) dan (1, 3)
   Jika x = 1 dan y = 1 maka 1 + 1 + z = z sehingga 2 + z = z (tidak ada z yang memenuhi)
   Jika x = 1 dan y = 2 maka 1 + 2 + z = 2z sehingga z = 3 (memenuhi)
   Jika x = 1 dan y = 3 maka 1 + 3 + z = 3z sehingga z = 2 (tidak memenuhi bahwa $z \ge y$)
   Maka tripel bilangan asli (tan A, tan B, tan C) yang memenuhi adalah (1, 2, 3) dan permutasinya.
   Akibatnya nilai (A, B, C) yang memenuhi hanya ada satu kemungkinan.
   $\therefore$ **Karena hanya ada satu tripel (A, B, C) yang memenuhi maka semua segitiga anggota S sebangun (terbukti)**

4. Misalkan kejadian (a) adalah kejadian dengan posisi sebagai berikut :

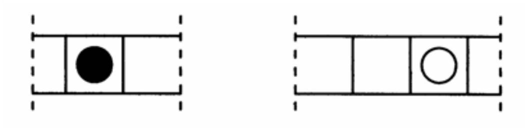
   

   Pemain yang melangkah terlebih dahulu setelah kejadian (a) terjadi akan kalah sebab pemain pertama tersebut hanya bisa melangkah mundur. Jika pemain pertama mundur dua langkah maka pemain kedua akan melangkah maju dua langkah sedangkan jika pemain pertama mundur satu langkah maka pemain kedua akan melangkah maju satu langkah sehingga kejadian (a) akan selalu terjaga sampai suatu saat pemain pertama tersebut tidak dapat melangkah lagi.
   Misalkan kejadian (b) adalah kejadian dengan jarak antara dua bidak sama dengan 3 petak sebagaimana posisi sebagai berikut :

   Jika pemain pertama setelah posisi (b) terjadi, melangkah mundur satu langkah maka pemain kedua akan maju satu langkah sedangkan jika pemain pertama mundur dua langkah maka pemain kedua akan maju dua langkah sehingga posisi (b) akan terjaga sampai pemain pertama maju atau ia tidak dapat lagi mundur sehingga harus maju. Jika pemain pertama maju satu langkah maka pemain kedua akan maju dua langkah sedangkan jika pemain pertama maju dua langkah maka pemain kedua akan maju satu langkah sehingga posisi akan menjadi posisi (a) sehingga sesuai dengan penjelasan sebelumnya maka pemain pertama akan kalah.

Misalkan kejadian (c) adalah kejadian dengan banyaknya petak di antara dua bidak sama dengan 3k petak dengan k bilangan asli :

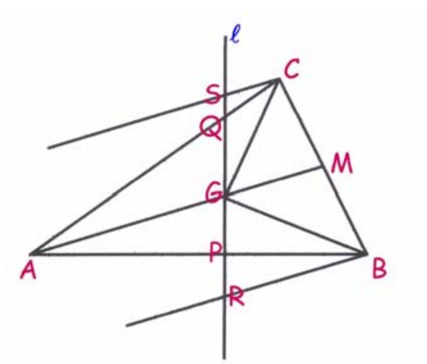


Jika pemain pertama setelah posisi (c) terjadi melangkah mundur satu langkah maka pemain kedua akan maju satu langkah sedangkan jika pemain pertama mundur dua langkah maka pemain kedua akan maju dua langkah sehingga posisi (c) akan terjaga sampai pemain pertama maju atau ia tidak dapat lagi mundur sehingga harus maju. Jika pemain pertama maju satu langkah maka pemain kedua akan maju dua langkah sedangkan jika pemain pertama maju dua langkah maka pemain kedua akan maju satu langkah sehingga banyaknya petak diantara kedua bidak kedua pemain akan menjadi 3(k − 1) petak. Demikian seterusnya sehingga nilai k akan semakin kecil sampai suatu saat nilai k akan menjadi 1 dan sebagaimana penjelasan pada posisi (b) pemain pertama akan kalah.

Jika banyaknya petak di antara kedua bidak tidak habis dibagi 3 maka pemain pertama akan memenangkan permainan sebab ia punya kesempatan untuk membuat banyaknya petak di antara kedua bidak akan habis dibagi 3.

$\therefore$ **Maka dapat disimpulkan bahwa :**
Jika n dibagi 3 bersisa 2 maka pemain kedua (Siti) akan memenangkan permainan sedangkan jika n dibagi 3 bersisa 0 atau 1 maka pemain pertama (Wiwit) akan memenangkan permainan.

5.



Karena G adalah titik berat dan AM adalah garis berat maka AG : GM = 2 : 1.

ΔBGM dan ΔBAG adalah dua segitiga dengan alas yang sama sehingga perbandingan luas dapat dinyatakan sebagai perbandingan tinggi. Karena AG : GM = 2 : 1 maka [BAG] = 2[BGM].

Dengan cara yang sama maka [CMG] = 2[CGA].

$$\frac{[BGM]}{[PAG]} + \frac{[CMG]}{[QGA]} = \frac{1}{2}\left(\frac{[BAG]}{[PAG]} + \frac{[CGA]}{[QGA]}\right)$$

Segitiga BAG dan segitiga PAG adalah dua segitiga dengan tinggi yang sama maka perbandingan luas dapat dinyatakan sebagai perbandingan alas. [BAG] : [PAG] = AB : AP.

Dengan cara yang sama maka [CGA] : [QGA] = AC : AQ

$$\frac{[BGM]}{[PAG]}+\frac{[CMG]}{[QGA]}=\frac{1}{2}\left(\frac{[BAG]}{[PAG]}+\frac{[CGA]}{[QGA]}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{AB}{AP}+\frac{AC}{AQ}\right)$$

Alternatif 1 :

$$\frac{[BGM]}{[PAG]}+\frac{[CMG]}{[QGA]}=\frac{1}{2}\left(\frac{AP+BP}{AP}+\frac{AQ+CQ}{AQ}\right)=1+\frac{1}{2}\left(\frac{BP}{AP}+\frac{CQ}{AQ}\right)$$

Buat garis melalui B dan C masing-masing sejajar AM. Misalkan garis yang melalui B memotong garis di R dan garis yang melalui C memotong garis ℓ di S. (Lihat gambar).

Karena AG sejajar BR maka ΔAGP sebangun dengan ΔBRP sehingga $\frac{BP}{AP}=\frac{BR}{AG}$

Karena AG sejajar CS maka ΔAGQ sebangun dengan ΔCSQ sehingga $\frac{CQ}{AQ}=\frac{CS}{AG}$

$$\frac{[BGM]}{[PAG]}+\frac{[CMG]}{[QGA]}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{BP}{AP}+\frac{CQ}{AQ}\right)=1+\frac{1}{2}\left(\frac{BR}{AG}+\frac{CS}{AG}\right)$$

Mengingat bahwa BR + CS = 2 · GM maka :

$$\frac{[BGM]}{[PAG]}+\frac{[CMG]}{[QGA]}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{BR+CS}{AG}\right)=1+\frac{1}{2}\left(\frac{2GM}{AG}\right)$$

Mengingat bahwa AG : GM = 2 : 1 maka :

$\therefore\ \frac{[BGM]}{[PAG]}+\frac{[CMG]}{[QGA]}=\frac{3}{2}$ **(terbukti)**

Alternatif 2 :

Tanpa mengurangi keumuman misalkan koordinat A(0, 0), B(b, 0), C(a, c) sehingga G$\left(\frac{a+b}{3},\frac{c}{3}\right)$.

Titik M adalah pertengahan BC sehingga M$\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right)$.

Garis AC melalui (0, 0) dan gradien $\frac{c}{a}$ sehingga persamaan garis AC, $y=\frac{c}{a}x$.

Misalkan persamaan garis ℓ adalah y = mx + k. Garis ℓ melalui titik G maka :

$\frac{c}{3}=m\left(\frac{a+b}{3}\right)+k$, maka $k=\frac{c-ma-mb}{3}$. Persamaan garis ℓ adalah $y=mx+\frac{c-ma-mb}{3}$

Garis ℓ memotong AB di titik P maka $x_p=\frac{ma-mb-c}{3m}$ sehingga P$\left(\frac{ma-mb-c}{3m},0\right)$.

Garis ℓ memotong AC di Q, maka $\frac{c}{a}x_Q=mx_Q+\frac{c-ma-mb}{3}$

$x_Q=\frac{a(c-ma-mb)}{3(c-ma)}$ maka $y_Q=\frac{c(c-ma-mb)}{3(c-ma)}$.

Sehingga Q$\left(\frac{a(c-ma-mb)}{3(c-ma)},\frac{c(c-ma-mb)}{3(c-ma)}\right)$.

$|AB|=b$; $|AP|=\frac{ma+mb-c}{3m}$; $|AC|=\sqrt{a^2+c^2}$; $|AQ|=\frac{(c-ma-mb)}{3(c-ma)}\sqrt{a^2+c^2}$

$$\frac{[BGM]}{[PAG]}+\frac{[CMG]}{[QGA]}=\frac{1}{2}\left(\frac{AB}{AP}+\frac{AC}{AQ}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3mb}{ma+mb-c}+\frac{3(c-ma)}{c-ma-mb}\right)$$

$$\frac{[BGM]}{[PAG]}+\frac{[CMG]}{[QGA]}=\frac{1}{2}\left(\frac{3mb-3(c-ma)}{ma+mb-c}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3(ma+mb-c)}{ma+mb-c}\right)$$

$\therefore\ \frac{[BGM]}{[PAG]}+\frac{[CMG]}{[QGA]}=\frac{3}{2}$ **(terbukti)**

6. Akan dicari nomor telepon tersebut terdiri dari sedikitnya 6 angka berbeda.
   - Jika nomor telepon tersebut terdiri dari 6 angka berbeda
     Banyaknya cara memilih 5 angka tersisa dari 9 angka tersisa adalah ${}_9C_5$.
     * Jika nomor telepon tersebut terdiri dari 1 angka muncul 3 kali dan 5 angka lainnya muncul 1 kali
       - Jika angka yang muncul tiga kali adalah angka 8
         Banyaknya nomor telepon = ${}_9C_5\cdot\frac{7!}{2!}$ = 317.520
       - Jika angka yang muncul tiga kali adalah bukan angka 8
         Banyaknya nomor telepon = ${}_9C_5\cdot{}_5C_1\cdot\frac{7!}{3!}$ = 529.200
     * Jika nomor telepon tersebut terdiri dari 2 angka masing-masing muncul 2 kali dan 4 angka lainnya muncul 1 kali
       - Jika salah satu angka yang muncul dua kali tersebut adalah angka 8
         Banyaknya nomor telepon = ${}_9C_5\cdot{}_5C_1\cdot\frac{7!}{2!}$ = 1.587.600
       - Jika kedua angka yang muncul dua kali tersebut keduanya bukan angka 8
         Banyaknya nomor telepon = ${}_9C_5\cdot{}_5C_2\cdot\frac{7!}{2!2!}$ = 1.587.600
   - Jika nomor telepon tersebut terdiri dari 7 angka berbeda
     Banyaknya cara memilih 6 angka tersisa dari 9 angka tersisa adalah ${}_9C_6$.
     Satu angka akan muncul 2 kali sedangkan 6 angka lain akan muncul satu kali.
     * Jika angka yang muncul dua kali tersebut adalah angka 8
       Banyaknya nomor telepon = ${}_9C_6\cdot 7!$ = 423.360
     * Jika angka yang muncul dua kali tersebut adalah bukan angka 8
       Banyaknya nomor telepon = ${}_9C_6\cdot{}_6C_1\cdot\frac{7!}{2!}$ = 1.270.080
   - Jika nomor telepon tersebut terdiri dari 8 angka berbeda
     Banyaknya cara memilih 7 angka tersisa dari 9 angka tersisa adalah ${}_9C_7$.
     Banyaknya nomor telepon = ${}_9C_7\cdot 7!$ = 181.440

   Misalkan A adalah kejadian banyaknya nomor telepon dengan sedikitnya 6 angka berbeda.
   A = 317.520 + 529.200 + 1.587.600 + 1.587.600 + 423.360 + 1.270.080 + 181.440 = 5.896.800

   p(A) = $\frac{A}{10^7}$ = 0,58968

   $\therefore$ **Peluang bahwa pak Edy mendapatkan nomor telepon yang memuat tidak lebih dari 5 angka berbeda = 1 − p(A) = 0,41032**

7. Karena ab, ac dan bc adalah bilangan rasional maka $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$, $\frac{ab}{bc} = \frac{a}{c}$ adalah juga bilangan rasional.

Misalkan $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c} = \frac{m}{n}$, $\frac{ab}{bc} = \frac{a}{c} = \frac{p}{q}$ untuk m, n, p, q $\in$ Bil. Bulat dan n, q $\neq$ 0

- Jika a, b, c ketiganya sama dengan 0
  Jelas bahwa berapa pun nilai (x, y, z) bulat akan memenuhi ax + by + cz = 0
- Jika dua di antara a, b, c sama dengan 0
  Tanpa mengurangi keumuman misalkan a = b = 0 dan c $\neq$ 0
  Nilai z = 0 dan x, y $\neq$ 0 akan memenuhi ax + by + cz = 0
- Jika salah satu a, b atau c sama dengan 0
  Tanpa mengurangi keumuman misalkan a = 0 dan b, c $\neq$ 0
  Maka untuk x $\neq$ 0, y = z = 0 akan memenuhi ax + by + cz = 0.
- Jika tidak ada a, b dan c bernilai 0
  $$ax + by + cz = c\left(\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}y + z\right) = c\left(\frac{p}{q}x + \frac{m}{n}y + z\right)$$
  Maka untuk x = kq, y = wn dan z = −(kp + wm) dengan k, w $\in$ Bilangan Bulat akan memenuhi ax + by + cz = 0

$\therefore$ **Terbukti bahwa ada bilangan-bilangan bulat x, y, z yang tidak semuanya nol, sehingga ax + by + cz = 0**

8. Misalkan bilangan 85-angka tersebut adalah n. Misalkan juga S(n) adalah jumlah semua angka-angka n dan P(n) adalah hasilkali semua angka-angka n.
Jika 0 adalah salah satu digit dari n maka P(n) = 0 sehingga S(n) = 0. Akibatnya semua digit dari n harus 0 yang tidak memenuhi n adalah bilangan bulat 85-angka. Maka 0 bukanlah salah satu angka n.
S(n) maksimal = 9 · 85 = 765 jika semua angka n adalah 9.
Karena 2^9 = 512 < 765 dan 2^{10} = 1024 > 765 maka paling banyak 9 angka n bukan 1 dan paling sedikit 76 angka terakhir n harus sama dengan 1. Maka S(n) maksimal = 9 · 9 + 1 · 76 = 157.
Karena 2^7 = 128 < 157 dan 2^8 = 256 > 157 maka paling banyak 7 angka n bukan 1 dan paling sedikit 78 angka terakhir n harus sama dengan 1.
P(n) terkecil saat n = 2222222111········111, maka P(n) = 128 dan S(n) = 92 sehingga P(n) $\neq$ S(n)
Jika 7 angka pertama n tidak semuanya 2 maka P(n) minimal saat n = 3222222111····111 yaitu 192. Karena S(n) maksimal = 9 · 7 + 1 · 78 = 141 < P(n) minimal. Maka tidak ada nilai n yang memenuhi. Akibatnya paling banyak 6 angka n bukan 1.
Jika paling banyak dua angka dari n bukan 1 maka P(n) maksimal = 9 · 9 · 1 · 1 · ··· · 1 = 81 sedangkan S(n) minimal = 1 · 85 = 85. Maka sedikitnya tiga angka n bukan 1.
Maka banyaknya angka n yang bukan 1 paling sedikit 3 dan paling banyak 6.
- Jika angka pertama n adalah 9
  S(n) minimal = 9 · 1 + 2 · 5 + 1 · 79 = 98 dan S(n) maksimal = 9 · 6 + 1 · 79 = 133
  Karena P(n) habis dibagi 9 maka S(n) juga harus habis dibagi 9. Maka kemungkinan nilai P(n) adalah 99, 108, 117, 126.
  99 = 9 · 11 dan 117 = 9 · 13. Karena 11 dan 13 adalah bilangan prima dua angka maka tidak mungkin P(n) = 99 atau 117.
  Jika P(n) = 126 = 9 · 7 · 2 maka ke-85 angka n adalah 9, 7, 2 dan 1 sebanyak 82 kali.

$S(n) = 9 + 7 + 2 + 82 = 100$ (tidak memenuhi $P(n) = S(n)$).

Jika $P(n) = 108 = 9 \cdot 2^2 \cdot 3$ maka kemungkinan angka-angka n adalah :

* Ke-85 angka n adalah 9, 4, 3 dan 1 sebanyak 82 kali. $S(n) = 9 + 4 + 3 + 82 = 98$ (tidak memenuhi $P(n) = S(n)$)
* Ke-85 angka n adalah 9, 6, 2 dan 1 sebanyak 82 kali. $S(n) = 9 + 6 + 2 + 82 = 99$ (tidak memenuhi $P(n) = S(n)$)
* Ke-85 angka n adalah 9, 3, 2, 2 dan 1 sebanyak 81 kali.
  $S(n) = 9 + 3 + 2 + 2 + 81 = 97$ (tidak memenuhi $P(n) = S(n)$)

Maka tidak ada nilai n dengan angka pertama adalah 9 yang memenuhi.

- Jika angka pertama n adalah 8

  $S(n)$ minimal $= 8 + 1 \cdot 84 = 92$ dan $S(n)$ maksimal $= 8 \cdot 6 + 1 \cdot 79 = 127$

  Karena $P(n)$ habis dibagi 9 maka $S(n)$ juga harus habis dibagi 8. Maka kemungkinan nilai $P(n)$ adalah 96, 104, 112, 120.

  Jika $P(n) = 120 = 8 \cdot 5 \cdot 3$ maka maka ke-85 angka n adalah 8, 5, 3 dan 1 sebanyak 82 kali. $S(n) = 8 + 5 + 3 + 82 = 98$ (tidak memenuhi $P(n) = S(n)$).

  Jika $P(n) = 112 = 8 \cdot 7 \cdot 2$ maka maka ke-85 angka n adalah 8, 7, 2 dan 1 sebanyak 82 kali. $S(n) = 8 + 7 + 2 + 82 = 99$ (tidak memenuhi $P(n) = S(n)$).

  Jika $P(n) = 104 = 8 \cdot 13$. Karena 13 adalah bilangan prima dua angka maka tidak ada n yang memenuhi.

  Jika $P(n) = 96 = 8 \cdot 2^2 \cdot 3$ maka kemungkinan angka-angka n adalah :

  * Ke-85 angka n adalah 8, 4, 3 dan 1 sebanyak 82 kali. $S(n) = 8 + 4 + 3 + 82 = 97$ (tidak memenuhi $P(n) = S(n)$)
  * Ke-85 angka n adalah 8, 6, 2 dan 1 sebanyak 82 kali. $S(n) = 8 + 6 + 2 + 82 = 98$ (tidak memenuhi $P(n) = S(n)$)
  * Ke-85 angka n adalah 8, 3, 2, 2 dan 1 sebanyak 81 kali.
    $S(n) = 8 + 3 + 2 + 2 + 81 = 96$ (memenuhi)

  Karena angka-angka n adalah 8, 3, 2, 2 dan 1 sebanyak 81 kali maka n terbesar yang memenuhi adalah 83221111····111.

$\therefore$ Dapat disimpulkan bahwa nilai n terbesar yang memenuhi adalah **8322111**······**111**.