



**SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA TAHUN 2004  
TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2005**

**Bidang Matematika**

**Waktu : 90 Menit**



**DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL  
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH  
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH UMUM  
TAHUN 2004**

# OLIMPIADE MATEMATIKA TINGKAT KABUPATEN/KOTA TAHUN 2004

## Bagian Pertama

Pilih satu jawaban yang benar. Dalam hal terdapat lebih dari satu jawaban yang benar, pilih jawaban yang paling baik.

1. Jika  $a$  dan  $b$  adalah bilangan real yang memenuhi  $a + b = 3$  dan  $a^2 + ab = 7$ , maka  $a$  adalah  
 A.  $\frac{3}{7}$                       B.  $\frac{5}{7}$                       C.  $\frac{3}{4}$                       D.  $\frac{7}{5}$                       E.  $\frac{7}{3}$
2. Bilangan 2004 memiliki faktor selain 1 dan 2004 sendiri sebanyak  
 A. 3                              B. 4                              C. 6                              D. 10                              E. 12
3. Misalkan  $k$  bilangan bulat. Nilai  $4^{k+1} \times 5^{k-1}$  sama dengan  
 A.  $\frac{4}{5} \times 20^k$               B.  $\frac{4}{5} \times 20^{2k}$               C.  $16 \times 20^{k-1}$               D.  $20^{2k}$                       E.  $20^{k^2-1}$
4. Untuk  $a$  dan  $b$  bilangan bulat dengan  $a \neq 0$ , notasi  $a|b$  menyatakan "a membagi b". Pernyataan berikut yang *salah* adalah  
 A. Jika  $a|b$  dan  $a|c$ , maka  $a|(bc)$   
 B. Jika  $a|c$  dan  $b|c$ , maka  $(ab)|c$   
 C. Jika  $a|b$  dan  $a|c$ , maka  $a|(b+c)$   
 D. Untuk setiap bilangan bulat  $a \neq 0$  berlaku  $a|0$   
 E. Jika  $a|b$ , maka  $a|(bc)$ , untuk setiap bilangan bulat  $c$ .
5. Di suatu hotel, rata-rata 96% kamar terpakai sepanjang sebulan liburan kenaikan kelas dan rata-rata 72% kamar terpakai sepanjang sebelas bulan lainnya. Maka rata-rata pemakaian kamar sepanjang tahun di hotel tersebut adalah  
 A. 70%                      B. 74%                      C. 75%                      D. 80%                      E. 84%
6. Dalam ketidaksamaan berikut, besar sudut dinyatakan dalam radian. Ketidaksamaan yang benar adalah  
 A.  $\sin 1 < \sin 2 < \sin 3$                       C.  $\sin 1 < \sin 3 < \sin 2$                       E.  $\sin 3 < \sin 1 < \sin 2$   
 B.  $\sin 3 < \sin 2 < \sin 1$                       D.  $\sin 2 < \sin 1 < \sin 3$
7. Sebuah kotak berisi 6 bola merah dan 6 bola putih. Secara acak diambil dua bola sekaligus. Peluang untuk mendapatkan dua bola berwarna sama adalah  
 A.  $\frac{5}{12}$                       B.  $\frac{5}{11}$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $\frac{5}{9}$                       E.  $\frac{5}{7}$
8. Segitiga dengan panjang sisi 6 dan 8 memiliki luas terbesar jika sisi ketiganya memiliki panjang  
 A. 6                              B. 8                              C. 10                              D. 12                              E. 15

9. Pada sebuah segi6 beraturan, rasio panjang antara diagonal terpendek terhadap diagonal terpanjang adalah  
 A. 1 : 3            B. 1 : 2            C. 1 :  $\sqrt{3}$             D. 2 : 3            E.  $\sqrt{3}$  : 2
10. Nomor polisi mobil-mobil di suatu negara selalu terdiri dari 4 angka. Jika jumlah keempat angka pada setiap nomor juga harus genap, mobil yang bisa terdaftar di negara itu paling banyak ada  
 A. 600            B. 1800            C. 2000            D. 4500            E. 5000

### Bagian Kedua

Isikan hanya jawaban saja pada tempat yang disediakan

11. Jika  $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$  dan  $\frac{z}{y} = \frac{4}{5}$  maka  $\frac{x}{z} = \dots$
12. Jika 2004 dibagi ke dalam tiga bagian dengan perbandingan 2 : 3 : 5, maka bagian terkecil adalah .....
13. Untuk dua bilangan bulat a dan b, penulisan  $a * b$  menyatakan sisa tak negatif ab jika dibagi 5. Nilai  $(-3) * 4 = \dots$
14. Jika luas segitiga ABC sama dengan kelilingnya, maka jari-jari lingkaran dalam segitiga ABC adalah ....
15. Agar bilangan  $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n$  sedekat mungkin kepada 2004, haruslah  $n = \dots$
16. Jika  $\log p + \log q = \log (p + q)$ , maka p dinyatakan dalam q adalah  $p = \dots$
17. Luas sebuah segitiga siku-siku adalah 5. Panjang sisi miring segitiga ini adalah 5. Maka keliling segitiga tersebut adalah ....
18. Jika x dan y dua bilangan asli dan  $x + y + xy = 34$ , maka nilai  $x + y = \dots$
19. Sepuluh tim mengikuti turnamen sepakbola. Setiap tim bertemu satu kali dengan setiap tim lainnya. Pemenang setiap pertandingan memperoleh nilai 3, sedangkan yang kalah memperoleh nilai 0. Untuk pertandingan yang berakhir seri, kedua tim memperoleh nilai masing-masing 1. Di akhir turnamen, jumlah nilai seluruh tim adalah 124. Banyaknya pertandingan yang berakhir seri adalah .....
20. Delegasi Indonesia ke suatu pertemuan pemuda internasional terdiri dari 5 orang. Ada 7 orang pria dan 5 orang wanita yang mencalonkan diri untuk menjadi anggota delegasi. Jika dipersyaratkan bahwa paling sedikit seorang anggota itu harus wanita, banyaknya cara memilih anggota delegasi adalah ....

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA 2004  
TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2005

*Prestasi itu diraih bukan didapat !!!*

**SOLUSI SOAL**

**Bidang Matematika**



Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

## Olimpiade Matematika Tk Kabupaten/Kota 2004

---

### BAGIAN PERTAMA

1. (Jawaban : E)

$a + b = 3$  dan  $a^2 + ab = 7$ , maka  $a(a + b) = 7$  sehingga  $a(3) = 7$

$$\therefore a = \frac{7}{3}$$

2. (Jawaban : D)

$2004 = 2^2 \cdot 501 = 2^2 \cdot 3 \cdot 167$  dan 167 adalah bilangan prima.

Maka banyaknya faktor positif dari 2004 termasuk 1 dan 2004 =  $(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 12$

Banyaknya faktor 2004 selain 1 dan 2004 adalah  $= 12 - 2 = 10$

Faktor dari 2004 selain 1 dan 2004 adalah : 2, 3, 4, 6, 12, 167, 334, 501, 668, 1002. Banyaknya faktor ada 10

$\therefore$  Banyaknya faktor ada 10

3. (Jawaban : A atau C)

$$4^{k+1} \times 5^{k-1} = 4 \times 4^k \times \frac{5^k}{5} = \frac{4}{5} \times 20^k \text{ atau}$$

$$4^{k+1} \times 5^{k-1} = 16 \times 4^{k-1} \times 5^{k-1} = 16 \times 20^{k-1}$$

$$\therefore 4^{k+1} \times 5^{k-1} \text{ sama dengan } \frac{4}{5} \times 20^k \text{ atau } 16 \times 20^{k-1}$$

Catatan : Jawaban yang dikirimkan dari panitia pusat menyatakan hanya A saja yang benar. Namun dalam hitungan ternyata C juga bernilai sama.

4. (Jawaban : B)

- A benar karena jika  $a \mid b$  maka  $a \mid (bc)$

- B salah karena yang benar adalah jika  $a \mid c$  dan  $b \mid c$ , maka  $(ab) \mid c^2$

- C benar

- D benar

- E benar sesuai dengan A

$\therefore$  Pernyataan yang salah adalah B

5. (Jawaban : B)

$$\text{Rata-rata \% pemakaian kamar setahun} = \frac{1 \cdot 96\% + 11 \cdot 72\%}{1 + 11} = 74\%$$

$\therefore$  Rata-rata pemakaian kamar sepanjang tahun di hotel tersebut adalah 74 %

6. (Jawaban : E)

$$1 \text{ rad} \approx 57,3^\circ \text{ sehingga } 2 \text{ rad} \approx 114,6^\circ \text{ dan } 3 \text{ rad} \approx 171,9^\circ$$

$$\sin 114,6^\circ = \sin (180 - 114,6)^\circ = \sin 65,4^\circ$$

$$\sin 171,9^\circ = \sin (180 - 171,9)^\circ = \sin 8,1^\circ$$

## Olimpiade Matematika Tk Kabupaten/Kota 2004

Untuk  $0 \leq x \leq 90^\circ$  berlaku bahwa  $\sin x_1 < \sin x_2$  jika  $x_1 < x_2$

$\therefore$  Ketidaksamaan yang benar adalah  $\sin 3 < \sin 1 < \sin 2$

Catatan : Jawaban yang dikirimkan dari panitia pusat menyatakan bahwa jawaban yang benar adalah B, namun bisa dibuktikan bahwa seharusnya jawaban yang benar adalah E. Jawaban soal ini juga bisa dibuktikan dengan hitungan dengan alat hitung berupa kalkulator atau komputer.

7. (Jawaban : B)

2 bola berwarna sama bisa didapat dari keduanya berwarna merah atau keduanya berwarna putih.

$$P(A) = \frac{{}_6C_2 \cdot {}_6C_0}{{}_{12}C_2} + \frac{{}_6C_0 \cdot {}_6C_2}{{}_{12}C_2} = \frac{30}{66} = \frac{5}{11}$$

$\therefore$  Peluang untuk mendapatkan dua bola berwarna sama adalah  $\frac{5}{11}$

8. (Jawaban : C)

Misal segitiga tersebut adalah segitiga ABC.

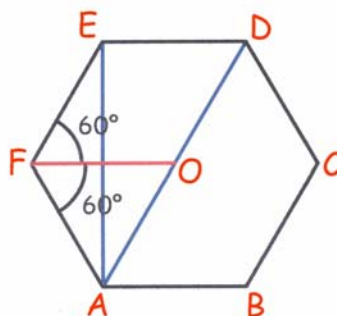
Luas segitiga =  $\frac{1}{2} ab \sin C$

Karena a dan b bernilai konstan, maka luas segitiga akan maksimum jika  $\sin C$  bernilai maksimum. Maksimum  $\sin C = 1$  untuk  $C = 90^\circ$  yang berarti segitiga ABC siku-siku di C.

$$c = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

$\therefore$  Panjang sisi ketiga agar segitiga tersebut memiliki luas terbesar adalah 10.

9. (Jawaban : E)



Misal sisi segi-6 beraturan tersebut adalah a dan O adalah pusat segi-6 beraturan.

Karena bangun adalah segi-6 beraturan maka berlaku :

$$OA = OB = OC = OD = OE = OF = AB = BC = CD = DE = EF = AF = a$$

$$\angle AFO = \angle OFE = 60^\circ$$

$$(AE)^2 = (AF)^2 + (FE)^2 - 2(AF)(FE) \cos 120^\circ$$

$$(AE)^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot (-\frac{1}{2})$$

$$(AE) = a\sqrt{3}$$

$$(AD) = (AO) + (OD) = a + a = 2a$$

$$(AE) : (AD) = \sqrt{3} : 2$$

$\therefore$  Rasio panjang diagonal terpendek terhadap diagonal terpanjang adalah  $\sqrt{3} : 2$

## Olimpiade Matematika Tk Kabupaten/Kota 2004

10. (Jawaban : D)

Untuk plat angka pertama tidak boleh 0. Agar jumlah keempat angka tersebut genap, maka keempat angka tersebut harus genap atau keempatnya harus ganjil atau 2 genap dan 2 ganjil.

- Jika keempat angka tersebut genap maka banyaknya plat =  $4 \times 5 \times 5 \times 5 = 500$
- Jika keempat angka tersebut ganjil maka banyaknya plat =  $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$
- Jika keempat angka tersebut terdiri dari 2 genap dan 2 ganjil

Misal angka genap = p dan angka ganjil = j

Banyaknya susunan angka genap dan ganjil ada  $\frac{4!}{2!2!} = 6$ , yaitu : ppjj, pjpj, pjjp, jjpp, jpjp,

jppj.

Untuk susunan ppjj, pjpj, pjjp, banyaknya plat untuk masing-masing susunan =  $4 \times 5 \times 5 \times 5 = 500$ .

Untuk susunan jjpp, jpjp, jppj, banyaknya plat untuk masing-masing susunan =  $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$ .

∴ Mobil yang bisa terdaftar di negara itu paling banyak =  $500 + 625 + 3(500) + 3(625) = 4500$ .

### BAGIAN KEDUA

$$11. \frac{x}{z} = \frac{x}{y} : \frac{z}{y} = \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{5}{6}$$

$$\therefore \frac{x}{z} = \frac{5}{6}$$

$$12. \text{Bagian yang terkecil} = \frac{2}{2+3+5} \cdot 2004 = \frac{4008}{10}$$

∴ Bagian yang terkecil adalah **400,8**

$$13. (-3) \cdot 4 = -12 = (-3) \cdot 5 + 3$$

Maka : -12 dibagi 5 akan bersisa 3

$$\therefore (-3)^* 4 = 3$$

14. Misal jari-jari lingkaran dalam sama dengan r dan ketiga sisinya adalah a, b dan c, maka :

Luas segitiga =  $\frac{1}{2} r (a + b + c)$

Luas segitiga =  $\frac{1}{2} r \cdot \text{Keliling segitiga}$

Karena Luas segitiga sama dengan Keliling segitiga maka  $r = 2$

∴ Jari-jari lingkaran dalam segitiga ABC adalah **2**

$$15. 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = \frac{2^o(2^{n+1} - 1)}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$$

Diinginkan  $2^{n+1} - 1$  sedekat mungkin ke 2004 sedangkan  $2^{10} = 1024$  dan  $2^{11} = 2048$ , maka  $n = 10$

∴  $n = 10$

16.  $\log p + \log q = \log (p + q)$   
 $\log (pq) = \log (p + q)$   
 $pq = p + q$   
 $p(q - 1) = q$   
 $\therefore p = \frac{q}{q-1}$

17. Misal sisi siku-siku segitiga tersebut adalah a dan b.  
Luas segitiga =  $\frac{1}{2} ab = 5$   
 $ab = 10$  ..... (1) dan  $a^2 + b^2 = 5^2 = 25$  ..... (2)  
 $(a + b)^2 - 2ab = 25$   
 $(a + b)^2 - 2 \cdot 10 = 25$  sehingga  $a + b = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$   
Keliling segitiga =  $5 + a + b$   
 $\therefore$  Keliling setiga tersebut =  $5 + 3\sqrt{5}$

18.  $x + y + xy = 34$   
 $(x + 1)(y + 1) = 34 + 1 = 35 = 5 \cdot 7$   
Karena x dan y bilangan asli maka persamaan hanya dipenuhi jika  $x + 1 = 5$  dan  $y + 1 = 7$  atau  $x + 1 = 7$  dan  $y + 1 = 5$ . Akibatnya  $x = 4$  dan  $y = 6$  atau  $x = 6$  dan  $y = 4$   
 $x + y = 4 + 6 = 6 + 4 = 10$   
 $\therefore x + y = 10$

19. Jika dalam pertandingan ada salah satu yang menang maka nilai total kedua tim = 3.  
Jika dalam pertandingan berakhir seri maka nilai total kedua tim =  $1 + 1 = 2$  atau ada 1 nilai yang hilang per pertandingan yang berakhir seri.  
Banyaknya pertandingan keseluruhan =  ${}_{10}C_2 = 45$  pertandingan.  
Jumlah nilai untuk seluruh tim maksimum terjadi jika tidak ada pertandingan yang berakhir seri, yaitu  $3 \times 45 = 135$ .  
Karena di akhir turnamen, jumlah nilai seluruh tim adalah 124, maka banyaknya pertandingan yang berakhir seri =  $135 - 124 = 11$   
 $\therefore$  Banyaknya pertandingan yang berakhir seri = 11

20. Susunan delegasi yang mungkin adalah 4 pria dan 1 wanita atau 3 pria dan 2 wanita atau 2 pria dan 3 wanita atau 1 pria dan 4 wanita atau 5 wanita .  
Banyaknya cara memilih anggota delegasi =  ${}_{7}C_4 \cdot {}_{5}C_1 + {}_{7}C_3 \cdot {}_{5}C_2 + {}_{7}C_2 \cdot {}_{5}C_3 + {}_{7}C_1 \cdot {}_{5}C_4 + {}_{7}C_0 \cdot {}_{5}C_5 = 35 \cdot 5 + 35 \cdot 10 + 21 \cdot 10 + 7 \cdot 5 + 1 \cdot 1 = 175 + 350 + 210 + 35 + 1 = 771$  cara.  
 $\therefore$  Banyaknya cara memilih anggota delegasi ada 771.





**SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2005**  
**TINGKAT PROVINSI**

**Bidang Matematika**

**Bagian Pertama**

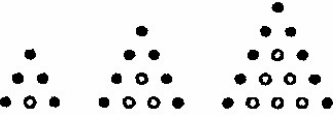
**Waktu : 90 Menit**



**DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL**  
**DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH**  
**DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH UMUM**  
**TAHUN 2004**

# OLIMPIADE MATEMATIKA TINGKAT PROVINSI TAHUN 2004

## BAGIAN PERTAMA

1. Misalkan  $x$  dan  $y$  adalah bilangan real tak nol. Jika  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 10$  dan  $x + y = 40$ , berapakah  $xy$  ?
2. Sebotol sirup bisa digunakan untuk membuat 60 gelas minuman jika dilarutkan dalam air dengan perbandingan 1 bagian sirup untuk 4 bagian air. Berapa gelas minuman yang diperoleh dari sebotol sirup jika perbandingan larutan adalah 1 bagian sirup untuk 5 bagian air ?
3. Penduduk Jawa Tengah adalah 25 % dari penduduk pulau Jawa dan 15 % dari penduduk Indonesia. Berapa persen penduduk Indonesia yang tinggal di luar pulau Jawa ?
4. Ketika menghitung volume sebuah tabung, Dina melakukan kesalahan. Ia memasukkan diameter alas ke dalam rumus volume tabung, padahal seharusnya jari-jari alas yang dimasukkan. Berapakah rasio hasil perhitungan Dinas terhadap hasil yang seharusnya ?
5. Tiga lingkaran melalui titik pusat koordinat  $(0, 0)$ . Pusat lingkaran pertama terletak di kuadran I, pusat lingkaran kedua berada di kuadran II dan pusat lingkaran ketiga berada pada kuadran III. Jika  $P$  adalah sebuah titik yang berada di dalam ketiga lingkaran tersebut, di kuadran manakah titik ini berada ?
6.  Diberikan berturut-turut (dari kiri ke kanan) gambar-gambar pertama, kedua dan ketiga dari suatu barisan gambar. Berapakah banyaknya bulatan hitam pada gambar ke- $n$  ?
7. Diberikan segitiga  $ABC$  dengan perbandingan panjang sisi  $AC : CB = 3 : 4$ . Garis bagi sudut luar  $C$  memotong perpanjangan  $BA$  di  $P$  (titik  $A$  terletak di antara titik-titik  $P$  dan  $B$ ). Tentukan perbandingan panjang  $PA : AB$ .
8. Berapakah banyaknya barisan bilangan bulat tak negatif  $(x, y, z)$  yang memenuhi persamaan  $x + y + z = 99$  ?
9. Tentukan himpunan semua bilangan asli  $n$  sehingga  $n(n - 1)(2n - 1)$  habis dibagi 6.
10. Tentukan semua bilangan real  $x$  yang memenuhi  $x^2 < |2x - 8|$ .
11. Dari antara 6 buah kartu bernomor 1 sampai 6 diambil dua kartu secara acak. Berapakah peluang terambilnya dua kartu yang jumlah nomornya adalah 6 ?
12. Pada sebuah trapesium dengan tinggi 4, kedua diagonalnya saling tegak lurus. Jika salah satu dari diagonal tersebut panjangnya 5, berapakah luas trapesium tersebut ?

13. Tentukan nilai dari  $\left(1 - \frac{2}{3}\right)\left(1 - \frac{2}{5}\right)\left(1 - \frac{2}{7}\right)\dots\left(1 - \frac{2}{2005}\right)$ .
14. Santi dan Tini berlari sepanjang sebuah lintasan yang berbentuk lingkaran. Keduanya mulai berlari pada saat yang sama dari titik P, tetapi mengambil arah berlawanan. Santi berlari  $1\frac{1}{2}$  kali lebih cepat daripada Tini. Jika PQ adalah garis tengah lingkaran lintasan dan keduanya berpapasan untuk pertama kalinya di titik R, berapa derajatkah besar  $\angle RPQ$  ?
15. Pada sisi-sisi SU, TS dan UT dari  $\Delta STU$  dipilih titik-titik P, Q dan R berturut-turut sehingga  $SP = \frac{1}{4}SU$ ,  $TQ = \frac{1}{2}TS$  dan  $UR = \frac{1}{3}UT$ . Jika luas segitiga STU adalah 1, berapakah luas  $\Delta PQR$  ?
16. Dua bilangan real  $x, y$  memenuhi  $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$ . Berapakah nilai  $x + y$  ?
17. Berapakah banyak minimal titik yang harus diambil dari sebuah persegi dengan panjang sisi 2, agar dapat dijamin senantiasa terambil dua titik yang jarak antara keduanya tidak lebih dari  $\frac{1}{2}\sqrt{2}$  ?
18. Misalkan  $f$  sebuah fungsi yang memenuhi  $f(x) f(y) - f(xy) = x + y$ , untuk setiap bilangan bulat  $x$  dan  $y$ . Berapakah nilai  $f(2004)$  ?
19. Notasi  $\text{fpb}(a, b)$  menyatakan *faktor persekutuan terbesar* dari bilangan bulat  $a$  dan  $b$ . Tiga bilangan asli  $a_1 < a_2 < a_3$  memenuhi  $\text{fpb}(a_1, a_2, a_3) = 1$ , tetapi  $\text{fpb}(a_i, a_j) > 1$  jika  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Tentukan  $(a_1, a_2, a_3)$  agar  $a_1 + a_2 + a_3$  minimal.
20. Didefinisikan  $a \circ b = a + b + ab$ , untuk semua bilangan bulat  $a, b$ . Kita katakan bahwa bilangan bulat  $a$  adalah *faktor* dari bilangan bulat  $c$  bilamana terdapat bilangan bulat  $b$  yang memenuhi  $a \circ b = c$ . Tentukan semua faktor positif dari 67.



**SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2005**  
**TINGKAT PROVINSI**

**Bidang Matematika**

**Bagian Kedua**

**Waktu : 120 Menit**



**DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL**  
**DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH**  
**DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH UMUM**  
**TAHUN 2004**

# OLIMPIADE MATEMATIKA TINGKAT PROVINSI TAHUN 2004

## BAGIAN KEDUA

1. Tentukan semua  $(x,y,z)$ , dengan  $x, y, z$  bilangan-bilangan real, yang memenuhi sekaligus ketiga persamaan berikut :

$$\begin{aligned}x^2 + 4 &= y^3 + 4x - z^3 \\y^2 + 4 &= z^3 + 4y - x^3 \\z^2 + 4 &= x^3 + 4z - y^3\end{aligned}$$

2. Pada segitiga ABC diberikan titik-titik D, E, dan F yang terletak berturut-turut pada sisi BC, CA dan AB sehingga garis-garis AD, BE dan CF berpotongan di titik O. Buktikan bahwa

$$\frac{AO}{AD} + \frac{BO}{BE} + \frac{CO}{CF} = 2$$

3. Beni, Coki dan Doni tinggal serumah dan belajar di sekolah yang sama. Setiap pagi ketiganya berangkat pada saat yang sama. Untuk sampai ke sekolah Beni memerlukan waktu 2 menit, Coki memerlukan waktu 4 menit, sedangkan Doni memerlukan waktu 8 menit. Selain itu tersedia sebuah sepeda yang hanya dapat dinaiki satu orang. Dengan sepeda, setiap orang memerlukan waktu hanya 1 menit.

Tunjukkan bahwa adalah mungkin bagi ketiganya untuk sampai ke sekolah dalam waktu tidak lebih dari  $2\frac{3}{4}$  menit.

4. Buktikan bahwa tidak ada bilangan asli  $m$  sehingga terdapat bilangan-bilangan bulat  $k, e$ , dengan  $e \geq 2$ , yang memenuhi  $m(m^2 + 1) = k^e$ .

5. *Titik letis* pada bidang adalah titik yang mempunyai koordinat berupa pasangan bilangan bulat. Misalkan  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  adalah lima titik letis berbeda pada bidang. Buktikan bahwa terdapat sepasang titik  $(P_i, P_j)$ ,  $i \neq j$ , demikian, sehingga ruas garis  $P_iP_j$  memuat sebuah titik letis selain  $P_i$  dan  $P_j$ .

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2005  
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2004

*Prestasi itu diraih bukan didapat !!!*

SOLUSI SOAL

**Bidang Matematika**

**Bagian Pertama**



Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

## BAGIAN PERTAMA

$$1. \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 10. \text{ Maka } \frac{x+y}{xy} = 10. \text{ Karena } x+y = 40 \text{ maka } \frac{40}{xy} = 10$$

$$\therefore xy = 4$$

2. Keadaan I :

Misalkan dalam 1 gelas terdapat a bagian sirup maka banyaknya bagian air adalah 4a bagian. Karena dalam satu gelas terdapat a bagian sirup maka dalam satu botol sirup terdapat 60a bagian sirup. Sedangkan dalam 1 gelas terdapat 5a bagian.

Keadaan II :

Jika dalam gelas terdapat b bagian sirup, maka banyaknya bagian air adalah 5b bagian. Karena dalam satu gelas terdapat b bagian sirup maka dalam x gelas terdapat bx bagian sirup. Sedangkan dalam 1 gelas terdapat 6b bagian.

Dari keadaan I dan keadaan II didapat  $5a = 6b$ .

Misalkan dari campuran tersebut dapat dibuat x gelas, maka :

$$bx = 60a = 12 \cdot (6b) \text{ sehingga } x = 72$$

$\therefore$  Banyaknya gelas yang diperoleh adalah 72 gelas

3. Misalkan penduduk Jawa tengah = JT

Penduduk Jawa = J

Penduduk Indonesia = I

$$JT = 25\% J$$

$$JT = 15\% I$$

$$25\% J = 15\% I$$

$$J = 60\% I$$

Karena penduduk Jawa = 60% penduduk Indonesia maka

$\therefore$  Penduduk Indonesia yang tinggal di luar pulau Jawa = 40%

4. Volume seharusnya =  $\pi r^2 t$

$$\text{Volume perhitungan Dina} = \pi D^2 t = 4\pi r^2 t$$

$$\text{Rasio perhitungan Dinas terhadap hasil seharusnya} = \frac{4\pi r^2 t}{\pi r^2 t} = 4$$

$\therefore$  Rasio perhitungan Dina terhadap hasil seharusnya = 4

5. \* Karena lingkaran pertama berpusat di kuadran I dan melalui titik (0,0) maka semua titik yang terletak di dalam lingkaran pertama tidak akan mungkin terletak di kuadran III.

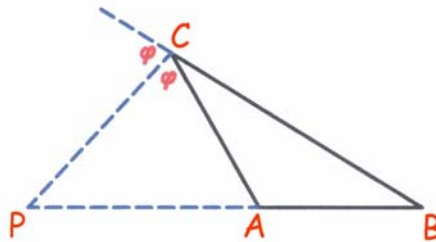
\* Karena lingkaran pertama berpusat di kuadran II dan melalui titik (0,0) maka semua titik yang terletak di dalam lingkaran pertama tidak akan mungkin terletak di kuadran IV.

\* Karena lingkaran pertama berpusat di kuadran III dan melalui titik (0,0) maka semua titik yang terletak di dalam lingkaran pertama tidak akan mungkin terletak di kuadran I.

$\therefore$  Titik P hanya mungkin terletak di kuadran II.

6. Jika panjang sisi segitiga adalah  $k$  titik maka banyaknya bulatan hitam =  $2k - 1$ .  
 Pada gambar ke- $n$  panjang sisi segitiga =  $n + 2$  titik.  
 Banyaknya bulatan hitam =  $2(n + 2) - 1 = 2n + 3$   
 $\therefore$  Banyaknya bulatan hitam pada gambar ke- $n$  adalah  $2n + 3$

7. Karena  $CP$  adalah garis bagi maka berlaku  $AC : CB = PA : PB$ . Maka  $PA = \frac{3}{4}PB$



$$PB = PA + AB$$

$$\frac{4}{3}PA = PA + PB.$$

$$PA = 3AB$$

$$\therefore PA : AB = 3 : 1$$

#### 8. Alternatif 1 :

- \* Untuk  $x = 0$ , maka  $y + z = 99$ .  
 Banyaknya pasangan  $(y, z)$  yang memenuhi ada 100 yaitu  $(0, 99), (1, 98), (2, 97), \dots, (99, 0)$
- \* Untuk  $x = 1$ , maka  $y + z = 98$ .  
 Banyaknya pasangan  $(y, z)$  yang memenuhi ada 99 yaitu  $(0, 98), (1, 97), (2, 96), \dots, (98, 0)$
- \* Untuk  $x = 2$ , maka  $y + z = 97$ .  
 Banyaknya pasangan  $(y, z)$  yang memenuhi ada 98 yaitu  $(0, 97), (1, 96), (2, 95), \dots, (97, 0)$
- \* Untuk  $x = 3$ , maka  $y + z = 96$ .  
 Banyaknya pasangan  $(y, z)$  yang memenuhi ada 97 yaitu  $(0, 96), (1, 95), (2, 94), \dots, (96, 0)$
- ⋮
- \* Untuk  $x = 99$ , maka  $y + z = 0$   
 Banyaknya pasangan  $(y, z)$  yang memenuhi ada 1 yaitu  $(0, 0)$

Banyaknya barisan bilangan bulat  $(x, y, z)$  yang memenuhi =  $100 + 99 + 98 + \dots + 1 = \frac{100}{2}(100 + 1)$

$\therefore$  Banyaknya barisan bilangan bulat  $(x, y, z)$  yang memenuhi persamaan  $x + y + z = 99$  ada 5050.

#### Alternatif 2 :

Misalkan  $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = r$  dengan  $x_i$  bulat  $\geq 0$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$ . Maka banyaknya pasangan  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  yang memenuhi adalah  $\frac{(r + (n - 1))!}{r!(n - 1)!} = {}_{r+n-1}C_{n-1}$

Diketahui  $x + y + z = 99$  dengan  $x, y, z \geq 0$  dan  $x, y, z$  bulat.

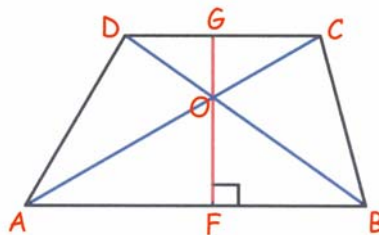
Banyaknya tripel bilangan bulat tak negatif  $(x, y, z)$  yang memenuhi =  $\frac{101!}{99!2!} = 5050$ .

$\therefore$  Banyaknya barisan bilangan bulat  $(x, y, z)$  yang memenuhi persamaan  $x + y + z = 99$  ada 5050.



9.  $n(n-1)(2n-1) = n(n-1)(2n+2-3)$   
 $= 2n(n-1)(n+1) - 3n(n-1)$   
 $(n-1)$ ,  $n$ ,  $(n+1)$  adalah 3 bilangan bulat berurutan, maka  $(n-1)n(n+1)$  habis dibagi  $3! = 6$ .  
 $n(n-1)$  juga habis dibagi  $2! = 2$ .  
Maka  $3n(n-1)$  pasti habis dibagi 6.  
Akibatnya berapa pun nilai  $n$  bilangan asli akan memenuhi  $n(n-1)(2n-1)$  habis dibagi 6.  
 $\therefore$  Himpunan semua  $n$  asli sehingga  $n(n-1)(2n-1)$  habis dibagi 6 adalah  $\{n \mid n \in \text{bilangan asli}\}$
10. \* Jika  $x \leq 4$  maka  $|2x-8| = 8-2x$   
Pertidaksamaan menjadi  $x^2 < 8-2x$   
 $(x+4)(x-2) < 0$   
 $-4 < x < 2$   
Ketaksamaan di atas memenuhi syarat awal  $x \leq 4$ .
- \* Jika  $x \geq 4$  maka  $|2x-8| = 2x-8$   
Pertidaksamaan menjadi  $x^2 < 2x-8$   
 $x^2 - 2x + 8 < 0$   
 $(x-1)^2 + 7 < 0$   
Ruas kiri adalah definit positif sehingga tidak ada penyelesaian  $x$  yang memenuhi.  
 $\therefore$  Penyelesaian  $x$  yang memenuhi pertidaksamaan  $x^2 < |2x-8|$  adalah  $-4 < x < 2$
11. Banyaknya pasangan kartu yang jumlahnya 6 ada 2 yaitu (1,5) dan (2,4)  
Peluang terambilnya 2 kartu yang jumlahnya nomornya 6 adalah  $\frac{2}{{}_6C_2}$   
 $\therefore$  Peluang terambilnya 2 kartu yang jumlah nomornya 6 adalah  $\frac{2}{15}$

12. Alternatif 1 :



Misal  $\angle ACD = \alpha$  maka  $\angle GOD = \angle CAB = \angle BOF = \alpha$

$$\sin \alpha = \frac{CE}{CA} = \frac{FG}{CA} = \frac{4}{5} \quad \dots\dots (1) \text{ sehingga } \cos \alpha = \frac{3}{5} \quad \dots\dots (2) \text{ dan } \tan \alpha = \frac{4}{3} \quad \dots\dots (3)$$

Misal  $CO = a$  dan  $GO = b$  maka  $OA = 5 - a$  dan  $OF = 4 - b$  sebab  $FG$  adalah tinggi trapesium.

$$GC = CO \cos \alpha = \frac{3}{5} a$$

$$DG = GO \tan \alpha = \frac{4}{3} b$$

$$DC = DG + GC = \frac{3}{5}a + \frac{4}{3}b \dots\dots\dots (4)$$

$$AF = OA \cos \alpha = (5 - a) \frac{3}{5} = 3 - \frac{3}{5}a$$

$$FB = OF \tan \alpha = (4 - b) \frac{4}{3} = \frac{16}{3} - \frac{4}{3}b$$

$$AB = AF + FB = 3 - \frac{3}{5}a + \frac{16}{3} - \frac{4}{3}b = \frac{25}{3} - \frac{3}{5}a - \frac{4}{3}b$$

$$\text{Luas trapesium} = \frac{1}{2}(DC + AB)FG$$

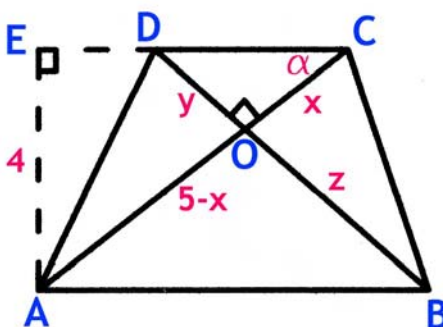
$$\text{Dari persamaan (4) dan (5) didapat luas trapesium} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{25}{3}\right) \cdot 4 = \frac{50}{3}$$

$$\therefore \text{Luas trapesium} = \frac{50}{3}$$

Alternatif 2 :

Misalkan  $OC = x$  maka  $OA = 5 - x$

Misalkan juga  $OD = y$  dan  $OB = z$ .



Jelas bahwa  $\Delta OAB$  sebangun dengan  $\Delta OCD$  sehingga

$$\frac{5-x}{x} = \frac{z}{y} \text{ maka } \frac{y}{x} = \frac{y+z}{5} \dots\dots\dots (5)$$

Misalkan juga  $\angle ACD = \alpha$  maka  $\text{tg } \alpha = 4/3$

$$\text{Karena AC tegak lurus BD maka } \text{tg } \alpha = y/x = 4/3 \dots\dots\dots (6)$$

Substitusikan persamaan (6) ke persamaan (5)

$$\text{Maka } y + z = \frac{20}{3}$$

Karena AC tegak lurus BD maka luas trapesium =  $\frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD$

$$\text{Luas trapesium} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (y + z)$$

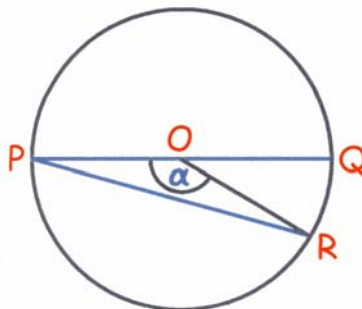
$$\text{Luas trapesium} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{20}{3}$$

$$\therefore \text{Luas trapesium} = \frac{50}{3}$$

$$13. \left(1 - \frac{2}{3}\right)\left(1 - \frac{2}{5}\right)\left(1 - \frac{2}{7}\right)\cdots\left(1 - \frac{2}{2005}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} \cdots \frac{2003}{2005}$$

$$\therefore \left(1 - \frac{2}{3}\right)\left(1 - \frac{2}{5}\right)\left(1 - \frac{2}{7}\right)\cdots\left(1 - \frac{2}{2005}\right) = \frac{1}{2005}$$

14. Karena Tini lebih lambat dari Santi maka panjang busur yang ditempuhnya akan lebih pendek dari yang ditempuh Santi.



Misal panjang busur yang ditempuh Tini =  $a$  maka panjang busur yang ditempuh Santi =  $\frac{3}{2}a$ .

$a + \frac{3}{2}a = K$  dengan  $K$  adalah keliling lingkaran.

$$a = \frac{2}{5}K$$

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{a}{K} = \frac{2}{5}$$

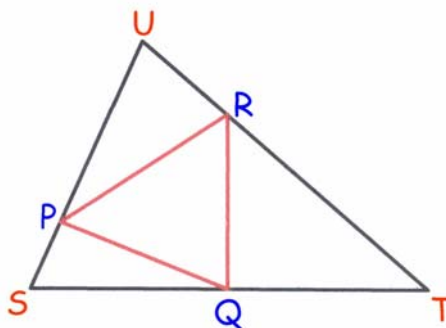
$$\alpha = 144^\circ$$

Karena  $O$  adalah pusat lingkaran maka  $\triangle OPR$  adalah segitiga sama kaki.

$$\angle RPO = \angle RPQ = \frac{1}{2}(180^\circ - 144^\circ)$$

$$\therefore \angle RPQ = 18^\circ$$

- 15.



Misal panjang sisi  $TU = a$ ,  $SU = b$  dan  $ST = c$  serta  $\angle UST = \alpha$ ,  $\angle STU = \beta$  dan  $\angle TUS = \gamma$ , maka :

$$\text{Luas } \Delta STU = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} ac \sin \beta = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = 1$$

$$\text{Luas } \Delta SPQ = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} b \right) \left( \frac{1}{2} c \right) \sin \alpha = \frac{1}{8} \text{ Luas } \Delta STU = \frac{1}{8}$$

$$\text{Luas } \Delta TQR = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} a \right) \left( \frac{1}{2} c \right) \sin \beta = \frac{1}{3} \text{ Luas } \Delta STU = \frac{1}{3}$$

$$\text{Luas } \Delta UPR = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} a \right) \left( \frac{3}{4} b \right) \sin \gamma = \frac{1}{4} \text{ Luas } \Delta STU = \frac{1}{4}$$

$$\text{Luas } \Delta PQR = \text{Luas } \Delta STU - \text{Luas } \Delta SPQ - \text{Luas } \Delta TQR - \text{Luas } \Delta UPR = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{Luas } \Delta PQR = \frac{7}{24}$$

$$16. (x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$$

$$x + \sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{y + \sqrt{y^2 + 1}} \quad \dots\dots (1)$$

$$(x + \sqrt{x^2 + 1})(x - \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1})(y - \sqrt{y^2 + 1}) = (x - \sqrt{x^2 + 1})(y - \sqrt{y^2 + 1})$$

$$(-1)(-1) = (x - \sqrt{x^2 + 1})(y - \sqrt{y^2 + 1})$$

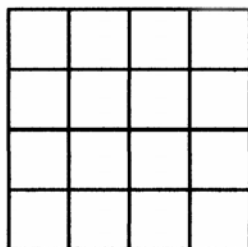
$$x - \sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{y - \sqrt{y^2 + 1}} \quad \dots\dots (2)$$

$$\text{Jumlahkan persamaan (1) dan (2) sehingga } 2x = \frac{1}{y + \sqrt{y^2 + 1}} + \frac{1}{y - \sqrt{y^2 + 1}} = \frac{2y}{(-1)}$$

$$-x = y$$

$$\therefore x + y = 0$$

17. Pada sebuah persegi dengan panjang sisi = a, jarak terjauh dua titik yang terletak pada persegi adalah  $a\sqrt{2}$  jika kedua titik merupakan ujung-ujung diagonal bidang persegi tersebut.



Bagi persegi dengan panjang sisi 2 tersebut menjadi 16 persegi dengan panjang sisi masing-masing  $= \frac{1}{2}$  sehingga jarak terjauh 2 titik yang terletak pada masing-masing persegi adalah

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Jika terdapat 16 titik, maka titik-titik tersebut masih dapat didistribusikan masing-masing 1 titik yang terletak di dalam persegi kecil sehingga masih belum dapat dijamin senantiasa terambil dua titik yang jarak antara keduanya  $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ . Jika terdapat 17 titik maka sesuai *Pigeon Hole Principle* maka sekurang-kurangnya ada satu persegi kecil berisi sekurang-kurangnya 2 titik sehingga dapat dijamin senantiasa terambil dua titik yang jarak antara keduanya  $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ .

$\therefore$  Jumlah minimal titik yang harus diambil dari dalam sebuah persegi dengan panjang sisi 2 agar dapat dijamin senantiasa terambil 2 titik yang jarak antara keduanya  $\frac{1}{2}\sqrt{2}$  adalah 17.

18.  $f(x)f(y) - f(xy) = x + y$

\* Jika  $x = 0$  dan  $y = 0$ , maka  $f(0)f(0) - f(0) = 0$

$$f(0)(f(0) - 1) = 0. \text{ Maka } f(0) = 0 \text{ atau } f(0) = 1$$

\* Jika  $x = 1$  dan  $y = 0$ , maka  $f(1)f(0) - f(0) = 1$

• Jika  $f(0) = 0$ , maka  $0 = 1$  yang berarti tidak mungkin  $f(0) = 0$  maka  $f(0) = 1$

• Untuk  $f(0) = 1$  maka  $f(1) - 1 = 1$  sehingga  $f(1) = 2$

\* Jika  $x = 2004$  dan  $y = 1$  maka  $f(2004)f(1) - f(2004) = 2005$

$$2f(2004) - f(2004) = 2005 \text{ sehingga } f(2004) = 2005$$

\* Jika  $x = 2004$  dan  $y = 0$  maka  $f(2004)f(0) - f(0) = 2004$

$$f(2004) - 1 = 2004 \text{ sehingga } f(2004) = 2005$$

$$\therefore f(2004) = 2005$$

19.  $\text{fpb}(a_1, a_2, a_3) = 1$ .

Karena  $\text{fpb}(a_i, a_j) > 1$  untuk  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  maka  $a_i$  dan  $a_j$  untuk  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  tidak saling prima relatif. Misalkan  $\text{fpb}(a_1, a_2) = q$ ,  $\text{fpb}(a_1, a_3) = p$  dan  $\text{fpb}(a_2, a_3) = r$  dengan  $p, q, r > 1$ .

Maka  $a_i$  dengan  $i = 1, 2, 3$  akan berbentuk :

$$a_1 = pq$$

$$a_2 = qr$$

$$a_3 = pr$$

$p$  dan  $q$ ,  $q$  dan  $r$ ,  $p$  dan  $r$  masing-masing saling prima relatif.

3 bilangan terkecil ( $p, q, r$ ) yang memenuhi adalah (2, 3, 5) sehingga  $a_1 = 2 \cdot 3 = 6$ ,  $a_2 = 2 \cdot 5 = 10$  dan  $a_3 = 3 \cdot 5 = 15$ .

$\therefore$  Agar  $a_1 + a_2 + a_3$  minimal maka  $(a_1, a_2, a_3) = (6, 10, 15)$

20.  $a \circ b = a + b + ab$

$$c = a + b + ab$$

$$67 = a + b + ab$$

$$67 = (a + 1)(b + 1) - 1$$

$$(a + 1)(b + 1) = 68$$

Faktor yang sebenarnya dari 68 adalah 1, 2, 4, 17, 34 dan 68

Jika  $a + 1 = 1$  maka  $a = 0$       Jika  $a + 1 = 2$  maka  $a = 1$       Jika  $a + 1 = 4$  maka  $a = 3$

Jika  $a + 1 = 17$  maka  $a = 16$       Jika  $a + 1 = 34$  maka  $a = 33$       Jika  $a + 1 = 68$  maka  $a = 67$

$\therefore$  faktor positif dari 67 adalah 1, 3, 16, 33 dan 67

**SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2005  
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2004**

*Prestasi itu diraih bukan didapat !!!*

**SOLUSI SOAL**

**Bidang Matematika**

**Bagian Kedua**

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST



## BAGIAN KEDUA

$$1. \quad x^2 + 4 = y^3 + 4x - z^3 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$y^2 + 4 = z^3 + 4y - x^3 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$z^2 + 4 = x^3 + 4z - y^3 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\begin{aligned} \text{Jumlahkan (1) + (2) + (3) sehingga} \quad & x^2 + 4 + y^2 + 4 + z^2 + 4 = 4x + 4y + 4z \\ & (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) + (z^2 - 4z + 4) = 0 \\ & (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 0 \end{aligned}$$

Karena persamaan kuadrat tidak mungkin negatif, maka persamaan di atas hanya dipenuhi jika :

$$x - 2 = 0 \quad ; \quad y - 2 = 0 \quad \text{dan} \quad z - 2 = 0$$

Didapat  $x = 2$  ;  $y = 2$  dan  $z = 2$ . Substitusikan hasil ini ke persamaan (1), (2) dan (3)

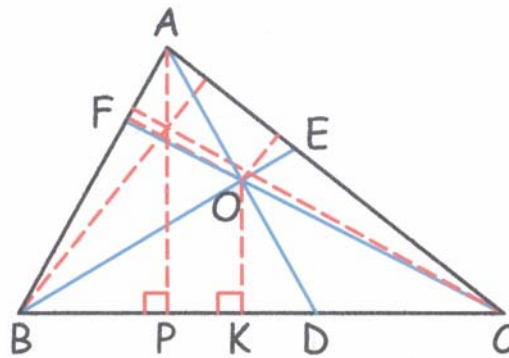
$$\text{Persamaan (1), } (2)^2 + 4 = (2)^3 + 4(2) - (2)^3. \text{ Memenuhi } 8 = 8$$

$$\text{Persamaan (2), } (2)^2 + 4 = (2)^3 + 4(2) - (2)^3. \text{ Memenuhi } 8 = 8$$

$$\text{Persamaan (3), } (2)^2 + 4 = (2)^3 + 4(2) - (2)^3. \text{ Memenuhi } 8 = 8$$

$\therefore (x, y, z)$  yang memenuhi adalah  $(2, 2, 2)$

2. Dibuat garis tinggi pada segitiga ABC dan segitiga BOC yang masing-masing ditarik dari titik A dan O. Garis tinggi ini masing-masing memotong sisi BC di titik P dan K.



$$\text{Luas } \triangle ABC = \frac{1}{2} (BC)(AP) \quad \text{dan} \quad \text{Luas } \triangle BOC = \frac{1}{2} (BC)(OK)$$

$$\frac{\text{Luas } \triangle BOC}{\text{Luas } \triangle ABC} = \frac{OK}{AP} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\triangle OAP \text{ sebangun dengan } \triangle OKD \text{ sehingga } \frac{OD}{AD} = \frac{OK}{AP} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{Dari (1) dan (2) didapat } \frac{\text{Luas } \triangle BOC}{\text{Luas } \triangle ABC} = \frac{OD}{AD} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{Dengan cara yang sama didapat } \frac{\text{Luas } \triangle AOC}{\text{Luas } \triangle ABC} = \frac{OE}{BE} \quad \dots (4) \quad \text{dan} \quad \frac{\text{Luas } \triangle AOB}{\text{Luas } \triangle ABC} = \frac{OF}{CF} \quad \dots (5)$$

$$\text{Luas } \triangle BOC + \text{Luas } \triangle AOC + \text{Luas } \triangle AOB = \text{Luas } \triangle ABC$$

$$\frac{\text{Luas } \triangle BOC}{\text{Luas } \triangle ABC} + \frac{\text{Luas } \triangle AOC}{\text{Luas } \triangle ABC} + \frac{\text{Luas } \triangle AOB}{\text{Luas } \triangle ABC} = 1$$



$$\frac{OD}{AD} + \frac{OE}{BE} + \frac{OF}{CF} = 1$$

$$1 - \frac{OA}{AD} + 1 - \frac{OB}{BE} + 1 - \frac{OC}{CF} = 1 \text{ sehingga } \frac{OA}{AD} + \frac{OB}{BE} + \frac{OC}{CF} = 2$$

$$\therefore \text{ Terbukti bahwa } \frac{OA}{AD} + \frac{OB}{BE} + \frac{OC}{CF} = 2$$

3. Misal jarak dari rumah mereka ke sekolah = S

Untuk Doni :

Misalkan agar waktu yang diperlukan Doni adalah  $2\frac{3}{4}$  menit maka ia harus naik sepeda sejauh X dan sisanya dengan jalan kaki dengan catatan bahwa Doni tidak pernah istirahat atau bergerak mundur.

$$\frac{X}{S} + \frac{(S - X)8}{S} = \frac{11}{4}. \text{ Maka } 4X + 32S - 32X = 11S \text{ sehingga } X = \frac{3}{4}S$$

Untuk Coki :

Misalkan agar waktu yang diperlukan Coki adalah  $2\frac{3}{4}$  menit maka ia harus naik sepeda sejauh Y dan sisanya dengan jalan kaki dengan catatan bahwa Coki tidak pernah istirahat atau bergerak mundur.

$$\frac{Y}{S} + \frac{(S - Y)4}{S} = \frac{11}{4}. \text{ Maka } 4Y + 16S - 16Y = 11S \text{ sehingga } Y = \frac{5}{12}S$$

Karena  $\frac{3}{4}S + \frac{5}{12}S = 1\frac{1}{6}S$  maka berarti sepeda harus dimundurkan dalam perjalanannya.

*Alternatif 1:*

Doni naik sepeda sejauh  $\frac{3}{4}S$  lalu melanjutkan perjalanan dengan jalan kaki. Maka ia akan sampai dalam waktu  $\frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 8 = 2\frac{3}{4}$  menit.

Beni akan sampai di tempat di mana sepeda ditinggalkan dalam waktu  $1\frac{1}{2}$  menit. Agar Coki juga dapat sampai di sekolah dalam waktu  $2\frac{3}{4}$  menit maka Beni harus memundurkan sepedanya menuju ke arah rumahnya. Anggap Beni memundurkan sepedanya sejauh Z dari tempat di mana sepeda tersebut ditemukan olehnya.

*Alternatif 1a :*

Jika yang diinginkan adalah Beni yang mencapai sekolah dalam waktu  $2\frac{3}{4}$  menit maka :

$$\frac{3}{4} \cdot 2 + \frac{Z}{S} + \frac{(Z + 0,25S)}{S} \cdot 2 = \frac{11}{4}. \text{ Maka } 4Z + 8Z + 2S = 5S \text{ sehingga } Z = \frac{1}{4}S. \text{ Artinya}$$

posisi sepeda kini berada di tengah-tengah antara rumah dan sekolah. Waktu yang

diperlukan sampai dengan sepeda sampai di tempat tersebut adalah  $\left(1\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$  menit =  $1\frac{3}{4}$  menit. Waktu yang diperlukan Coki untuk mencapai pertengahan rumah dan sekolah adalah 2 menit  $> 1\frac{3}{4}$  menit. Artinya ketika ia mencapai tempat tersebut, sepeda telah berada di sana.

Waktu yang diperlukan Coki untuk mencapai sekolah adalah  $2 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 2\frac{1}{2} < 2\frac{3}{4}$  menit.

∴ Waktu yang diperlukan oleh Beni =  $2\frac{3}{4}$  menit ; Coki =  $2\frac{1}{2}$  menit ; Doni =  $2\frac{3}{4}$  menit.

*Alternatif 1b :*

Jika yang diinginkan adalah Coki yang mencapai sekolah dalam waktu  $2\frac{3}{4}$  menit maka sesuai dengan hitungan sebelumnya, sepeda harus ditaruh pada  $\frac{5}{12}$ S dihitung dari sekolah atau  $\left(\frac{5}{12} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}$ S dihitung dari tempat dimana sepeda ditemukan oleh Beni.

Waktu yang diperlukan Beni untuk mencapai sekolah adalah  $\frac{3}{4} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{5}{12} \cdot 2 = 2\frac{1}{2} < 2\frac{3}{4}$  menit.

∴ Waktu yang diperlukan oleh Beni =  $2\frac{1}{2}$  menit ; Coki =  $2\frac{3}{4}$  menit ; Doni =  $2\frac{3}{4}$  menit.

*Alternatif 2 :*

Coki naik sepeda sejauh  $\frac{1}{2}$ S dan melanjutkan perjalanannya dengan jalan kaki. Waktu yang diperlukan untuk mencapai sekolah adalah  $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 2\frac{1}{2} < 2\frac{3}{4}$  menit. Beni akan mencapai pertengahan jarak terlebih dulu. Agar Doni dapat mencapai sekolah dalam waktu  $2\frac{3}{4}$  menit maka Beni harus memundurkan sepedanya sejauh  $\frac{1}{4}$ S. Waktu yang diperlukan agar sepeda sampai pada jarak  $\frac{1}{4}$ S dari rumah adalah  $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}$  menit. Waktu yang diperlukan Doni untuk mencapai jarak ini adalah  $\frac{1}{4} \cdot 8 = 2$  menit  $> \frac{3}{4}$  menit. Artinya sepeda telah berada di sana saat Doni mencapai tempat tersebut.

Waktu yang diperlukan Beni untuk mencapai sekolah adalah  $\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot 2 = 2\frac{3}{4}$  menit.

∴ Waktu yang diperlukan oleh Beni =  $2\frac{3}{4}$  menit ; Coki =  $2\frac{1}{2}$  menit ; Doni =  $2\frac{3}{4}$  menit

4. Anggap terdapat persamaan yang memenuhi  $m(m^2 + 1) = k^e$  dengan  $k$  dan  $e$  bulat dan  $e > 2$ .  
 Jika ada  $m$  bilangan asli yang memenuhi, maka ruas kiri  $\geq 2$  yang berarti  $k \geq 2$  ..... (1)  
 Karena persamaan berbentuk  $ab = c^d$  dengan  $a, b, c, d \in \text{Asli}$ , maka  $a$  membagi  $c$  atau  $c$  membagi  $a$ .

#### Alternatif 1 :

- \* Jika  $k$  membagi  $m$   
 maka  $m = p \cdot k^q$  dengan  $p$  bukan kelipatan  $k$  dan  $q \in \text{bilangan bulat}$  dan  $p \in \text{bilangan asli}$ .  
 Persamaan menjadi  $p^3 k^{3q} + p k^q = k^e$  sehingga  $p^3 k^{2q} + p = k^{e-q}$  ..... (2)
- Jika  $e > q$   
 Ruas kanan persamaan (2) adalah sebuah bilangan yang habis dibagi  $k$  sedangkan ruas kiri adalah sebuah bilangan yang bersisa  $p$  jika dibagi  $k$  dengan  $p$  bukan bilangan kelipatan  $k$ . Maka tanda kesamaan tidak akan mungkin terjadi.
  - Jika  $e \leq q$   
 Ruas kanan persamaan (2) bernilai  $\leq 1$   
 Karena  $p \geq 1$  dan  $k \geq 2$  maka  $p^3 k^{2q} + p \geq 3$  yang berarti tidak ada nilai  $p$  dan  $k$  yang memenuhi.  
 Maka tidak ada nilai  $m \in \text{bilangan asli}$  yang memenuhi  $m(m^2 + 1) = k^e$  dengan  $k$  membagi  $m$ .
- \* Jika  $m$  membagi  $k$   
 maka  $k = rm$  dengan  $r \in \text{bilangan asli}$  sebab  $k \geq 2$   
 Persamaan akan menjadi  $m(m^2 + 1) = r^e m^e$  sehingga  $m + \frac{1}{m} = r^e m^{e-2}$  ..... (3)
- Jika  $m = 1$   
 Persamaan (3) menjadi  $2 = r^e$ . Karena  $2 = 2^1$  maka persamaan hanya akan dipenuhi jika  $r = 2$  dan  $e = 1$  yang tidak memenuhi syarat bahwa  $e \geq 2$ .
  - Jika  $m > 1$   
 Ruas kiri persamaan (3) bukan merupakan bilangan bulat sedangkan ruas kanan merupakan bilangan bulat sebab  $e \geq 2$ .  
 Maka tidak ada nilai  $m \in \text{bilangan asli}$  yang memenuhi  $m(m^2 + 1) = k^e$  dengan  $m$  membagi  $k$ .
- $\therefore$  Terbukti bahwa tidak ada bilangan asli  $m$  sehingga terdapat bilangan-bilangan bulat  $k, e$ , dengan  $e \geq 2$ , yang memenuhi  $m(m^2 + 1) = k^e$

#### Alternatif 2 :

- FPB( $m, m^2 + 1$ ) = FPB( $m, 1$ ) = 1 yang artinya  $m$  dan  $m^2 + 1$  relatif prima.  
 Jadi, persamaan  $m(m^2 + 1) = k^e$  hanya akan terpenuhi jika  $m$  dan  $m^2 + 1$  memiliki pangkat yang sama.  
 Misalkan  $m = a^e$  dan  $m^2 + 1 = b^e = a^{2e} + 1$ .  
 Karena  $(a^2 + 1)^e = {}_e C_0 a^{2e} + {}_e C_1 a^{2(e-1)} + \dots + {}_e C_e 1^e = a^{2e} + e \cdot a^{2(e-1)} + \dots + 1 > a^{2e} + 1 = m^2 + 1$  maka  $(a^2)^e < m^2 + 1 = (a^2)^e + 1 < (a^2 + 1)^e$   
 Dari ketaksamaan di atas didapat  $m^2 + 1$  terletak di antara dua bilangan asli berurutan berpangkat  $e$ . Maka tidak mungkin  $m^2 + 1$  berbentuk  $b^e$ .  
 $\therefore$  Terbukti bahwa tidak ada bilangan asli  $m$  sehingga terdapat bilangan-bilangan bulat  $k, e$ , dengan  $e \geq 2$ , yang memenuhi  $m(m^2 + 1) = k^e$

5. Misal  $x_{ij}$  adalah jarak titik  $P_i$  dan  $P_j$  dalam arah sumbu X dan Misal  $y_{ij}$  adalah jarak titik  $P_i$  dan  $P_j$  dalam arah sumbu Y.

Jika  $x_{ij}$  dan  $y_{ij}$  keduanya genap, maka dapat dipastikan bahwa sekurang-kurangnya satu titik letis selain titik  $P_i$  dan  $P_j$  akan terletak pada ruas garis  $P_iP_j$ , yaitu pada pertengahan ruas garis  $P_iP_j$

yang akan berjarak  $\frac{1}{2}x_{ij}$  pada arah sumbu X dan  $\frac{1}{2}y_{ij}$  pada arah sumbu Y terhadap titik  $P_i$

maupun  $P_j$  dengan  $\frac{1}{2}x_{ij}$  dan  $\frac{1}{2}y_{ij}$  adalah juga bilangan bulat.

Sifat penjumlahan berikut juga akan membantu menjelaskan :

Bilangan Genap – Bilangan Genap = Bilangan Genap

Bilangan Ganjil – Bilangan Ganjil = Bilangan Genap.

Kemungkinan jenis koordinat (dalam bahasa lain disebut paritas) suatu titik letis pada bidang hanya ada 4 kemungkinan yaitu (genap,genap), (genap,ganjil), (ganjil,ganjil) dan (ganjil,genap).

Jika 2 titik letis mempunyai paritas yang sama maka sesuai sifat penjumlahan maka dapat dipastikan kedua titik letis memiliki jarak mendatar dan jarak vertikal merupakan bilangan genap yang berarti koordinat titik tengah dari garis yang menghubungkan kedua titik letis tersebut juga merupakan bilangan genap.

Karena ada 5 titik letis sedangkan hanya ada 4 paritas titik letis maka sesuai *Pigeon Hole Principle* (PHP) maka dapat dipastikan sekurang-kurangnya ada dua titik letis yang memiliki paritas yang sama.

- ∴ Dari penjelasan di atas dapat dibuktikan bahwa jika  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  adalah lima titik letis berbeda pada bidang maka terdapat sepasang titik  $(P_i, P_j)$ ,  $i \neq j$ , demikian, sehingga ruas garis  $P_iP_j$  memuat sebuah titik letis selain  $P_i$  dan  $P_j$ .



**SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2005  
OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2004  
PEKAN BARU (RIAU), 24 - 29 AGUSTUS 2004**

**Bidang Matematika**

**Hari Pertama**

**Waktu : 180 Menit**



**DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL  
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH  
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH UMUM  
TAHUN 2004**



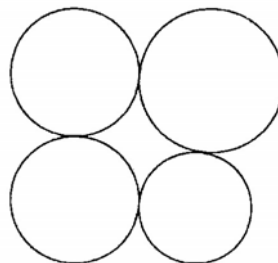
OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2004  
24 - 29 AGUSTUS 2004  
PEKAN BARU, RIAU

**BIDANG : MATEMATIKA**

**HARI PERTAMA**

**WAKTU : 180 MENIT**

1. Berapa banyaknya pembagi genap dan pembagi ganjil dari  $5^6 - 1$  ?
2. Sebuah bak bila diisi dengan keran air dingin akan penuh dalam 14 menit. Untuk mengosongkan bak yang penuh dengan membuka lubang pada dasar bak, air akan keluar semua dalam waktu 21 menit. Jika keran air dingin dan air panas dibuka bersamaan dan lubang pada dasar bak dibuka, bak akan penuh dalam 12,6 menit. Maka berapa lamakah waktu yang diperlukan untuk memenuhkan bak hanya dengan keran air panas dan lubang pada dasar bak ditutup ?
3.  $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10$   
Berapa carakah untuk menyusun deretan tersebut dengan mengganti mengganti tanda ekspresi "\*" dengan tanda "+" atau "-" sehingga jumlahnya menjadi 29 ?
4. Lingkaran yang berbeda bentuk disusun sebagai berikut :



Buktikan bahwa ada lingkaran yang melewati keempat titik singgung keempat lingkaran.



**SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2005  
OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2004  
PEKAN BARU (RIAU), 24 - 29 AGUSTUS 2004**

**Bidang Matematika**

**Hari Kedua**

**Waktu : 180 Menit**



**DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL  
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH  
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH UMUM  
TAHUN 2004**



OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2004  
24 - 29 AGUSTUS 2004  
PEKAN BARU, RIAU

**BIDANG : MATEMATIKA**

**HARI KEDUA**

**WAKTU : 180 MENIT**

5.  $x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 + 25x_5 + 36x_6 + 49x_7 = 1$   
 $4x_1 + 9x_2 + 16x_3 + 25x_4 + 36x_5 + 49x_6 + 64x_7 = 12$   
 $9x_1 + 16x_2 + 25x_3 + 36x_4 + 49x_5 + 64x_6 + 81x_7 = 123$   
Berapakah nilai S jika  
 $S = 16x_1 + 25x_2 + 36x_3 + 49x_4 + 64x_5 + 81x_6 + 100x_7$
6. Persamaan kuadrat  $x^2 + ax + b + 1 = 0$  dengan  $a, b$  adalah bilangan bulat, memiliki akar-akar bilangan asli. Buktikan bahwa  $a^2 + b^2$  bukan bilangan prima.
7. Buktikan bahwa suatu segitiga ABC siku-siku di C dengan  $a$  menyatakan sisi dihadapan sudut A,  $b$  menyatakan sisi di hadapan sudut B,  $c$  menyatakan sisi di hadapan sudut C memiliki diameter lingkaran dalam  $= a + b - c$ .
8. Sebuah lantai berluas  $3 \text{ m}^2$  akan ditutupi oleh karpet dengan bermacam bentuk sebanyak 5 buah dengan ukuran @  $1 \text{ m}^2$ . Tunjukkan bahwa ada 2 karpet yang tumpang tindih dengan luasan tumpang tindih lebih dari  $1/5 \text{ m}^2$ .



**SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2005  
OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2004  
PEKAN BARU (RIAU), 24 - 29 AGUSTUS 2004**

*Prestasi itu diraih bukan didapat !!!*

**SOLUSI SOAL**

**Bidang Matematika**



**Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST**

$$1. \quad 5^6 - 1 = (5^3 + 1)(5^3 - 1) = 126 \cdot 124$$

$$5^6 - 1 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 2^2 \cdot 31$$

$$5^6 - 1 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 31$$

Misalkan  $M = p_1^{d_1} \cdot p_2^{d_2} \cdot p_3^{d_3} \cdot \dots \cdot p_n^{d_n}$  dengan  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$  adalah bilangan prima maka banyaknya pembagi positif dari  $M$  adalah  $(d_1 + 1)(d_2 + 1)(d_3 + 1) \dots (d_n + 1)$

Banyaknya pembagi (disebut juga faktor) dari  $5^6 - 1$  adalah  $(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 48$

Misal  $K = 3^2 \cdot 7 \cdot 31$ . Mengingat bahwa bilangan ganjil hanya didapat dari perkalian bilangan ganjil maka semua pembagi dari  $K$  pasti ganjil.

Banyaknya pembagi dari  $K$  adalah  $(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 12$

Banyaknya pembagi dari  $K$  sama dengan banyaknya pembagi ganjil dari  $5^6 - 1$

$\therefore$  Banyaknya pembagi ganjil dari  $5^6 - 1$  adalah 12.

Banyaknya pembagi genap dari  $5^6 - 1$  adalah  $48 - 12 = 36$

(Catatan : Ke-48 pembagi  $5^6 - 1$  adalah : 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 18, 21, 24, 28, 31, 36, 42, 56, 62, 63, 72, 84, 93, 124, 126, 168, 186, 217, 248, 252, 279, 372, 434, 504, 558, 651, 744, 868, 1116, 1302, 1736, 1953, 2232, 2604, 3906, 5208, 7812, 15624)

2. Misalkan  $v_d$  = kelajuan air keluar dari keran air dingin  
 $v_p$  = kelajuan air keluar dari keran air panas  
 $v_b$  = kelajuan air keluar dari lubang di dasar bak  
 $X$  = volume bak

$$v_d = \frac{X}{14}$$

$$v_b = \frac{X}{21}$$

$$v_d + v_p - v_b = \frac{X}{12,6}$$

Dari ketiga persamaan di atas didapat :

$$\frac{X}{14} + v_p - \frac{X}{21} = \frac{5X}{63}$$

$$v_p = \frac{X}{7} \left( \frac{5}{9} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right)$$

$$v_p = \frac{X}{18}$$

$\therefore$  Waktu yang diperlukan untuk memenuhi bak hanya dengan keran air panas dan lubang pada dasar bak ditutup adalah 18 menit

3. Misalkan  $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$

Jika  $+k$  kita ganti dengan  $-k$  maka  $S$  akan berkurang sebanyak  $2k$ .

Karena  $55 - 29 = 26$  maka bilangan yang bertanda “-” harus berjumlah 13.

Jika ada 4 bilangan yang bertanda “-” maka jumlah minimum bilangan tersebut  $= 2 + 3 + 4 + 5 = 14 > 13$ . Maka banyaknya bilangan yang bertanda “-” harus kurang dari 4.

- Untuk 2 bilangan yang bertanda “-” maka pasangan yang mungkin adalah  $(3,10)$ ,  $(4,9)$ ,  $(5,8)$ ,  $(6,7)$ .
- Untuk 3 bilangan yang bertanda “-” maka tripel yang mungkin adalah  $(2,3,8)$ ,  $(2,4,7)$ ,  $(2,5,6)$ ,  $(3,4,6)$

∴ Banyaknya kemungkinan seluruhnya ada 8.

(Catatan : Ke-8 kemungkinan tersebut adalah :

$$1 + 2 - 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 - 10$$

$$1 - 2 - 3 + 4 + 5 + 6 + 7 - 8 + 9 + 10$$

$$1 + 2 + 3 - 4 + 5 + 6 + 7 + 8 - 9 + 10$$

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 + 6 - 7 + 8 + 9 + 10$$

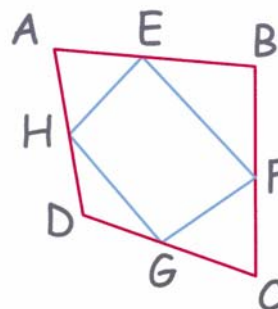
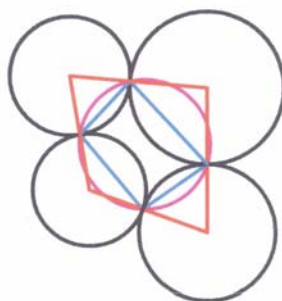
$$1 + 2 + 3 + 4 - 5 + 6 + 7 - 8 + 9 + 10$$

$$1 - 2 + 3 + 4 - 5 - 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 8 + 9 + 10$$

$$1 + 2 - 3 - 4 + 5 - 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

4. Misalkan  $A, B, C$  dan  $D$  adalah keempat pusat lingkaran dan  $E, F, G$  dan  $H$  adalah titik singgung keempat lingkaran. Maka persoalan tersebut dapat digambarkan sebagai berikut :



$\triangle AEH$ ,  $\triangle BEF$ ,  $\triangle CFG$  dan  $\triangle DGH$  semuanya adalah segitiga sama kaki.

Misalkan  $\angle A$  menyatakan  $\angle DAC$

$\angle B$  menyatakan  $\angle ABC$

$\angle C$  menyatakan  $\angle BCD$

$\angle D$  menyatakan  $\angle CDA$

$$\angle EHA = \angle AEH = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A$$

$$\angle BEF = \angle BFE = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle B$$

$$\angle CFG = \angle CGF = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle C$$

$$\angle D = 360^\circ - \angle A - \angle B - \angle C$$

$$\angle DGH = \angle DHG = \frac{1}{2} (180^\circ - (360^\circ - \angle A - \angle B - \angle C)) = \frac{1}{2} (\angle A + \angle B + \angle C) - 90^\circ$$

$$\angle HEF = 180^\circ - \angle AEH - \angle BEF = \frac{1}{2} (\angle A + \angle B)$$

$$\angle HGF = 180^\circ - \angle DGH - \angle CGF = 180^\circ - \frac{1}{2} (\angle A + \angle B)$$

$$\angle HEF + \angle HGF = 180^\circ$$

Karena  $\angle HEF + \angle HGF = 180^\circ$  maka segiempat  $EFGH$  adalah segiempat tali busur yang berarti titik  $E, F, G$ , dan  $H$  terletak pada satu lingkaran.

∴ Terbukti bahwa ada lingkaran yang melewati keempat titik singgung keempat lingkaran.

5.  $x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 + 25x_5 + 36x_6 + 49x_7 = 1$  ..... (1)  
 $4x_1 + 9x_2 + 16x_3 + 25x_4 + 36x_5 + 49x_6 + 64x_7 = 12$  ..... (2)  
 $9x_1 + 16x_2 + 25x_3 + 36x_4 + 49x_5 + 64x_6 + 81x_7 = 123$  ..... (3)  
 Kurangkan (2) dengan (1),  $3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 11x_5 + 13x_6 + 15x_7 = 11$  ..... (4)  
 Kurangkan (3) dengan (2),  $5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 11x_4 + 13x_5 + 15x_6 + 17x_7 = 111$  ..... (5)  
 Kurangkan (5) dengan (4),  $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 + 2x_7 = 100$  ..... (6)  
 Jumlahkan (5) dengan (6),  $7x_1 + 9x_2 + 11x_3 + 13x_4 + 15x_5 + 17x_6 + 19x_7 = 211$  ..... (7)  
 Jumlahkan (3) dengan (7),  $16x_1 + 25x_2 + 36x_3 + 49x_4 + 64x_5 + 81x_6 + 100x_7 = 334$   
 $\therefore 16x_1 + 25x_2 + 36x_3 + 49x_4 + 64x_5 + 81x_6 + 100x_7 = 334$

6. Misalkan  $x_1$  dan  $x_2$  adalah akar-akar persamaan  $x^2 + ax + b + 1 = 0$  maka :

$$x_1 + x_2 = -a$$

$$x_1 x_2 = b + 1$$

$$b = x_1 x_2 - 1$$

$$a^2 + b^2 = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 x_2 - 1)^2$$

$$a^2 + b^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + (x_1 x_2)^2 - 2x_1x_2 + 1$$

$$a^2 + b^2 = (x_1x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2 + 1$$

$$a^2 + b^2 = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)$$

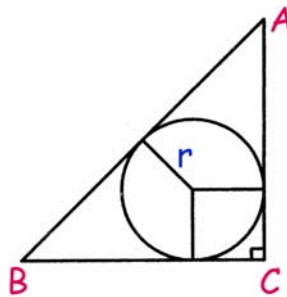
Karena  $x_1$  dan  $x_2$  keduanya adalah bilangan asli maka  $(x_1^2 + 1)$  dan  $(x_2^2 + 1)$  keduanya adalah bilangan asli lebih dari 1.

Maka  $a^2 + b^2$  adalah perkalian dua bilangan asli masing-masing  $> 1$  yang mengakibatkan  $a^2 + b^2$  adalah bukan bilangan prima.

$\therefore$  Terbukti  $a^2 + b^2$  bukan bilangan prima.

7. Misalkan  $d$  adalah diameter lingkaran dalam segitiga dan  $r$  adalah jejari lingkaran dalam maka :

Alternatif 1 :



$$\frac{1}{2} r (a + b + c) = \text{Luas segitiga}$$

$$d (a + b + c) = 4 \cdot \text{Luas segitiga}$$

$$d (a + b + c) = 2ab$$

$$d (a + b + c) = (a + b)^2 - (a^2 + b^2)$$

Karena ABC adalah segitiga siku-siku di C maka :

$$d (a + b + c) = (a + b)^2 - c^2$$

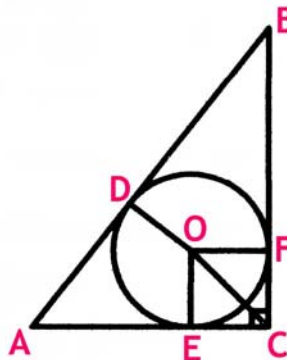
$$d (a + b + c) = (a + b + c) (a + b - c)$$

$$d = a + b - c$$

$\therefore$  Terbukti bahwa diameter lingkaran dalam segitiga tersebut adalah  $a + b - c$ .

Alternatif 2 :

Misalkan O adalah pusat lingkaran dalam  $\triangle ABC$ . Misalkan juga garis AB, AC dan BC berturut-turut menyinggung lingkaran dalam di titik D, E dan F.



Jelas bahwa  $CE = CF = r$ .

Jelas juga bahwa  $AD = AE$  dan  $BD = BF$

Maka  $AE = b - r$  dan  $BF = a - r$

$AB = AD + BD$

$c = (b - r) + (a - r)$

$d = 2c = a + b - c$

$\therefore$  Terbukti bahwa diameter lingkaran dalam segitiga tersebut adalah  $a + b - c$ .

8. Alternatif 1 :

Misalkan  $A_i$  menyatakan karpet ke-i.  $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = 1$

Berdasarkan Prinsip Inklusi Eksklusi maka :

$$(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5) = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 - (A_1 \cap A_2) - (A_1 \cap A_3) - (A_1 \cap A_4) - (A_1 \cap A_5) - (A_2 \cap A_3) - (A_2 \cap A_4) - (A_2 \cap A_5) - (A_3 \cap A_4) - (A_3 \cap A_5) - (A_4 \cap A_5) + (A_1 \cap A_2 \cap A_3) + (A_1 \cap A_2 \cap A_4) + (A_1 \cap A_2 \cap A_5) + (A_1 \cap A_3 \cap A_4) + (A_1 \cap A_3 \cap A_5) + (A_1 \cap A_4 \cap A_5) + (A_2 \cap A_3 \cap A_4) + (A_2 \cap A_3 \cap A_5) + (A_2 \cap A_4 \cap A_5) + (A_3 \cap A_4 \cap A_5) - (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) - (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5) - (A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5) - (A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) - (A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) + (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$$

$$3 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 - (A_1 \cap A_2) - (A_1 \cap A_3) - (A_1 \cap A_4) - (A_1 \cap A_5) - (A_2 \cap A_3) - (A_2 \cap A_4) - (A_2 \cap A_5) - (A_3 \cap A_4) - (A_3 \cap A_5) - (A_4 \cap A_5) + (A_1 \cap A_2 \cap A_3) + (A_1 \cap A_2 \cap A_4) + (A_1 \cap A_2 \cap A_5) + (A_1 \cap A_3 \cap A_4) + (A_1 \cap A_3 \cap A_5) + (A_1 \cap A_4 \cap A_5) + (A_2 \cap A_3 \cap A_4) + (A_2 \cap A_3 \cap A_5) + (A_2 \cap A_4 \cap A_5) + (A_3 \cap A_4 \cap A_5) - (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) - (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5) - (A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5) - (A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) - (A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) + (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$$

$$2 + (A_1 \cap A_2 \cap A_3) + (A_1 \cap A_2 \cap A_4) + (A_1 \cap A_2 \cap A_5) + (A_1 \cap A_3 \cap A_4) + (A_1 \cap A_3 \cap A_5) + (A_1 \cap A_4 \cap A_5) + (A_2 \cap A_3 \cap A_4) + (A_2 \cap A_3 \cap A_5) + (A_2 \cap A_4 \cap A_5) + (A_3 \cap A_4 \cap A_5) - (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) - (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5) - (A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5) - (A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) - (A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) + (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = (A_1 \cap A_2) + (A_1 \cap A_3) + (A_1 \cap A_4) + (A_1 \cap A_5) + (A_2 \cap A_3) + (A_2 \cap A_4) + (A_2 \cap A_5) + (A_3 \cap A_4) + (A_3 \cap A_5) + (A_4 \cap A_5) \dots \dots \dots (1)$$

$(A_a \cap A_b \cap A_c \cap A_d)$  merupakan himpunan bagian dari  $(A_a \cap A_b \cap A_c)$  sehingga  $(A_a \cap A_b \cap A_c \cap A_d) \leq (A_a \cap A_b \cap A_c)$

$(A_a \cap A_b \cap A_c)$  merupakan himpunan bagian dari  $(A_a \cap A_b)$  sehingga  $(A_a \cap A_b \cap A_c) \leq (A_a \cap A_b)$

dan seterusnya .....

Akibatnya :

$(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \leq (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$  atau  $(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \leq (A_1 \cap A_2 \cap A_4)$  dan seterusnya  
 $(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5) \leq (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$  atau  $(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5) \leq (A_1 \cap A_2 \cap A_5)$  dan seterusnya  
 $(A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5) \leq (A_1 \cap A_2 \cap A_4)$  atau  $(A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5) \leq (A_1 \cap A_2 \cap A_5)$  dan seterusnya  
 $(A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \leq (A_1 \cap A_3 \cap A_4)$  atau  $(A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \leq (A_3 \cap A_4 \cap A_5)$  dan seterusnya  
 $(A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \leq (A_2 \cap A_3 \cap A_4)$  atau  $(A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \leq (A_2 \cap A_3 \cap A_5)$  dan seterusnya

Maka ruas kiri persamaan (1) bernilai minimal 2.

Karena ada 10 irisan di ruas kanan persamaan (1) maka dapat dipastikan sekurang-kurangnya ada 1 di antara 10 irisan 2 karpet tersebut yang memiliki irisan minimal  $2/10 = 0,2 \text{ m}^2$ .

Alternatif 2 :

Andaikan tidak ada 2 karpet yang tumpang tindih dengan luasan tumpang tindih lebih dari  $1/5 \text{ m}^2$ . Karpet pertama akan menempati ruang dengan luas  $1 \text{ m}^2$ . Maka karpet kedua akan menempati ruang dengan luas minimum  $4/5 \text{ m}^2$ . Karpet ketiga akan menempati ruang dengan luas minimum  $3/5 \text{ m}^2$ . Karpet keempat akan menempati ruang dengan luas minimum  $2/5 \text{ m}^2$ . Karpet kelima akan menempati ruang dengan luas minimum  $1/5 \text{ m}^2$ .

Luas minimum karpet yang diperlukan adalah  $1 + \frac{4}{5} + \frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = 3 \text{ m}^2$ .

∴ Hanya dapat dibuktikan bahwa ada 2 karpet yang tumpang tindih dengan luasan tumpang tindih minimal  $1/5 \text{ m}^2$ .