SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA TAHUN 2005

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2006

Bidang Matematika

Waktu : 3,5 Jam

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH UMUM
TAHUN 2005

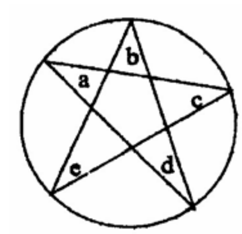
OLIMPIADE MATEMATIKA NASIONAL
SELEKSI TINGKAT KOTA/KABUPATEN
TAHUN 2005

Bagian Pertama

Pilih satu jawaban yang benar. Dalam hal terdapat lebih dari satu jawaban yang benar, pilih jawaban yang paling baik.

1. Bilangan $\frac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}$ adalah bilangan
   A. takrasional positif   C. rasional tidak bulat   E. bulat negatif
   B. takrasional negatif   D. bulat positif

2. Pada gambar di samping, a, b, c, d dan e berturut-turut menyatakan besar sudut pada titik-titik ujung bintang lima yang terletak pada suatu lingkaran. Jumlah a + b + c + d + e =
   A. 135^o B. 180^o C. 270^o
   D. 360^o E. tidak dapat ditentukan dengan pasti



3. Semula harga semangkuk bakso dan harga segelas jus masing-masing adalah Rp. 5000. Setelah kenaikan BBM, semangkuk bakso harganya naik 16% sedangkan harga segelas jus naik 4%. Kenaikan harga dari semangkuk bakso dan segelas jus adalah
   A. 8%   B. 10%   C. 12%   D. 15%   E. 20%

4. Jika a bilangan real yang memenuhi $a^2 < a$, maka
   A. a negatif   C. $1 < a$ E. tidak ada a yang memenuhi
   B. $a < 1$ D. $½ < a < 2$

5. Aries menggambar bagian dari parabola $y = x^2 - 6x + 7$. Titik-titik parabola yang muncul dalam gambar memiliki absis mulai dari 0 sampai +4. Maka ordinat terkecil dan ordinat terbesar titik-titik pada parabola yang muncul dalam gambar berturut-turut adalah
   A. –2 dan –1   B. –2 dan 7   C. –1 dan 7   D. 0 dan –1   E. 0 dan 7

6. Dua buah dadu dilemparkan bersamaan. Berapakah peluang jumlah angka yang muncul adalah 6 atau 8 ?
   A. $\frac{5}{36}$ B. $\frac{7}{36}$ C. $\frac{10}{36}$ D. $\frac{14}{36}$ E. $\frac{35}{36}$

7. Titik A(a, b) disebut *titik letis* jika a dan b keduanya adalah bilangan bulat. Banyaknya titik letis pada lingkaran yang berpusat di O dan berjari-jari 5 adalah
   A. 4   B. 6   C. 8   D. 12   E. tidak bisa dipastikan

8. Mana di antara 5 ekspresi berikut yang angka terakhirnya berturut-turut bukan 5, 6, 8, 9 atau 0 ?

A. $5^{5^{5^5}}$ B. $6^{6^{6^6}}$ C. $8^{8^{8^8}}$ D. $9^{9^{9^9}}$ E. $10^{10^{10^{10}}}$

9. Diberikan tiga bilangan positif x, y dan z yang semuanya berbeda. Jika $\frac{y}{x-z}=\frac{x+y}{z}=\frac{x}{y}$, maka nilai $\frac{x}{y}$ sama dengan

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{5}$ C. 1 D. 2 E. $\frac{10}{3}$

10. Jika diberikan persamaan $(x^2 - x - 1)^{x+2} = 1$, maka banyaknya bilangan bulat x yang merupakan solusi dari persamaan tersebut adalah

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5 E. 6

Bagian Kedua

Isikan hanya jawaban saja pada tempat yang disediakan

11. Faktor prima terbesar dari 2005 adalah ·····

12. Tentukan semua solusi persamaan $|x - 1| + |x - 4| = 2$.

13. Misalkan a dan b adalah bilangan real tak nol yang memenuhi $9a^2 - 12ab + 4b^2 = 0$. Tentukan $\frac{a}{b}$.

14. Diberikan dua buah persegi, A dan B, dimana luas A adalah separuh dari luas B. Jika keliling B adalah 20 cm, maka keliling A, dalam centimeter, adalah ····

15. Seorang siswa mempunyai dua celana berwarna biru dan abu-abu, tiga kemeja berwarna putih, merah muda dan kuning, serta dua pasang sepatu berwarna hitam dan coklat. Banyaknya cara siswa tersebut memakai pakaian dan sepatu adalah ······

16. Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi $x^4 + \frac{1}{x^4} \le 2$.

17. Tentukan semua bilangan tiga-angka sehingga nilai bilangan itu adalah 30 kali jumlah ketiga angka itu.

18. Nilai $\sin^8 75^o - \cos^8 75^o =$ ······

19. Diketahui bahwa segiempat ABCD memiliki pasangan sisi yang sejajar. Segiempat tersebut memiliki tepat satu sumbu simetri lipat jika ia berbentuk ········

20. Tentukan banyaknya pasangan bilangan bulat positif (m, n) yang merupakan solusi dari persamaan $\frac{4}{m}+\frac{2}{n}=1$.

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA 2005

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2006

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

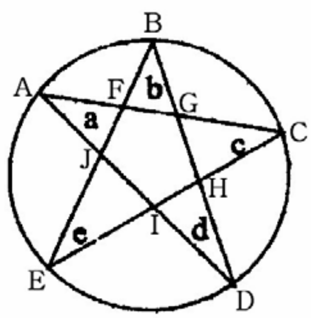
BAGIAN PERTAMA

1. (Jawaban : E)

$$\frac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)} = \frac{1}{(1-2)\left(2^2-3\right)} = -1$$

$\therefore$ $\frac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}$ adalah bilangan **bulat negatif**.

2. (Jawaban : B)



Misalkan penamaan titik seperti pada gambar.
Pada ΔEFC berlaku ∠EFC = 180° − (c + e). Maka ∠BFG = c + e
Pada ΔAGD berlaku ∠AGD = 180° − (a + d). Maka ∠FGB = a + d
Pada ΔFGB berlaku ∠BFG + ∠FGB + ∠FBG = 180°. Maka (c + e) + (a + d) + (b) = 180°.
$\therefore$ a + b + c + d + e = **180°.**

3. (Jawaban : B)

Kenaikan harga dari semangkuk bakso dan segelas jus = $\frac{16\% \cdot 5000 + 4\% \cdot 5000}{5000 + 5000}$ = 10%

$\therefore$ Kenaikan harga dari semangkuk bakso dan segelas jus adalah **10 %.**

4. (Jawaban : ?)
$a^2 < a$. Maka $a(a - 1) < 0$ sehingga $0 < a < 1$.
$\therefore$ Jika $a^2 < a$ maka $0 < a < 1$.

5. (Jawaban : B)
$y = x^2 - 6x + 7$
Nilai pada ujung-ujung interval, untuk x = 0 maka y = 7 sedangkan untuk x = 4 maka y = −1

$y_{maks} = -\frac{D}{4a} = -\frac{(-6)^2 - 4(1)(7)}{4(1)} = -2$ yang didapat untuk $x = -\frac{b}{2a} = 3$.

$\therefore$ Maka ordinat terkecil dan ordinat terbesar adalah **−2 dan 7.**

6. (Jawaban : C)
   Kemungkinan penjumlahan mata dadu sama dengan 6 ada 5, yaitu (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1).
   Kemungkinan penjumlahan mata dadu sama dengan 8 ada 5, yaitu (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2).
   Peluang jumlah angka yang muncul adalah 6 atau 8 = $\frac{5+5}{36}$
   $\therefore$ Peluang jumlah angka yang muncul adalah 6 atau 8 = $\frac{10}{36}$

7. (Jawaban : D)
   Persamaan lingkaran yang berpusat di O dan berjari-jari 5 adalah $x^2 + y^2 = 25$
   Karena $0^2 + 5^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ maka pasangan (x, y) bulat yang memenuhi ada 12, yaitu (0, 5), (0, –5), (5, 0), (–5, 0), (3, 4), (3, –4), (–3, 4), (–3, –4), (4, 3), (4, –3), (–4, 3) dan (–4, –3).
   $\therefore$ Banyaknya titik letis pada lingkaran yang berpusat di O dan berjari-jari 5 ada **12.**

8. (Jawaban : C)
   Karena 5^k memiliki angka satuan 5 untuk setiap k asli maka $5^{5^{5^5}}$ memiliki angka terakhir 5.
   Karena 6^k memiliki angka satuan 6 untuk setiap k asli maka $6^{6^{6^6}}$ memiliki angka terakhir 6.
   Karena 10^k memiliki angka satuan 0 untuk setiap k asli maka $10^{10^{10^{10}}}$ memiliki angka terakhir 0.
   8^1 memiliki angka satuan 8
   8^2 memiliki angka satuan 4
   8^3 memiliki angka satuan 2
   8^4 memiliki angka satuan 6
   8^5 memiliki angka satuan 8 dst
   Maka $8^{4k+i} \equiv 8^i \pmod{10}$ untuk setiap k dan i bilangan asli.
   Karena 8^{8^8} habis dibagi 4 maka $8^{8^{8^8}}$ memiliki angka satuan yang sama dengan 8^4 yaitu 6.
   9^1 memiliki angka satuan 9
   9^2 memiliki angka satuan 1
   9^3 memiliki angka satuan 9 dst
   Maka $9^{2k+i} \equiv 9^i \pmod{10}$ untuk setiap k dan i bilangan asli.
   Karena 9^k ganjil untuk k asli maka $9^{9^{9^9}}$ memiliki angka satuan yang sama dengan 9^1 yaitu 9.
   $\therefore$ Maka di antara $5^{5^{5^5}}$, $6^{6^{6^6}}$, $8^{8^{8^8}}$, $9^{9^{9^9}}$ dan $10^{10^{10^{10}}}$ yang angka terakhirnya berturut-turut bukan 5, 6, 8, 9 atau 0 adalah $8^{8^{8^8}}$.

9. (Jawaban : D)
   Misalkan $\frac{y}{x-z} = \frac{x+y}{z} = \frac{x}{y} = k$
   Maka : $y = k(x - z)$ .... (1)
   $x + y = kz$ .... (2)
   $x = ky$ .... (3)

Jumlahkan (1) + (2) + (3) sehingga 2(x + y) = k(x + y).
Karena x dan y keduanya positif maka x + y ≠ 0 sehingga k = 2.

Karena $\frac{x}{y} = k$ maka $\frac{x}{y} = 2$

∴ nilai $\frac{x}{y}$ sama dengan **2**

10. (Jawaban : C)
$(x^2 - x - 1)^{x + 2} = 1$
Kemungkinan-kemungkinan yang memenuhi adalah :
- x + 2 = 0. Maka x = –2
  $((-2)^2 - (-2) - 1) \neq 0$ maka x = –2 memenuhi
- $x^2 - x - 1 = 1$. Maka (x – 2)(x + 1) = 0
  x = 2 dan x = –1 keduanya memenuhi
- $x^2 - x - 1 = -1$. Maka x(x – 1) = 0 sehingga x = 0 atau x = 1
  Jika x = 0 maka x + 2 = 2 (bilangan genap). Maka x = 0 memenuhi
  Jika x = 1 maka x + 2 = 3 (bilangan ganjil). Maka x = 1 tidak memenuhi.

Nilai-nilai x yang memenuhi adalah –2, –1, 0 dan 2.
∴ Banyaknya bilangan bulat x yang merupakan solusi dari persamaan $(x^2 - x - 1)^{x + 2} = 1$ ada **4**.

BAGIAN KEDUA

11. 2005 = 5 · 401 dengan 401 adalah bilangan prima.
∴ Faktor prima terbesar dari 2005 adalah **401.**

12. $|x - 1| + |x - 4| = 2$
- Jika x ≤ 1
  Maka $|x - 1| = 1 - x$ dan $|x - 4| = 4 - x$
  1 – x + 4 – x = 2 sehingga x = $\frac{3}{2}$ (memenuhi karena x ≤ 1)
- Jika 1 < x ≤ 4
  Maka $|x - 1| = x - 1$ dan $|x - 4| = 4 - x$
  x – 1 + 4 – x = 2 sehingga 3 = 2 (tidak memenuhi kesamaan)
- Jika x > 4
  Maka $|x - 1| = x - 1$ dan $|x - 4| = x - 4$
  x – 1 + x – 4 = 2 sehingga x = $\frac{7}{2}$ (tidak memenuhi x > 4)

∴ Nilai x yang memenuhi persamaan $|x - 1| + |x - 4| = 2$ adalah x = $\frac{3}{2}$.

13. $9a^2 - 12ab + 4b^2 = 0$

Untuk $b \neq 0$ maka $\left(3\frac{a}{b} - 2\right)^2 = 0$

$\therefore$ Maka $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$

14. Luas B = 2 Luas A, maka B = 2A

Misalkan panjang sisi A = x dan panjang sisi B = y maka Luas B = $y^2 = 2x^2$ sehingga y = $x\sqrt{2}$

Keliling B = 4y. Maka $4x\sqrt{2} = 20$ sehingga x = $\frac{5}{2}\sqrt{2}$

Keliling A = 4x = $10\sqrt{2}$

$\therefore$ Keliling A = **$10\sqrt{2}$ cm**

15. Banyaknya cara siswa tersebut memakai pakaian dan sepatu = 2 x 3 x 2 = 12 cara

$\therefore$ Banyaknya cara siswa tersebut memakai pakaian dan sepatu adalah **12.**

16. $x^4 + \frac{1}{x^4} \leq 2$

Sesuai dengan ketaksamaan AM-GM maka $x^4 + \frac{1}{x^4} \geq 2\sqrt{x^4 \cdot \frac{1}{x^4}} = 2$

Karena $x^4 + \frac{1}{x^4} \leq 2$ dan $x^4 + \frac{1}{x^4} \geq 2$ maka ketaksamaan hanya dipenuhi jika $x^4 + \frac{1}{x^4} = 2$.

$\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2 = 0$

$\therefore$ Bilangan real x yang memenuhi persamaan adalah **x = 1 atau x = –1**

17. Misalkan bilangan tersebut adalah n = 100a + 10b + c

100a + 10b + c = 30(a + b + c)

10(7a – 2b) = 29c

$\frac{c}{7a - 2b} = \frac{10}{29}$

Karena 10 dan 29 relatif prima maka 7a – 2b = 29k dan c = 10k.

Karena $0 \leq c \leq 9$ maka nilai k yang memenuhi hanya k = 0 sehingga c = 0.

7a = 2b

Karena 2 dan 7 relatif prima sedangkan $0 \leq a, b \leq 9$ maka nilai a dan b yang memenuhi adalah a = 2 dan b = 7.

$\therefore$ Bilangan tiga angka yang memenuhi adalah **270.**

18. $\sin^8 75^o - \cos^8 75^o = (\sin^4 75^o + \cos^4 75^o)(\sin^4 75^o - \cos^4 75^o)$
    $\sin^8 75^o - \cos^8 75^o = ((\sin^2 75^o + \cos^2 75^o)^2 - 2(\sin^2 75^o)(\cos^2 75^o))(\sin^2 75^o + \cos^2 75^o)(\sin^2 75^o - \cos^2 75^o)$
    Mengingat bahwa $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ dan $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$ maka :
    $\sin^8 75^o - \cos^8 75^o = (1 - \frac{1}{2}\sin^2 150^o)(-\cos 120^o)$
    $\therefore$ $\sin^8 75^o - \cos^8 75^o = \frac{7}{16}$

19. Jika segiempat adalah trapesium sebarang maka belum dapat dipastikan bangun tersebut memiliki tepat satu sumbu simetri lipat sebab ada kemungkinan trapesium tersebut tidak memiliki sumbu simetri lipat.
    $\therefore$ Maka bangun tersebut adalah **trapesium sama kaki.**

20. $\frac{4}{m} + \frac{2}{n} = 1$
    $mn - 4n - 2m = 0$
    $(m - 4)(n - 2) = 8 = 2^3$
    Karena 4 dan 2 memiliki paritas yang sama maka $m - 4$ dan $n - 2$ memiliki paritas yang sama.
    Maka kemungkinan-kemungkinan penyelesaiannya adalah :
    - $m - 4 = -2$ dan $n - 2 = -4$
      $m = 2$ dan $n = -2$ (tidak memenuhi m dan n keduanya bulat positif)
    - $m - 4 = 2$ dan $n - 2 = 4$
      $m = 6$ dan $n = 6$ (memenuhi m dan n keduanya bulat positif)
    - $m - 4 = -4$ dan $n - 2 = -2$
      $m = 0$ dan $n = 0$ (tidak memenuhi m dan n keduanya bulat positif)
    - $m - 4 = 4$ dan $n - 2 = 2$
      $m = 8$ dan $n = 4$ (memenuhi m dan n keduanya bulat positif)

    $\therefore$ Banyaknya pasangan bilangan bulat positif (m, n) yang memenuhi ada **2.**

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2006

TINGKAT PROVINSI

Bidang Matematika

Bagian Pertama

Waktu : 90 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH UMUM
TAHUN 2005

OLIMPIADE MATEMATIKA
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2005

BAGIAN PERTAMA

1. Jika a sebuah bilangan rasional dan b adalah sebuah bilangan tak rasional, maka a + b adalah bilangan ······

2. Jumlah sepuluh bilangan prima yang pertama adalah ·····

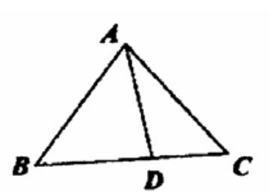
3. Banyaknya himpunan X yang memenuhi $\{1, 2\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ adalah ·····

4. Jika N = 123456789101112 ··· 9899100, maka tiga angka pertama $\sqrt{N}$ adalah ·····

5. Misalkan ABCD adalah sebuah trapesium dengan BC║AD. Titik-titik P dan R berturut-turut adalah titik tengah sisi AB dan CD. Titik Q terletak pada sisi BC sehingga BQ : QC = 3 : 1, sedangkan titik S terletak pada sisi AD sehingga AS : SD = 1 : 3. Maka rasio luas segiempat PQRS terhadap luas trapesium ABCD adalah ······

6. Bilangan tiga-angka terkecil yang merupakan bilangan kuadrat sempurna dan bilangan kubik (pangkat tiga) sempurna sekaligus adalah ·····

7. Jika a, b dua bilangan asli $a \le b$ sehingga $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{4}+\sqrt{b}}$ adalah bilangan rasional, maka pasangan terurut (a, b) = ······

8. 

   Jika AB = AC, AD = BD, dan besar sudut DAC = 39°, maka besar sudut BAD adalah ·····

9. Ketika mendaki sebuah bukit, seorang berjalan dengan kecepatan 1½ km/jam. Ketika menuruni bukit tersebut, ia berjalan tiga kali lebih cepat. Jika waktu yang dibutuhkan untuk melakukan perjalanan bolak-balik dari kaki bukit ke puncak bukit dan kembali ke kaki bukit adalah 6 jam, maka jarak antara kaki bukit dan puncak bukit (dalam km) adalah ····

10. Sebuah segienam beraturan dan sebuah segitiga sama sisi mempunyai keliling yang sama. Jika luas segitiga adalah $\sqrt{3}$, maka luas segienam adalah ····

11. Dua buah dadu dilemparkan secara bersamaan. Peluang jumlah kedua angka yang muncul adalah bilangan prima adalah ····

12. Keliling sebuah segitiga samasisi adalah p. Misalkan Q adalah sebuah titik di dalam segitiga tersebut. Jika jumlah jarak dari Q ke ketiga sisi segitiga adalah s, maka, dinyatakan dalam s, p = ...

13. Barisan bilangan asli (a, b, c) dengan $a \geq b \geq c$, yang memenuhi sekaligus kedua persamaan $ab + bc = 44$ dan $ac + bc = 23$ adalah .....

14. Empat buah titik berbeda terletak pada sebuah garis. Jarak antara sebarang dua titik dapat diurutkan menjadi barisan 1, 4, 5, k, 9, 10. Maka k = ...

15. Sebuah kelompok terdiri dari 2005 anggota. Setiap anggota memegang tepat satu rahasia. Setiap anggota dapat mengirim surat kepada anggota lain manapun untuk menyampaikan seluruh rahasia yang dipegangnya. Banyaknya surat yang perlu dikirim agar semua anggota kelompok mengetahui seluruh rahasia adalah .....

16. Banyaknya pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi persamaan $2xy - 5x + y = 55$ adalah ....

17. Himpunan A dan B saling lepas dan $A \cup B = \{1, 2, 3, \cdots, 9\}$. Hasil perkalian semua unsur A sama dengan jumlah semua unsur B. Unsur terkecil B adalah ....

18. Bentuk sederhana dari

$$\frac{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)}\cdots\frac{(100^3-1)}{(100^3+1)}$$

adalah ....

19. Misalkan ABCD adalah limas segitiga beraturan, yaitu bangun ruang bersisi empat yang berbentuk segitiga samasisi. Misalkan S adalah titik tengah rusuk AB dan T titik tengah rusuk CD. Jika panjang rusuk ABCD adalah 1 satuan panjang, maka panjang ST adalah ....

20. Untuk sembarang bilangan real a, notasi $\lfloor a \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan a. Jika x bilangan real yang memenuhi $\lfloor x + \sqrt{3} \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor \sqrt{3} \rfloor$, maka $x - \lfloor x \rfloor$ tidak akan lebih besar dari .....

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2006

TINGKAT PROVINSI

Bidang Matematika

Bagian Kedua

Waktu : 120 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH UMUM
TAHUN 2005

OLIMPIADE MATEMATIKA
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2005

BAGIAN KEDUA

1. Panjang sisi terbesar pada segiempat talibusur ABCD adalah a, sedangkan jari-jari lingkaran luar ΔACD adalah 1. Tentukan nilai terkecil yang mungkin bagi a. Segiempat ABCD yang bagaimana yang memberikan nilai a sama dengan nilai terkecil tersebut ?

2. Di dalam sebuah kotak terdapat 4 bola yang masing-masing bernomor 1, 2, 3 dan 4. Anggi mengambil bola secara acak, mencatat nomornya, dan mengembalikannya ke dalam kotak. Hal yang sama ia lakukan sebanyak 4 kali. Misalkan jumlah dari keempat nomor bola yang terambil adalah 12. Berapakah peluang bola yang terambil selalu bernomor 3 ?

3. Jika α, β dan γ adalah akar-akar persamaan $x^3 - x - 1 = 0$, tentukan
$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\frac{1+\beta}{1-\beta}+\frac{1+\gamma}{1-\gamma}$$

4. Panjang ketiga sisi a, b, c dengan $a \le b \le c$, sebuah segitiga siku-siku adalah bilangan bulat. Tentukan semua barisan (a, b, c) agar nilai keliling dan nilai luas segitiga tersebut sama.

5. Misalkan A dan B dua himpunan, masing-masing beranggotakan bilangan-bilangan asli yang berurutan. Jumlah rata-rata aritmatika unsur-unsur A dan rata-rata aritmatika unsur-unsur B adalah 5002. Jika $A \cap B = \{2005\}$, tentukan unsur terbesar yang mungkin dari himpunan $A \cup B$.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2006
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2005

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Bagian Pertama

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN PERTAMA

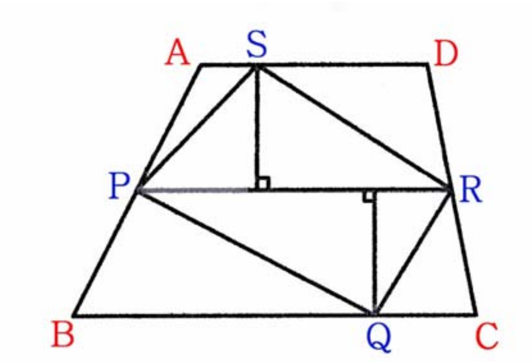
1. Bilangan rasional + bilangan tak rasional = bilangan tak rasional
   ∴ a + b adalah bilangan **tak rasional.**

2. Sepuluh bilangan prima pertama adalah 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.
   2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 = 129
   ∴ Jumlah sepuluh bilangan prima pertama = **129**

3. $\{1, 2\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$
   X terdiri dari sedikitnya 2 unsur dan maksimal 5 unsur dengan 2 unsur di antaranya haruslah 1 dan 2. Sedangkan sisanya dipilih dari unsur-unsur 3, 4 atau 5.
   Jika X terdiri dari 2 unsur maka banyaknya himpunan X = ${}_3C_0 = 1$
   Jika X terdiri dari 3 unsur maka banyaknya himpunan X = ${}_3C_1 = 3$
   Jika X terdiri dari 4 unsur maka banyaknya himpunan X = ${}_3C_2 = 3$
   Jika X terdiri dari 5 unsur maka banyaknya himpunan X = ${}_3C_3 = 1$
   ∴ Banyaknya himpunan X = 1 + 3 + 3 + 1 = **8.**

4. N = 123456789101112 ··· 9899100
   Banyaknya angka 123456789 adalah 9.
   Karena 10, 11, ···, 99 adalah bilangan 2 angka maka banyaknya digit 101112···99 adalah genap.
   Banyaknya angka 100 = 3
   Maka banyaknya angka N adalah merupakan bilangan genap.
   Mengingat $350^2 = 122500$, $351^2 = 123201$, $352^2 = 123904$, $110^2 = 12100$, $111^2 = 12321$, $112^2 = 12544$ maka kemungkinan tiga angka pertama dari $\sqrt{N}$ adalah 351 atau 111.
   Akan dibuktikan bahwa jika tiga angka pertama $\sqrt{N}$ adalah 111 maka banyaknya digit $\lfloor N \rfloor$ akan ganjil sedangkan jika tiga angka pertama $\sqrt{N}$ adalah 351 maka banyaknya digit $\lfloor N \rfloor$ akan genap.
   $N = (111 \cdot 10^k + p)^2 = 12321 \cdot 10^{2k} + 222p \cdot 10^k + p^2$ dengan banyaknya angka $\lfloor p \rfloor$ tidak lebih dari k.
   Karena banyaknya angka $\lfloor p \rfloor$ tidak lebih dari k maka $p < 10^k$.
   $N < 12321 \cdot 10^{2k} + 222 \cdot 10^{2k} + 10^{2k} = 12544 \cdot 10^{2k}$
   $12321 \cdot 10^{2k} < N < 12544 \cdot 10^{2k}$
   Maka banyaknya angka N sama dengan banyaknya angka $12321 \cdot 10^{2k}$ yang merupakan bilangan ganjil.
   $N = (351 \cdot 10^k + p)^2 = 123201 \cdot 10^{2k} + 702p \cdot 10^k + p^2$ dengan banyaknya angka $\lfloor p \rfloor$ tidak lebih dari k.
   Karena banyaknya angka $\lfloor p \rfloor$ tidak lebih dari k maka $p < 10^k$.
   $N < 123201 \cdot 10^{2k} + 702 \cdot 10^{2k} + 10^{2k} = 123904 \cdot 10^{2k}$
   $123201 \cdot 10^{2k} < N < 123904 \cdot 10^{2k}$
   Maka banyaknya angka N sama dengan banyaknya angka $123201 \cdot 10^{2k}$ yang merupakan bilangan genap.
   ∴ Tiga angka pertama $\sqrt{N}$ adalah **351.**

5. Misalkan [PQRS] menyatakan luas segiempat PQRS

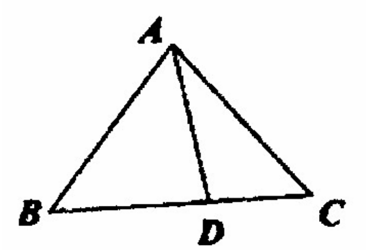


Misalkan juga jarak antara garis AD dan BC adalah t
[ABCD] = ½ (AD + BC) · t
Karena P dan R berurutan adalah pertengahan AB dan CD maka PR sejajar CD dan berlaku :
PR = ½ (AD + BC)
Jarak titik Q ke PR = jarak titik S ke PR = ½ t
[PQRS] = [PQR] + [PRS] = ½ (½t)(PR) + ½ (½t)(PR)
[PQRS] = (½t)(PR) = ½ (½ (AD + BC) · t) = ½ [ABCD]
∴ Rasio luas segiempat PQRS terhadap luas trapesium ABCD adalah **1 : 2**

6. Bilangan kuadrat yang juga merupakan bilangan pangkat tiga adalah bilangan pangkat enam.
$2^6 = 64$ dan $3^6 = 729$
∴ Bilangan tiga-angka terkecil yang merupakan bilangan kuadrat sempurna dan bilangan kubik (pangkat tiga) sempurna sekaligus adalah **729.**

7. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{4}+\sqrt{b}} = \frac{p}{q}$ dengan a, b, p dan q asli dan a ≤ b serta p dan q keduanya relatif prima.
$\left(q\sqrt{3} - 2p\right)^2 = \left(p\sqrt{b} - q\sqrt{a}\right)^2$
$3q^2 + 4p^2 - 4pq\sqrt{3} = p^2b + q^2a - 2pq\sqrt{ab}$
Karena a, b, p, q semuanya asli maka $2\sqrt{3} = \sqrt{ab}$ sehingga ab = 12.
Kemungkinan pasangan (a, b) yang memenuhi adalah (1, 12), (2, 6) dan (3, 4)
Jika a = 1 dan b = 12 maka $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{4}+\sqrt{b}} = \frac{1}{2}$ yang merupakan bilangan rasional.
Jika a = 2 dan b = 6 maka $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{4}+\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ yang bukan merupakan bilangan rasional.
Jika a = 3 dan b = 4 maka $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{4}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ yang bukan merupakan bilangan rasional.
∴ Pasangan terurut (a, b) adalah **(1, 12)**

8.



Misalkan $\angle BAD = \alpha$
Karena AD = BD maka $\angle ABD = \alpha$
Karena AB = AC maka $\angle ACB = \alpha$
Pada ΔABC berlaku $(\alpha) + (\alpha + 39^o) + (\alpha) = 180^o$. Maka $\alpha = 47^o$
$\therefore$ Besarnya sudut BAD = **47^o.**

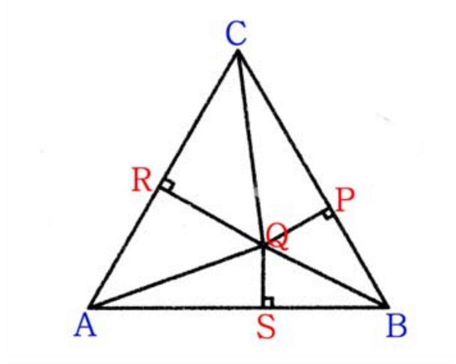
9. $v_n = 1\frac{1}{2}$ km/jam dan $v_t = 4\frac{1}{2}$ km/jam
Misalkan jarak antara kaki bukit dan puncak bukit dalam km adalah s.
$\frac{s}{1,5} + \frac{s}{4,5} = 6$ maka $s = \frac{27}{4}$ km
$\therefore$ Jarak antara kaki bukit dan puncak bukit = $\frac{27}{4}$ **km**

10. Karena keliling segienam beraturan sama dengan keliling segitiga sama sisi maka panjang sisi segitiga beraturan dua kali panjang sisi segienam beraturan.
Misalkan panjang sisi segienam beraturan = a maka panjang sisi segitiga sama sisi = 2a.
Luas segitiga sama sisi = $\frac{1}{2}(2a)^2 \sin 60^o = \sqrt{3}$
a = 1
Pada segienam beraturan, jari-jari lingkaran luar segienam beraturan sama dengan panjang sisinya.
Luas segienam beraturan = $6 \cdot \frac{1}{2}(a^2) \sin 60^o$
$\therefore$ Luas segienam beraturan = $\frac{3}{2}\sqrt{3}$

11. Kemungkinan penjumlahan dua angka dadu bilangan prima adalah 2, 3, 5, 7, atau 11.
* Jika jumlah angka dadu = 2 maka banyaknya kemungkinan ada 1, yaitu (1,1)
* Jika jumlah angka dadu = 3 maka banyaknya kemungkinan ada 2, yaitu (1,2), (2,1)
* Jika jumlah angka dadu = 5 maka banyaknya kemungkinan ada 4, yaitu (1,4),(2,3),(3,2),(4,1)
* Jika jumlah angka dadu = 7 maka banyaknya kemungkinan ada 6, yaitu (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)
* Jika jumlah angka dadu = 11 maka banyaknya kemungkinan ada 2, yaitu (5,6), (6,5)

Banyaknya kemungkinan seluruhnya = 1 + 2 + 4 + 6 + 2 = 15
$\therefore$ Peluang jumlah kedua angka dadu yang muncul adalah bilangan prima = $\frac{15}{36}$

12. Misalkan segitiga tersebut adalah ΔABC. Maka AB + AC + BC = p sehingga AB = AC = BC = $\frac{1}{3}p$



Luas ΔABC = $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}p\right)^2 \sin\ 60^\circ$ = $\frac{1}{36}p^2\sqrt{3}$ dan QP + QR + QS = s

Luas ΔABC = Luas ΔABQ + Luas ΔACQ + Luas ΔBCQ = ½ AB QS + ½ AC QR + ½ BC QP

$\frac{1}{36}p^2\sqrt{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}p\right)(s)$

$\therefore \quad p = 2s\sqrt{3}$

13. ab + bc = 44 dan ac + bc = 23 dengan a, b, c asli dan a ≥ b ≥ c
Karena c(a + b) = 23 dengan a, b dan c asli maka c = 1 atau 23
Jika c = 23 maka a + b = 1 (tidak memenuhi sebab a + b ≥ 2). Maka c = 1
a + b = 23 dan ab + b = 44
(23 − b)b + b = 44, maka $b^2 - 24b + 44 = 0$ sehingga (b − 22)(b − 2) = 0
b = 2 atau b = 22
Jika b = 22 maka a = 1 (tidak memenuhi a ≥ b). Maka b = 2 dan a = 21
∴ Barisan bilangan asli (a, b, c) yang memenuhi adalah **(21, 2, 1).**

14. Misal garis tersebut terletak pada sumbu X.
Angap titik A adalah titik paling kiri, D paling kanan serta B dan C terletak di antara A dan D dengan titik terdekat pada A adalah B.
Tanpa mengurangi keumuman misalkan titik A berada pada x = 0 dan D pada koordinat x = 10.
Karena ada yang berjarak 1 dan 9 maka salah satu B berada di x = 1 atau C pada x = 9
- Jika B terletak pada x = 1
  Jarak B dan D = 9
  Karena harus ada dua titik yang berjarak 4 maka kemungkinan posisi C ada di x = 4, 5 atau 6.
  Posisi C tidak mungkin di x = 4 sebab akan membuat jarak antara sebarang dua titik adalah 1, 3, 4, 6, 9, 10.
  Posisi C tidak mungkin di x = 5 sebab akan membuat jarak antara sebarang dua titik adalah 1, 4, 5, 9, 10 (tidak ada nilai k)
  Maka posisi C di x = 6 yang akan membuat jarak dua titik sebarang adalah 1, 4, 5, 6, 9, 10
  k = 6
- Jika C terletak pada x = 9
  Jarak C dan A = 9

Karena harus ada dua titik yang berjarak 4 maka kemungkinan posisi B ada di x = 4, 5 atau 6.
Posisi B tidak mungkin di x = 6 sebab akan membuat jarak antara sebarang dua titik adalah 1, 3, 4, 6, 9, 10.
Posisi B tidak mungkin di x = 5 sebab akan membuat jarak antara sebarang dua titik adalah 1, 4, 5, 9, 10 (tidak ada nilai k)
Maka posisi B di x = 4 yang akan membuat jarak dua titik sebarang adalah 1, 4, 5, 6, 9, 10
k = 6

∴ Maka k = **6**

15. Secara umum untuk kelompok terdiri dari n anggota. Orang ke-k akan menerima surat setelah sedikitnya terjadi k − 2 telepon. Maka orang terakhir akan menerima surat yang pertama sedikitnya setelah terjadi n − 2 kiriman surat. Setelah orang ke-n menerima surat berarti sedikitnya telah terjadi n − 1 kiriman surat. Semua informasi yang didapat oleh orang ke-n akan disebar kepada seluruh orang selain dirinya. Sedikitnya dibutuhkan n − 1 surat.
Maka banyaknya surat minimum yang diperlukan sehingga setiap orang akan mengetahui n informasi adalah 2(n − 1)

∴ Banyaknya surat yang diperlukan adalah **4008.**

16. 2xy − 5x + y = 55, maka (2x + 1)(2y − 5) = 105 = 3 · 5 · 7
Maka 2y − 5 membagi 105 sehingga 2y − 5 = ±1, ±3, ±5, ±7, ±15, ±21, ±35, ±105.
Karena 105 merupakan perkalian bilangan ganjil maka semua faktor 105 adalah bilangan ganjil.
Karena penjumlahan dua bilangan ganjil adalah bilangan genap yang pasti habis dibagi 2 maka berapa pun faktor positif dan faktor negatif dari 105 akan membuat 2x + 1 dan 2y − 5 keduanya membagi faktor dari 105 tersebut.
105 memiliki 8 faktor positif dan 8 faktor negatif.

∴ Maka banyaknya pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi adalah **16.**

17. Misalkan hasil perkalian semua unsur A = p dan penjumlahan semua unsur B = s, maka p = s
Himpunan A dapat terdiri dari 1 atau lebih unsur.
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45

* Andaikan 1 adalah unsur terkecil B.
  - Jika A terdiri dari sedikitnya 4 unsur
    Karena 1 bukanlah unsur dari A maka p ≥ 2 · 3 · 4 · 5 = 120 > 45 (tidak dapat tercapai p=s)
  - Jika A terdiri dari 3 unsur
    Misalkan ketiga unsur A tersebut adalah a, b dan c. Jelas bahwa abc < 45
    Kemungkinan unsur-unsur A adalah (2,3,4), (2,3,5), (2,3,6), (2,3,7) dan (2,4,5)
    Jika unsur-unsur A adalah (2,3,4) maka p = 24 dan s = 45 − 9 = 36 (tidak memenuhi p=s)
    Jika unsur-unsur A adalah (2,3,5) maka p = 30 dan s = 45 − 10 = 35 (tidak memenuhi p=s)
    Jika unsur-unsur A adalah (2,3,6) maka p = 36 dan s = 45 − 11 = 34 (tidak memenuhi p=s)
    Jika unsur-unsur A adalah (2,3,7) maka p = 42 dan s = 45 − 12 = 33 (tidak memenuhi p=s)
    Jika unsur-unsur A adalah (2,4,5) maka p = 40 dan s = 45 − 11 = 34 (tidak memenuhi p=s)
    Maka jika A terdiri dari 3 unsur maka tidak ada yang memenuhi p = s.
  - Jika A terdiri dari 2 unsur
    Misalkan kedua unsur A tersebut adalah a dan b dengan 1 ≤ a, b ≤ 9.
    Karena p = s maka ab = 45 − a − b sehingga (a + 1)(b + 1) = 46 = 23 · 2
    Misalkan a > b maka a + 1 = 23 dan b + 1 = 2. Maka a = 22 (tidak memenuhi a ≤ 9)

- Jika A terdiri dari 1 unsur
  $p \leq 9$ sedangkan $s \geq 45 - 9 = 36$ (tidak mungkin tercapai p = s)

* Andaikan 2 adalah unsur terkecil B
Jika A = {1, 4, 8} dan B = {2, 3, 5, 6, 7, 9} maka :
$p = 1 \cdot 4 \cdot 8 = 32$ dan $s = 45 - 1 - 4 - 8 = 32$ (terpenuhi p = s)

$\therefore$ Unsur terkecil dari B adalah **2**.

18. Misalkan $\frac{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)} \cdots \frac{(100^3-1)}{(100^3+1)}$ = X

$$\frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}$$

$$X = \frac{(2-1)(3-1)(4-1)}{(2+1)(3+1)(4+1)} \cdots \frac{(100-1)}{(100+1)} \frac{(2^2+2+1)(3^2+3+1)(4^2+4+1)}{(2^2-2+1)(3^2-3+1)(4^2-4+1)} \cdots \frac{(100^2+100+1)}{(100^2-100+1)}$$

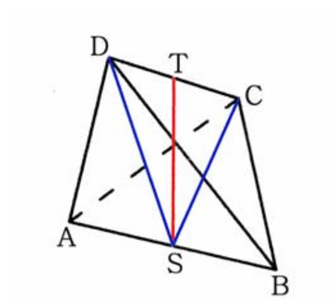
Perhatikan bahwa $n^2 + n + 1 = (n + 1)^2 - (n + 1) + 1$. Maka $2^2 + 2 + 1 = 3^2 - 3 + 1$; $3^2 + 3 + 1 = 4^2 - 4 + 1$ dan seterusnya.

$$X = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 99}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot 101} \cdot \frac{100^2+100+1}{2^2-2+1}$$

$$X = \frac{2}{100 \cdot 101} \cdot \frac{10101}{3} = \frac{1}{50 \cdot 101} \cdot 3367$$

$$\therefore \frac{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)} \cdots \frac{(100^3-1)}{(100^3+1)} = \frac{3367}{5050}$$

19.



Karena ΔABD sama sisi dan S pertengahan AB maka DS garis tinggi.

$DS = AD \sin 60^o = ½\sqrt{3}$.

Dengan cara yang sama $CS = ½\sqrt{3}$. Maka ΔCDS sama kaki. Karena ΔCDS sama kaki dan T pertengahan CD maka ST tegak lurus DT.

$ST^2 = DS^2 - DT^2$

$$ST = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$\therefore$ **ST =** $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

20. $\lfloor x + \sqrt{3} \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor \sqrt{3} \rfloor$

$\lfloor x + \sqrt{3} \rfloor > x + \sqrt{3} - 1$

$\lfloor x \rfloor + \lfloor \sqrt{3} \rfloor > x + \sqrt{3} - 1$

Mengingat $\lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1$ maka :

$x - \lfloor x \rfloor < 2 - \sqrt{3}$

Jika $x - \lfloor x \rfloor = 2 - \sqrt{3}$ maka $\lfloor x + \sqrt{3} \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor \sqrt{3} \rfloor$ akan menjadi $\lfloor x \rfloor + 2 = \lfloor x \rfloor + 1$ sehingga kesamaan tidak mungkin terjadi.

Jika $x - \lfloor x \rfloor$ kurang sedikit dari $2 - \sqrt{3}$ maka $\lfloor x + \sqrt{3} \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor \sqrt{3} \rfloor$ akan menjadi $\lfloor x \rfloor + 1 = \lfloor x \rfloor + 1$ sehingga kesamaan terjadi.

$\therefore$ Maka $x - \lfloor x \rfloor$ tidak akan lebih besar dari $2 - \sqrt{3}$.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2006
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2005

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

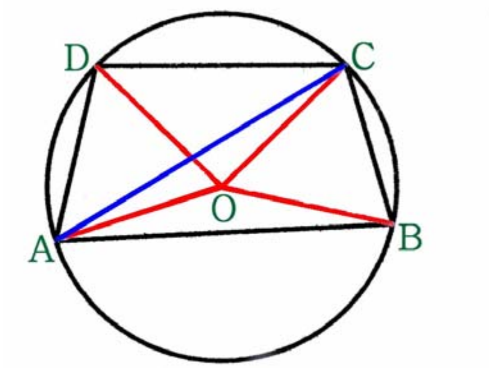
Bidang Matematika

Bagian Kedua

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN KEDUA

1.



Misalkan ABCD adalah segiempat tali busur tersebut dan O adalah pusat lingkaran. Karena lingkaran tersebut juga merupakan lingkaran luar ΔABC maka sesuai dalil sinus :

$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = 2R = 2$ dengan R menyatakan jari-jari lingkaran luar ΔABC

Karena $\angle$AOB = 2$\angle$ACB maka :

AB = 2 sin $\left(\frac{\angle AOB}{2}\right)$

Dengan cara yang sama didapat :

BC = 2 sin $\left(\frac{\angle BOC}{2}\right)$

CD = 2 sin $\left(\frac{\angle COD}{2}\right)$

AD = 2 sin $\left(\frac{\angle AOD}{2}\right)$

$\angle$AOB + $\angle$BOC + $\angle$COD + $\angle$AOD = 360^o

Maka min($\angle$AOB, $\angle$BOC, $\angle$COD, $\angle$AOD) $\leq 90^o$

Diketahui bahwa a = maks (AB, BC, CD, AD)

Karena untuk $0^o \leq x \leq 90^o$ nilai sin x naik maka :

a = maks (AB, BC, CD, AD) $\geq$ 2 sin $\left(\frac{90^\circ}{2}\right)$

a $\geq \sqrt{2}$

Maka nilai minimal a = $\sqrt{2}$

Karena maks($\angle$AOB, $\angle$BOC, $\angle$COD, $\angle$AOD) = min($\angle$AOB, $\angle$BOC, $\angle$COD, $\angle$AOD) = 90^o maka :

$\angle$AOB = $\angle$BOC = $\angle$COD = $\angle$AOD = 90^o yang berarti AB = BC = CD = AD.

Karena $\angle$AOD = 90^o sedangkan ΔAOD sama kaki maka $\angle$DOA = 45^o. Dengan cara yang sama didapat $\angle$COD = 45^o yang berarti segiempat ABCD adalah persegi.

$\therefore$ **Maka nilai a terkecil adalah $\sqrt{2}$ yang membuat segiempat ABCD adalah persegi.**

2. Kemungkinan empat jenis bola yang terambil adalah :
   - Keempat bola tersebut adalah (1, 3, 4, 4)

     Karena ada 4 obyek dan terdapat 2 yang sama maka banyaknya kemungkinan = $\frac{4!}{2!}$ = 12

     Semua kemungkinannya adalah (1, 3, 4, 4); (1, 4, 3, 4); (1, 4, 4, 3); (3, 1, 4, 4); (3, 4, 1, 4); (3, 4, 4, 1); (4, 1, 3, 4); (4, 1, 4, 3); (4, 3, 1, 4); (4, 3, 4, 1); (4, 4, 1, 3); (4, 4, 3, 1).
   - Keempat bola tersebut adalah (2, 3, 3, 4)

     Banyaknya kemungkinan = $\frac{4!}{2!}$ = 12

     Semua kemungkinannya adalah (2, 3, 3, 4); (2, 3, 4, 3); (2, 4, 3, 3); (3, 2, 3, 4); (3, 2, 4, 3); (3, 3, 2, 4); (3, 3, 4, 2); (3, 4, 2, 3); (3, 4, 3, 2); (4, 2, 3, 3); (4, 3, 2, 3); (4, 3, 3, 2).
   - Keempat bola tersebut adalah (2, 2, 4, 4)

     Banyaknya kemungkinan = $\frac{4!}{2!\cdot 2!}$ = 6

     Semua kemungkinannya adalah (2, 2, 4, 4); (2, 4, 2, 4); (2, 4, 4, 2); (4, 2, 2, 4); (4, 2, 4, 2); (4, 4, 2, 2).
   - Keempat bola tersebut adalah (3, 3, 3, 3)

     Banyaknya kemungkinan = $\frac{4!}{4!}$ = 1

     Semua kemungkinannya adalah (3, 3, 3, 3)

   Total banyaknya kemungkinan adalah 12 + 12 + 6 + 1 = 31

   Hanya ada satu cara kemungkinan angka yang muncul selalu 3.

   $\therefore$ Peluang bola yang terambil selalu bernomor 3 adalah = $\frac{1}{31}$

3. Dari $x^3 - x - 1 = 0$ serta $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ didapat A = 1, B = 0, C = –1 dan D = –1

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{B}{A} = 0$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{C}{A} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{D}{A} = -\frac{(-1)}{1} = 1$$

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma} = \frac{(1+\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) + (1+\beta)(1-\alpha)(1-\gamma) + (1+\gamma)(1-\alpha)(1-\gamma)}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}$$

$$= \frac{3 - (\alpha+\beta+\gamma) - (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma) + 3\alpha\beta\gamma}{1 - (\alpha+\beta+\gamma) + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma) - \alpha\beta\gamma}$$

$$= \frac{3 - (0) - (-1) + 3(1)}{1 - (0) + (-1) - (1)}$$

$$= \mathbf{-7}$$

$$\therefore \frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma} = \mathbf{-7}$$

4. $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ .... (1)
Luas ΔABC = ½ab = a + b + c, maka ab = 2(a + b + c) .... (2)
Karena a, b dan c adalah bilangan bulat maka sekurang-kurangnya salah satu di antara a atau b adalah kelipatan 2.
Jika a = 2k dengan k ∈ bilangan asli maka :
$2k\sqrt{c^2 - 4k^2} = 2(2k + \sqrt{c^2 - 4k^2} + c)$
$k\sqrt{c^2 - 4k^2} = (2k + \sqrt{c^2 - 4k^2} + c)$
$(k-1)\sqrt{c^2 - 4k^2} = c + 2k$
$(k-1)^2(c+2k)(c-2k) = (c+2k)^2$
$(k-1)^2(c-2k) = (c+2k)$
$(k-1)^2(c-2k) = c - 2k + 4k$
$(c-2k)(k^2 - 2k) = 4k$
Karena k ≠ 0 maka $(c-2k)(k-2) = 4$ .... (3)
Karena c, k ∈ bilangan asli maka (k − 2) pasti membagi 4 dan karena c > 2k maka (k − 2) > 0
Nilai k yang memenuhi adalah 3; 4; 6
Untuk k = 3 maka a = 6 sehingga c = 10 dan b = 8 .... (4)
Untuk k = 4 maka a = 8 sehingga c = 10 dan b = 6 .... (5)
Untuk k = 6 maka a = 12 sehingga c = 13 dan b = 5 .... (6)
Karena a dan b simetris maka jika b = 2k akan didapat
Untuk k = 3 maka b = 6 sehingga c = 10 dan a = 8 .... (7)
Untuk k = 4 maka b = 8 sehingga c = 10 dan a = 6 .... (8)
Untuk k = 6 maka b = 12 sehingga c = 13 dan a = 5 .... (9)
Tripel (a, b, c) yang memenuhi a ≤ b ≤ c adalah (6, 8, 10) dan (5, 12, 13).
Setelah dicek ke persamaan a + b + c = ½ab maka kedua tripel ini memenuhi.
∴ **Maka tripel (a, b, c) yang memenuhi adalah (6, 8, 10) dan (5, 12, 13)**

5. Karena A dan B masing-masing beranggotakan bilangan asli berurutan sedangkan A ∩ B = {2005} maka 2005 adalah anggota terbesar dari A dan anggota terkecil dari B.
A = {x, x + 1, x + 2, ···, 2005) dan B = {2005, 2006, ···, y − 1, y}
A ∪ B = {x, x + 1, ···, y − 1, y}
Maka unsur yang terbesar dari A ∪ B adalah y.
$$\frac{x + x + 1 + \cdots + 2005}{2006 - x} + \frac{2005 + 2006 + \cdots + y}{y - 2004} = 5002$$
$$\frac{x + 2005}{2} + \frac{2005 + y}{2} = 5002$$
x + y + 4010 = 10004
x + y = 5994
Karena x bilangan asli maka x terkecil = 1 sehingga maksimum y = 5994 − 1 = 5993.
∴ **Unsur terbesar yang mungkin dari A ∪ B adalah 5993.**

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2006

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2005

JAKARTA, 4 – 9 SEPTEMBER 2005

Bidang Matematika

Hari Pertama

Waktu : 180 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH UMUM
TAHUN 2005

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2005
4 – 9 SEPTEMBER 2005
JAKARTA

BIDANG : MATEMATIKA

HARI PERTAMA

WAKTU : 180 MENIT

1. Misalkan n bilangan bulat positif. Tentukan banyaknya segitiga (tidak saling kongruen) yang panjang setiap sisinya adalah bilangan bulat dan panjang sisi terpanjangnya adalah n.

2. Untuk sebarang bilangan asli n, didefinisikan p(n) sebagai hasil kali digit-digit n (dalam representasi basis 10). Tentukan semua bilangan asli n sehingga $11 \cdot p(n) = n^2 - 2005$.

3. Misalkan k dan m bilangan-bilangan asli sehingga $\frac{1}{2}\left(\sqrt{k+4\sqrt{m}}-\sqrt{k}\right)$ adalah bilangan bulat.
   a. Buktikan bahwa $\sqrt{k}$ bilangan rasional
   b. Buktikan bahwa $\sqrt{k}$ bilangan asli

4. Misalkan M suatu titik di dalam segitiga ABC sedemikian rupa hingga $\angle AMC = 90^o$, $\angle AMB = 150^o$ dan $\angle BMC = 120^o$. Titik pusat lingkaran luar dari segitiga-segitiga AMC, AMB dan BMC berturut-turut adalah P, Q dan R. Buktikan bahwa luas segitiga PQR lebih besar dari luas segitiga ABC.

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2006

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2005

JAKARTA, 4 – 9 SEPTEMBER 2005

Bidang Matematika

Hari Kedua

Waktu : 180 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH UMUM
TAHUN 2005

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2005
4 – 9 SEPTEMBER 2005
JAKARTA

BIDANG : MATEMATIKA

HARI KEDUA

WAKTU : 180 MENIT

5. Untuk sebarang bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Buktikan bahwa ada tepat satu bilangan bulat m yang memenuhi persamaan

$$m - \left\lfloor \frac{m}{2005} \right\rfloor = 2005$$

6. Tentukan semua tripel bilangan bulat (x, y, z) yang memenuhi sistem persamaan

$$x(y + z) = y^2 + z^2 - 2$$
$$y(z + x) = z^2 + x^2 - 2$$
$$z(x + y) = x^2 + y^2 - 2$$

7. Misalkan ABCD sebuah segiempat konveks. Persegi AB_1A_2B dibuat sehingga kedua titik A_2, B_1 terletak di luar segiempat ABCD. Dengan cara serupa diperoleh persegi-persegi BC_1B_2C, CD_1C_2D dan DA_1D_2A. Misalkan K adalah titik potong AA_2 dengan BB_1, L adalah titik potong BB_2 dengan CC_1, M adalah titik Potong CC_2 dengan DD_1, dan N adalah titik potong DD_2 dengan AA_1.
Buktikan bahwa KM tegak lurus LN.

8. Sebuah kompetisi matematika diikuti oleh 90 peserta. Setiap peserta berkenalan dengan paling sedikit 60 peserta lainnya. Salah seorang peserta, Amin, menyatakan bahwa setidaknya terdapat empat orang peserta yang banyak teman barunya sama. Periksa kebenaran pernyataan Amin.

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2006

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2005

JAKARTA, 4 – 9 SEPTEMBER 2005

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

1. Misalkan panjang sisi-sisi segitiga adalah a, b dan c dengan a adalah sisi terpanjang, maka a = n
Karena panjang salah satu sisi segitiga selalu kurang dari jumlah kedua sisi yang lain dan karena $b \le n$ dan $c \le n$ maka $a < b + c$ maka $b + c = n + 1, n + 2, n + 3, \cdots, 2n$.
Jika c = k untuk k bilangan asli maka $b = n - k + i$ untuk suatu nilai $i = 1, 2, 3, \cdots, k$.
Jika k = 1 maka nilai (b, c) ada 1 yaitu (n, 1)
Jika k = 2 maka nilai (b, c) ada 2 yaitu (n − 1, 2) dan (n, 2)
Jika k = 3 maka nilai (b, c) ada 3 yaitu (n − 2, 3), (n − 1, 3) dan (n, 3).
Jika k = 4 maka nilai (b, c) ada 4 yaitu (n − 3, 4), (n − 2, 4), (n − 1, 4) dan (n, 4).
$\vdots$
Jika k = n − 1 maka nilai (b, c) ada n − 1 yaitu (2, n − 1), (3, n − 1), (4, n − 1), ···, (n, n − 1)
Jika k = n maka nilai (b, c) ada n yaitu (1, n), (2, n), (3, n), ···, (n, n)
Banyaknya seluruh segitiga adalah $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$
Tetapi segitiga-segitiga sama kaki dengan sisi-sisi a = n, b = k untuk $1 \le k < n$ dan c = n kongruen dengan segitiga-segitiga sama kaki dengan sisi-sisi a = n, b = n dan c = k untuk $1 \le k < n$. Segitiga-segitiga yang seperti itu banyaknya ada n − 1 yang terhitung dua kali di dalam perhitungan $\frac{1}{2}n(n + 1)$.
Perlu diingat pula bahwa segitiga-segitiga yang bukan sama kaki dengan a = n, b = n − p dan $c = p + r \le n$ tidak kongruen dengan segitiga-segitiga yang panjang sisinya a = n, $b = p + r \le n$ dan c = n − p walaupun ketiga sisinya sama.
Maka jumlah segitiga yang dicari = $\frac{1}{2}n(n + 1) - (n - 1)$
$\therefore$ **Banyaknya segitiga =** $\dfrac{n^2 - n + 2}{2}$

2. Alternatif 1 :
Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap n bilangan asli maka $p(n) \le n$
Misalkan $n = 10^k a_k + 10^{k-1}a_{k-1} + \cdots + 10a_1 + a_o$ dengan $a_1, a_2, \cdots, a_k \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$
Karena $a_{0\ maks} = a_{1\ maks} = a_{2\ maks} = \cdots = a_{k-1\ maks} = 9$ maka $p(n) = a_o \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_k \le 9^k \cdot a_k \le 10^k \cdot a_k \le n$
Maka $n^2 - 2005 = 11\ p(n) \le 11n$
$$\left(n - \frac{11}{2}\right)^2 \le \frac{8141}{4} \le 45^2$$
$1 \le n \le 50$ .... (1)
Selain itu $n^2 - 2005 = 11\ p(n) \ge 0$
$n \ge 45$ .... (2)
Dari (1) dan (2) didapat n = 45, 46, 47, 48, 49 atau 50
Dengan menguji ke persamaan $n^2 - 2005 = 11\ p(n)$ didapat hanya n = 49 yang memenuhi.
$\therefore$ Nilai n yang memenuhi hanya n = **49**
Alternatif 2 :
- Jika n terdiri dari k digit dengan $k \ge 4$
n^2 merupakan bilangan dengan sedikitnya 2k − 1 digit. Maka $n^2 - 2005$ merupakan bilangan dengan sedikitnya 2k − 2 digit.
$11\ p(n) \le 11 \cdot 9 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot 9 < 10^{k+1}$.
Maka 11 p(n) merupakan bilangan dengan sebanyak-banyaknya terdiri dari k + 1 digit.
Untuk $k \ge 4$ maka $2k \ge k + 4$ sehingga $2k - 2 \ge k + 2$
maka $2k - 2 > k + 1$ sehingga tidak ada yang memenuhi $11 \cdot p(n) = n^2 - 2005$

- Jika n terdiri dari 3 digit
  Jika angka ratusan n lebih dari 1 maka $n^2 - 2005 \geq 200^2 - 2005 = 37995$
  $11 \cdot p(n) \leq 11 \cdot 9^3 = 8019 < n^2 - 2005$ (tanda kesamaan tidak akan terjadi)
  Jika angka ratusan n sama dengan 1 maka $n^2 - 2005 \geq 100^2 - 2005 = 7995$
  $11 \cdot p(n) \leq 11 \cdot 1 \cdot 9^2 = 891 < n^2 - 2005$ (tanda kesamaan tidak akan terjadi)
- Jika n terdiri dari 2 digit
  Misalkan n = 10a + b
  n tidak mungkin genap sebab ruas kanan akan ganjil sedangkan ruas kiri genap.
  Karena n ganjil dan $2005 \equiv 1 \pmod 4$ maka $n^2 - 2005 \equiv 0 \pmod 4$
  Akibatnya salah satu a atau b habis dibagi 4. Karena n ganjil maka a = 4 atau 8.
  $n^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod 8$
  $2005 \equiv 5 \pmod 8$
  Ruas kanan tidak habis dibagi 8, maka a = 4
  $11ab = (10a + b)^2 - 2005$
  $44b = 1600 + 80b + b^2 - 2005$
  $b^2 - 36b - 405 = 0$. Maka $(b - 9)(b + 45) = 0$ sehingga b = 9
  Bilangan tersebut adalah n = 49
- Jika n terdiri dari 1 digit
  Ruas kanan akan bernilai negatif (tidak memenuhi)

∴ Nilai n yang memenuhi hanya n = **49**

3. Alternatif 1 :

Perhatikan bahwa $\frac{1}{2}\left(\sqrt{k + 4\sqrt{m}} - \sqrt{k}\right)$ merupakan akar persamaan $x^2 + x\sqrt{k} - \sqrt{m} = 0$.

a. Misalkan $\frac{1}{2}\left(\sqrt{k + 4\sqrt{m}} - \sqrt{k}\right) = n$ adalah akar bulat dari $x^2 + x\sqrt{k} - \sqrt{m} = 0$ maka :

$n^2 + n\sqrt{k} - \sqrt{m} = 0$, maka $\sqrt{m} = n^2 + n\sqrt{k}$

Karena m bilangan asli maka $n \neq 0$

$$m = n^4 + 2n^3\sqrt{k} + kn^2$$

$$\sqrt{k} = \frac{m - n^4 - kn^2}{2n^3}$$

Karena m dan k adalah bilangan asli dan n bilangan bulat tak nol maka $\sqrt{k}$ merupakan bilangan rasional (terbukti).

b. Misalkan $\sqrt{k} = \frac{p}{q}$ untuk suatu bilangan asli p dan q dengan FPB(p, q) = 1.

$k = \frac{p^2}{q^2}$. Karena FPB(p, q) = 1 maka FPB(p^2, q^2) = 1

Karena k adalah bilangan asli maka $q^2 = 1$.

$k = p^2$, maka $\sqrt{k} = p$ dengan p bilangan asli.

Terbukti bahwa $\sqrt{k}$ adalah bilangan asli.

Alternatif 2 :

a. Karena $\frac{1}{2}\left(\sqrt{k+4\sqrt{m}}-\sqrt{k}\right)$ bulat dan m asli maka $\sqrt{k+4\sqrt{m}}-\sqrt{k}$ = p untuk bilangan asli p.

$$\left(\sqrt{k+4\sqrt{m}}\right)^2 = \left(p+\sqrt{k}\right)^2$$

$$4\sqrt{m} = p^2 + 2p\sqrt{k}$$

Karena m asli maka tidak mungkin p = 0.

$$16m = p^4 + 4p^2k + 4p^3\sqrt{k}$$

$$\sqrt{k} = \frac{16m - p^4 - 4p^2k}{4p^3}$$

Karena m dan k asli sedangkan p bulat tak nol maka $\sqrt{k}$ merupakan bilangan rasional (terbukti).

b. Misalkan $\sqrt{k} = \frac{p}{q}$ untuk suatu bilangan asli p dan q dengan FPB(p, q) = 1.

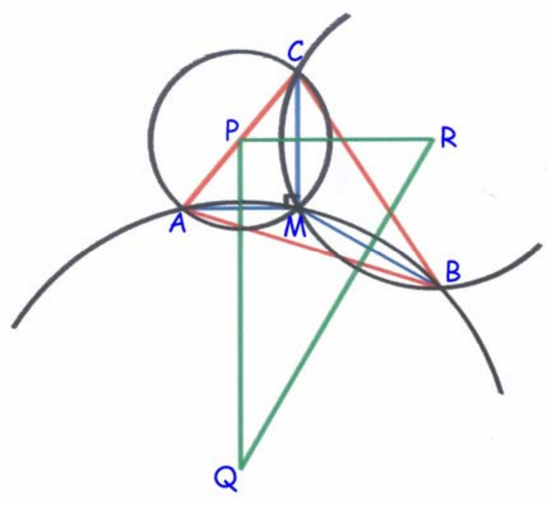
$k = \frac{p^2}{q^2}$. Karena FPB(p, q) = 1 maka FPB(p^2, q^2) = 1

Karena k adalah bilangan asli maka q^2 = 1.

k = p^2, maka $\sqrt{k} = p$ dengan p bilangan asli.

Terbukti bahwa $\sqrt{k}$ adalah bilangan asli.

4. Perhatikan gambar berikut



Misalkan AB = c, BC = a, CA = b, ∠BAC = α, ∠ABC = β dan ∠ACB = γ

Diketahui bahwa ∠AMC = 90^o, ∠AMB = 150^o dan ∠BMC = 120^o

Misalkan juga notasi [ ] menyatakan luas suatu segitiga.

[ABC] = ½ ab sin γ

Karena $\angle AMC = 90^o$ sedangkan P pusat lingkaran luar ΔAMC maka P adalah pertengahan AC.
Karena P, Q dan R pusat lingkaran dan AM, BM serta CM adalah tali busur persekutuan dua lingkaran maka $PR \perp CM$, $PQ \perp AM$ dan $QR \perp BM$.
Karena $\angle AMC = 90^o$ sedangkan $PR \perp CM$ serta $PQ \perp AM$ maka $\angle RPQ = 90^o$.
Karena $\angle BMC = 120^o$ sedangkan $PR \perp CM$ serta $QR \perp BM$ maka $\angle PRQ = 60^o$.
$\angle PQR = 180^o - 90^o - 60^o = 30^o$
Karena PR tegak lurus CM dan RC = RM maka $\angle CRP = \angle PRM = \theta$
Karena $RQ \perp MB$ dan RM = RB maka $\angle MRQ = \angle QRB = \phi$ sehingga $\angle PRM + \angle MRQ = \theta + \phi = 60^o$
$\angle CRB = 2(\theta + \phi) = 120^o$
Karena RC = RB sedangkan $\angle CRB = 120^o$ maka $\angle RCB = 30^o$
Misalkan R_1 adalah jari-jari lingkaran luar ΔBMC → $a = 2R_1 \sin \angle BMC$

$$R_1 = CR = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Pada ΔCPR berlaku :

$$PR^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)\cos(\gamma + 30^\circ)$$

$$PR^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{3} - \frac{ab}{\sqrt{3}}(\cos\gamma\cos 30^\circ - \sin\gamma\sin 30^\circ)$$

$$PR^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{3} - \frac{ab}{\sqrt{3}}\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2[ABC]}{ab}\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$$PR^2 = \frac{a^2}{12} + \frac{c^2}{4} + \frac{[ABC]}{\sqrt{3}}$$

$PQ = PR \tan 60^o = PR\sqrt{3}$
$[PQR] = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot PR$

$$[PQR] = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{a^2}{12} + \frac{c^2}{4} + \frac{[ABC]}{\sqrt{3}}\right)$$

$$[PQR] - [ABC] = \frac{\sqrt{3}}{8}\left(\frac{a^2}{3} + c^2\right) - \frac{[ABC]}{2}$$

Dengan ketaksamaan AM-GM didapat :

$$[PQR] - [ABC] \ge \frac{\sqrt{3}}{8}\cdot 2\sqrt{\frac{a^2}{3}\cdot c^2} - \frac{[ABC]}{2}$$

$$[PQR] - [ABC] \ge \frac{ac}{4} - \frac{[ABC]}{2} = \frac{ac}{4} - \frac{ac\sin\beta}{4}$$

$$[PQR] - [ABC] \ge \frac{ac}{4}(1 - \sin\beta) > 0 \text{ sebab } \beta \ne 90^o$$

$$[PQR] > [ABC]$$

∴ **Terbukti bahwa luas segitiga PQR lebih besar dari luas segitiga ABC.**

5. Alternatif 1 :

$m - \left\lfloor \frac{m}{2005} \right\rfloor = 2005$, maka $\left\lfloor \frac{m}{2005} \right\rfloor = m - 2005$

$\frac{m}{2005} - 1 < m - 2005 \le \frac{m}{2005}$

m – 2005 < 2005(m – 2005) ≤ m

$-2005 < 2004m - 2005^2 \le 0$

$2005^2 - 2005 < 2004m \le 2005^2$

$2005 < m \le \frac{2005^2}{2004}$

2005 < m ≤ 2006

Nilai m yang memenuhi hanya m = 2006

Jika m = 2006 diuji ke persamaan semula maka ini akan memenuhi.

∴ **Terbukti bahwa** $m - \left\lfloor \frac{m}{2005} \right\rfloor = 2005$ **mempunyai tepat satu penyelesaian.**

Alternatif 2 :

Bilangan bulat dapat dibuat ke bentuk m = 2005k + n untuk k bulat dan n ∈ {0, 1, 2, ⋯, 2004}.

$m - \left\lfloor \frac{m}{2005} \right\rfloor = 2005$, maka $2005k + n - \left\lfloor \frac{2005k + n}{2005} \right\rfloor = 2005$

Karena 0 ≤ n < 2004 maka 2005k + n – k = 2005

2004k + n = 2005

Karena 0 ≤ n < 2004 maka 2004k > 0 sehingga k > 0

Karena 0 ≤ n < 2004 maka 2004k ≤ 2005

0 < k ≤ 1, maka k = 1

2004 (1) + n = 2005, maka n = 1

Karena nilai k yang memenuhi hanya ada 1 maka kemungkinan nilai m yang memenuhi juga hanya ada 1 yaitu m = 2005 · 1 + 1 = 2006.

Jika m = 2006 diuji ke persamaan semula maka ini akan memenuhi.

∴ **Terbukti bahwa** $m - \left\lfloor \frac{m}{2005} \right\rfloor = 2005$ **mempunyai tepat satu penyelesaian**

6. $x(y + z) = y^2 + z^2 - 2$ .... (1)

$y(z + x) = z^2 + x^2 - 2$ .... (2)

$z(x + y) = x^2 + y^2 - 2$ .... (3)

Kurangkan (1) dengan (2),

$z(x - y) = y^2 - x^2 = (x + y)(y - x)$, maka $(x - y)(x + y + z) = 0$ .... (4)

Kurangkan (1) dengan (3),

$y(x - z) = z^2 - x^2 = (x + z)(z - x)$, maka $(x - z)(x + y + z) = 0$ .... (5)

Kurangkan (2) dengan (3),

$x(y - z) = z^2 - y^2 = (y + z)(z - y)$, maka $(y - z)(x + y + z) = 0$ · .... (6)

- Kasus I :

  x + y + z = 0

  Subtitusikan ke persamaan (1), (2) atau (3)

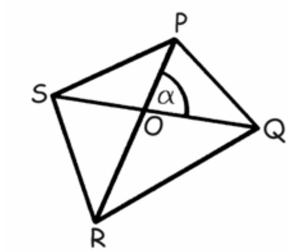
  $x(-x) = y^2 + z^2 - 2$, maka $x^2 + y^2 + z^2 = 2$

Maka penyelesaiannya adalah $x^2 = 1$; $y^2 = 1$ dan $z^2 = 0$ serta permutasinya.
Tripel (x, y, z) yang memenuhi adalah (x, y, z) = (1, −1, 0), (1, 0, −1), (−1, 1, 0), (−1, 0, 1), (0, 1, −1) dan (0, −1, 1)

- Kasus II :
  $x + y + z \neq 0$
  Berdasarkan persamaan (4), (5) dan (6) maka x = y = z
  Subtitusikan ke persamaan (1) didapat $2x^2 = 2x^2 - 2$, maka tidak ada nilai (x, y, z) yang memenuhi.

$\therefore$ **(x, y, z) = (1, −1, 0), (1, 0, −1), (−1, 1, 0), (−1, 0, 1), (0, 1, −1) dan (0, −1, 1)**

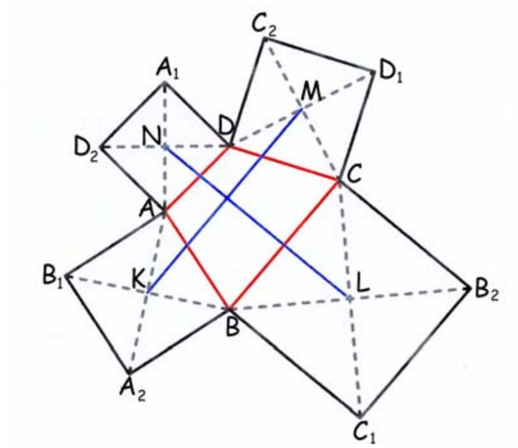
7. Alternatif 1 :
Akan dibutikan bahwa pada segiempat konveks PQRS berlaku $PQ^2 + RS^2 = QR^2 + PS^2$ jika dan hanya jika PR tegak lurus QS.



* Jika PR tegak lurus QS atau $\alpha = 90^o$.
$PQ^2 + RS^2 = (PO^2 + OQ^2) + (OR^2 + OS)^2 = (PO^2 + OS^2) + (OR^2 + OQ^2)$
$PQ^2 + RS^2 = PS^2 + QR^2$

* Jika $PQ^2 + RS^2 = QR^2 + PS^2$
Dengan dalil cosinus didapat :
$PQ^2 + RS^2 = QR^2 + PS^2$
$OP^2 + OQ^2 - 2\ OP \cdot OQ \cos \alpha + OR^2 + OS^2 - 2\ OR \cdot OS \cos \alpha = OQ^2 + OR^2 - 2\ OQ \cdot OR \cos (180^o - \alpha) + OP^2 + OS^2 - 2\ OP \cdot OS \cos (180^o - \alpha)$
$(2\ OQ\ OR + 2\ OP\ OS + 2\ OP\ OQ + 2\ OR\ OS) \cos \alpha = 0$
$\alpha = 90^o$

Terbukti bahwa pada segiempat konveks PQRS berlaku $PQ^2 + RS^2 = QR^2 + PS^2$ jika dan hanya jika PR tegak lurus QS.



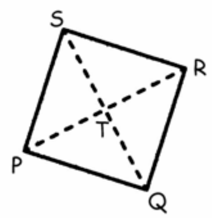
Perhatikan ΔKAN.

AA_1 dan AA_2 keduanya diagonal bidang persegi maka $\angle KAB = \angle KAB_1 = \angle NAD_2 = \angle NAD = 45^o$.
Dengan dalil cosinus didapat :
$KN^2 = AK^2 + AN^2 - 2\ AK \cdot AN \cos \angle KAN$.
Jika $\angle BAD \geq 90^o$ maka $\angle KAN = 270^o - \angle BAD$ dan jika $\angle BAD < 90^o$ maka $\angle KAN = 90^o + \angle BAD$
Akibatnya $\cos \angle KAN$ akan tetap bernilai $-\sin \angle BAD$.
$KN^2 = AK^2 + AN^2 + 2\ AK \cdot AN \sin \angle BAD$.

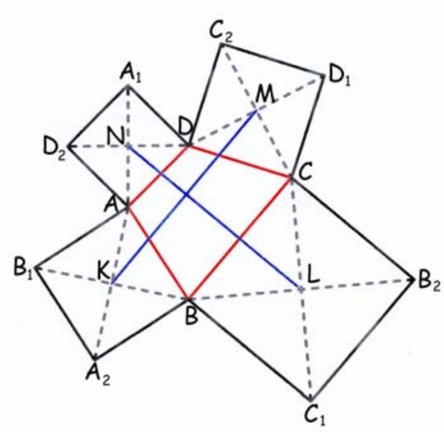
$$KN^2 = \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AD^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}AB \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}AD \cdot \sin \angle BAD$$

Dengan mengingat luas $\Delta ABD = [ABD] = \frac{1}{2} AB \cdot AD \sin \angle BAD$ maka
$KN^2 = \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AD^2 + 2[ABD]$
Dengan cara yang sama untuk ΔKBL, ΔLCM dan ΔMDN didapat :
$KL^2 = \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}BC^2 + 2[ABC]$
$LM^2 = \frac{1}{2}BC^2 + \frac{1}{2}CD^2 + 2[BCD]$
$MN^2 = \frac{1}{2}CD^2 + \frac{1}{2}AD^2 + 2[ACD]$
Sehingga mengingat $[ABD] + [BCD] = [ABC] + [ACD]$ maka
$KN^2 + LM^2 = KL^2 + MN^2$
Mengingat pembuktian yang telah dibuat di awal maka KM tegak lurus LN (terbukti)

Alternatif 2 :
Jika titik (x, y) dirotasi sebesar θ berlawanan arah jarum jam dengan titik pusat (a, b) sehingga diperoleh bayangan (x', y') maka berlaku :
$x' = a + (x - a) \cos \theta - (y - b) \sin \theta$ .... (1)
$y' = b + (x - a) \sin \theta + (y - b) \cos \theta$ .... (2)
Pembuktian persamaan di atas dapat dilihat di Buku Matematika SMA Bab Transformasi Geometri.



Misalkan koordinat $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$.
Karena PQRS adalah persegi maka koordinat titik S didapat dengan merotasi titik Q sejauh 90^o berlawanan arah jarum jam dengan pusat di P. Maka koordinat $S(x_1 + y_1 - y_2, x_2 - x_1 + y_1)$
Karena T adalah pertengahan S dan Q maka koordinat $T\left(\frac{x_1 + x_2 + y_1 - y_2}{2}, \frac{x_2 - x_1 + y_1 + y_2}{2}\right)$.



Tanpa mengurangi keumuman soal misalkan titik A terletak pada (0,0) sedangkan koordinat $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ dan $D(x_D, y_D)$.
Dari penjelasan sebelumnya didapat koordinat

$$K\left(\frac{x_B+y_B}{2}, \frac{-x_B+y_B}{2}\right), L\left(\frac{x_C+x_B+y_C-y_B}{2}, \frac{x_B-x_C+y_B+y_C}{2}\right),$$

$$M\left(\frac{x_D+x_C+y_D-y_C}{2}, \frac{x_C-x_D+y_C+y_D}{2}\right) \text{ dan } N\left(\frac{x_D-y_D}{2}, \frac{x_D+y_D}{2}\right).$$

$$\overrightarrow{KM} = \frac{x_D+x_C-x_B+y_D-y_C-y_B}{2}\hat{i} + \frac{x_C+x_B-x_D+y_C+y_D-y_B}{2}\hat{j}$$

$$\overrightarrow{LN} = \frac{x_D-x_C-x_B-y_D-y_C+y_B}{2}\hat{i} + \frac{x_D-x_B+x_C+y_D-y_B-y_C}{2}\hat{j}$$

$$\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{LN} = \frac{1}{4}(x_D+x_C-x_B+y_D-y_C-y_B)(x_D-x_C-x_B-y_D-y_C+y_B) + \frac{1}{4}(x_C+x_B-x_D+y_C+y_D-y_B)(x_D-x_B+x_C+y_D-y_B-y_C)$$

Mengingat $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ maka :

$$\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{LN} = \frac{1}{4}\left((x_D-x_B-y_C)^2-(x_C+y_D-y_B)^2\right) + \frac{1}{4}\left((x_C+y_D-y_B)^2-(x_D-x_B-y_C)^2\right) = 0$$

Karena $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{LN} = 0$ maka KM tegak lurus LN (terbukti)

8. Misalkan k_i adalah banyaknya kenalan peserta i dan K = $\sum_{i=1}^{90} k_i$ adalah penjumlahan banyaknya kenalan masing-masing peserta.
Jika peserta A berkenalan dengan B maka banyaknya kenalan A bertambah 1 begitu juga dengan B. Jelas bahwa K akan bernilai genap.
Andaikan bahwa paling banyak tiga orang siswa akan memiliki jumlah kenalan sama banyaknya.
Karena $k_i \geq 60$ maka $k_i \in \{60, 61, 62, 63, \cdots, 89\}$. Banyaknya kemungkinan nilai k_i ada 30.
Karena 90/3 = 30 maka terdapat tepat masing-masing 3 peserta memiliki kenalan sebanyak 60 orang, 61 orang, 62 orang, ⋯, 89 orang.
Maka $K = 3 \cdot 60 + 3 \cdot 61 + 3 \cdot 62 + \cdots + 3 \cdot 89$
Di antara 60, 61, 62, 63, ⋯, 89 terdapat 15 bilangan ganjil dan 15 bilangan genap. Mengingat bahwa penjumlahan sejumlah ganjil dari bilangan ganjil menghasilkan bilangan ganjil maka :
$K = 3 \cdot 60 + 3 \cdot 61 + 3 \cdot 62 + \cdots + 3 \cdot 89$ merupakan bilangan ganjil (kontradiksi dengan kenyatan semula bahwa K bernilai genap).
Maka pengandaian bahwa paling banyak tiga orang siswa akan memiliki jumlah kenalan sama banyaknya tidak terbukti.
∴ **Terbukti bahwa setidaknya terdapat 4 peserta yang banyak** kenalannya sama.