SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA TAHUN 2003

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2004

Bidang Matematika

Waktu : 90 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH UMUM
TAHUN 2003

OLIMPIADE MATEMATIKA
TINGKAT KABUPATEN/KOTA
TAHUN 2003

1 Bagian Pertama

1. Ada berapa banyak diantara bilangan-bilangan 20000002, 20011002, 20022002, 20033002 yang habis dibagi 9 ?
   A. 0 B. 1 C. 2 D. 3 E. 4

2. Ada berapa banyak bilangan 4-angka (digit) yang semua angkanya genap dan bukan merupakan kelipatan 2003 ?
   A. 499 C. 624 E. Tidak satupun diantaranya
   B. 500 D. 625

3. Hari ini usiaku 1/3 kali usia ayahku. Lima tahun yang lalu, usiaku 1/4 kali usia ayahku pada waktu itu. Berapakah usiaku sekarang ?
   A. 12 B. 15 C. 17 D. 20 E. 21

4. Sebuah kelas terdiri dari 40 siswa. Diantaranya, 20 siswa menyukai pelajaran Matematika, 15 orang menyukai pelajaran Biologi, 15 orang menyukai pelajaran Bahasa Inggris dan lima orang menyukai ketiganya. Banyaknya siswa yang menyukai sedikitnya satu dari ketiga pelajaran tersebut adalah ?
   A. 10 C. 20 E. Tidak satupun diantaranya
   B. 15 D. 25

5. Masing-masing dari kelima pernyataan berikut benar atau salah.
   (a) pernyataan (c) dan (d) keduanya benar
   (b) pernyataan (d) dan (e) tidak keduanya salah
   (c) pernyataan (a) benar
   (d) pernyataan (c) salah
   (e) pernyataan (a) dan (c) keduanya salah.
   Berapa banyak diantara kelima pernyataan di atas yang benar ?
   A. 0 B. 1 C. 2 D. 3 E. 4

6. Misalkan x dan y adalah bilangan taknol yang memenuhi
$$xy = \frac{x}{y} = x - y$$
   Berapakah nilai x + y ?
   A. $-\frac{3}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. 0 D. $\frac{1}{2}$ E. $\frac{3}{2}$

7. Di dalam suatu lingkaran L_1 berjari-jari 1 dan berpusat di titik asal dilukis suatu lingkaran L_2 yang bersinggungan dengan lingkaran L_1 , dan dengan sumbu-x dan sumbu-y positif. Jari-jari lingkaran L_2 adalah ?

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\sqrt{2}-1$ D. $\frac{1}{2}$ E. $2-\sqrt{2}$

8. Misalkan $3^a = 4$, $4^b = 5$, $5^c = 6$, $6^d = 7$, $7^e = 8$, dan $8^f = 9$. Berapakah hasil kali abcdef ?

A. 1 B. 2 C. $\sqrt{6}$ D. 3 E. $\frac{10}{3}$

9. Misalkan N adalah bilangan bulat terkecil yang bersifat : bersisa 2 jika dibagi 5, bersisa 3 jika dibagi oleh 7, dan bersisa 4 jika dibagi 9. Berapakah hasil penjumlahan digit-digit dari N ?·

A. 4 B. 8 C. 13 D. 22 E. 40

10. Suatu garis melalui titik (m, –9) dan (7, m) dengan kemiringan m. Berapakah nilai m ?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. 5

2 Bagian Kedua

11. Misalkan f suatu fungsi yang memenuhi

$$f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}f\left(-x\right)=2x$$

untuk setiap bilangan real $x \neq 0$. Berapakah nilai f(2) ?

12. Jika a dan b bilangan bulat sedemikian sehingga $a^2 - b^2 = 2003$, maka berapakah nilai $a^2 + b^2$? (Diketahui bahwa 2003 merupakan bilangan prima)

13. Dari sepuluh orang siswa akan dibentuk 5 kelompok, masing-masing beranggota dua orang. Berapa banyaknya cara membentuk kelima kelompok ini ?

14. Misalkan bahwa

$$f(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + c$$

dan bahwa f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = f(5). Berapakah nilai a ?

15. Berapakah hasil perkalian

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2003^2}\right)$$

16. Iwan selalu berbohong pada hari Senin, Selasa, Rabu dan berkata jujur pada hari-hari lainnya. Di lain pihak Budi selalu berbohong pada hari Kamis, Jumat, Sabtu dan berkata jujur pada hari-hari lainnya. Pada suatu hari terjadi percakapan berikut :

Iwan : Kemarin saya berbohong
Budi : Saya juga

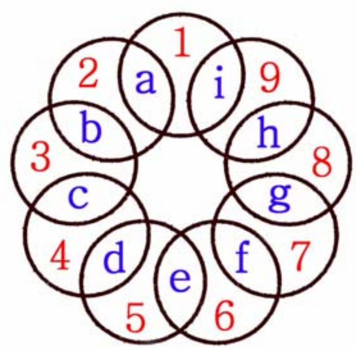
Pada hari apa percakapan tersebut terjadi ?

17. Segitiga ABC adalah segitiga samasisi dengan panjang sisi 1 satuan. Melalui B dibuat garis yang tegak lurus BC. Garis tersebut berpotongan dengan perpanjangan garis AC di titik D. Berapakah panjang BD ?

18. Untuk setiap bilangan real α, kita definisikan $\lfloor \alpha \rfloor$ sebagai bilangan bulat yang kurang dari atau sama dengan α. Sebagai contoh $\lfloor 4{,}9 \rfloor$ = 4 dan $\lfloor 7 \rfloor$ = 7. Jika x dan y bilangan real sehingga $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$ = 9 dan $\lfloor \sqrt{y} \rfloor$ = 12, maka nilai terkecil yang mungkin dicapai oleh $\lfloor y - x \rfloor$ adalah ?

19. Untuk menentukan wakilnya dalam cabang lari 110 m gawang putera, sebuah SMU mengadakan seleksi yang diikuti 5 orang siswa. Dalam seleksi tersebut diadakan tiga kali lomba yang pada setiap lomba, pelari tercepat diberi nilai 5, sedangkan peringkat di bawahnya berturut-turut mendapat nilai 3, 2, 1, 1. Tidak ada dua pelari yang menempati peringkat yang sama. Jika pemenang seleksi diberikan kepada yang nilai totalnya paling tinggi pada ketiga lomba, berapakah nilai terendah yang mungkin dicapai oleh pemenang seleksi ?

20. Misalkan a, b, c, d, e, f, g, h, i menyatakan bilangan-bilangan bulat positif berbeda yang kurang dari atau sama dengan sembilan. Jika jumlah setiap tiga bilangan dalam setiap lingkaran bernilai sama, berapakah nilai a + d + g ?



SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA 2003

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2004

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN PERTAMA

1. (Jawaban : A)

Teori : Sebuah bilangan bulat habis dibagi 9 jika jumlah digit bilangan tersebut habis dibagi 9.

Jumlah digit 20000002 = 2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 2 = 4 (Tidak habis dibagi 9)
Jumlah digit 20011002 = 2 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 + 2 = 6 (Tidak habis dibagi 9)
Jumlah digit 20022002 = 2 + 0 + 0 + 2 + 2 + 0 + 0 + 2 = 8 (Tidak habis dibagi 9)
Jumlah digit 20033002 = 2 + 0 + 0 + 3 + 3 + 0 + 0 + 2 = 10 (Tidak habis dibagi 9)

∴ Banyaknya bilangan yang habis dibagi 3 adalah **0**

2. (Jawaban : A)

Angka pertama ada 4 kemungkinan : 2, 4, 6, 8. Angka ke-2, ke-3 dan ke-4 masing-masing ada 5 kemungkinan. Banyaknya bilangan empat angka yang semua digitnya genap ada : 4 x 5 x 5 x 5 = 500 bilangan.

Bilangan kelipatan 2003 yang terdiri dari 4 angka adalah : 2003, 4006, 6009, 8012. Yang semua digitnya bilangan genap hanya 4006.

∴ Banyaknya bilangan 4 angka yang semua digitnya genap dan bukan merupakan kelipatan 2003 ada : 500 − 1 = **499** bilangan

3. (Jawaban : B)

Misal usiaku saat ini = X dan usia ayahku saat ini = Y, maka : $X = \frac{1}{3}Y$ dan

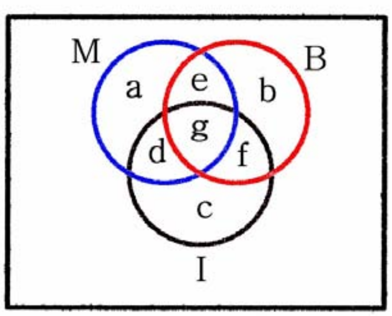
$$(X - 5) = \frac{1}{4}(Y - 5)$$

$$X - 5 = \frac{1}{4}(3X - 5)$$

4X − 20 = 3X − 5
X = 15

∴ Usiaku saat ini **15** tahun

4. (Jawaban : ?)



Misalkan M adalah himpunan siswa yang menyukai Matematika ; B adalah himpunan siswa yang menyukai Biologi dan I adalah himpunan siswa yang menyukai Bahasa Inggris.

Misalkan $n(M \cup B \cup I) = T$. Maka banyaknya siswa yang menyukai paling sedikit 1 mata pelajaran adalah T.

Misalkan banyaknya siswa yang tidak menyukai satupun dari ketiga pelajaran tersebut adalah k

$$n(M \cup B \cup I) = n(M) + n(B) + n(I) - n(M \cap B) - n(M \cap I) - n(B \cap I) + n(M \cap B \cap I)$$
$$T = 40 - k = 20 + 15 + 15 - (e + g) - (d + g) - (f + g) + g$$
$$T = 40 - k = 40 - d - e - f. \text{ Maka } k = d + e + f$$

Tampak ada yang kurang pada soal. Kemungkinan maksud soal :

a. k = 0, banyaknya siswa yang menyukai hanya 1 pelajaran ?

$$n(M \cup B \cup I) = n(M) + n(B) + n(I) - n(M \cap B) - n(M \cap I) - n(B \cap I) + n(M \cap B \cap I)$$
$$40 = 20 + 15 + 15 - (e + g) - (d + g) - (f + g) + g$$
$$d + e + g = 0$$

Karena $d \geq 0$; $e \geq 0$ dan $f \geq 0$ maka d = 0 ; e = 0 dan f = 0

$a + d + e + g = 20$ sehingga $a = 20 - 5 - 0 - 0 = 15$

$c + d + f + g = 15$ sehingga $c = 15 - 5 - 0 - 0 = 10$

$b + e + f + g = 15$ sehingga $b = 15 - 5 - 0 - 0 = 10$

Banyaknya siswa yang menyukai hanya 1 pelajaran adalah = a + b + c = **35**

b. $n(M \cup B \cup I) = 40$ dan pertanyaan sesuai dengan soal

Maka jelas a + b + c + d + e + f + g = **40**

(*Catatan* : Jawaban asli soal ini adalah **25**, tapi bagaimana mendapatkannya ?)

5. (Jawaban : D)

Misalkan (a) benar maka (c) dan (d) benar

Berdasarkan (d) hal ini merupakan kontradiksi. Maka (a) salah.

Karena (a) salah maka (c) juga salah sehingga (d) dan (e) benar. Akibatnya (b) juga benar.

Pernyataan yang benar adalah (b) ; (d) dan (e).

$\therefore$ Banyaknya pernyataan yang benar ada : **3**

6. (Jawaban : A)

$xy = \frac{x}{y}$; $y \neq 0$

$$xy^2 = x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

a. Untuk x = 0

$\frac{x}{y} = x - y$. Maka 0 = 0 – y sehingga y = 0 (Tidak memenuhi syarat awal bahwa $y \neq 0$)

b. Untuk $x \neq 0$

Berdasarkan pers (1) maka $y^2 = 1$ sehingga y = 1 atau y = –1

* Untuk y = 1

$\frac{x}{y} = x - y$. Maka x = x – 1. Karena 0 = – 1 maka tidak ada nilai x yang memenuhi

* Untuk y = –1

$\frac{x}{y} = x - y$. Maka –x = x + 1 sehingga $x = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ $x + y = -\frac{1}{2} + (-1) = -\frac{3}{2}$

7. (Jawaban : C)

OB adalah jari-jari lingkaran besar dengan pusat (

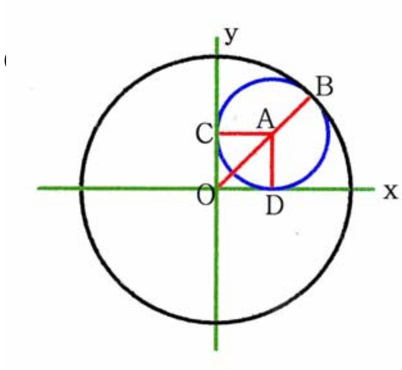
Misal jari-jari lingkaran dalam = r, maka AB = r

Karena OD = OC = r maka OA = $r\sqrt{2}$

OB = OA + AB

$1 = r\sqrt{2} + r$

$\therefore \quad r = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$



8. (Jawaban : B)

Karena $3^a = 4$ maka a = $^3\log 4$

Karena $4^b = 5$ maka b = $^4\log 5$

Karena $5^c = 6$ maka c = $^5\log 6$

Karena $6^d = 7$ maka d = $^6\log 7$

Karena $7^e = 8$ maka e = $^7\log 8$

Karena $8^f = 9$ maka f = $^8\log 9$

abcdef = $^3\log 4 \cdot {}^4\log 5 \cdot {}^5\log 6 \cdot {}^6\log 7 \cdot {}^7\log 8 \cdot {}^8\log 9 = {}^3\log 9 = 2$

$\therefore$ abcdef = **2**

9. (Jawaban : C)

Alternatif 1 :

Karena N bersisa 2 jika dibagi 5 maka N = 5m + 2. Bilangan-bilangan N adalah 2, 7, 12, 17, 22, ····

Karena N bersisa 3 jika dibagi 7 maka N = 7n + 3. Bilangan-bilangan N adalah 3, 10, 17, 24, 31, ···

Karena persekutuan terkecilnya 17 maka bilangan yang bersisa 2 jika dibagi 5 dan bersisa 3 jika dibagi 7 akan berbentuk N = (5 · 7) p + 17 = 35p + 17 dengan p adalah bilangan bulat. Bilangan-bilangan N adalah 17, 52, 87, 122, 157, 192, ······

N bersisa 4 jika dibagi 9. Maka N = 9t + 4. Bilangan-bilangan N adalah 4, 13, 22, 31, 40, 49, 58, 67, 76, 85, 94, 103, 112, 121, 130, 139, 148, 157, 166, ······

Karena persekutuan terkecilnya adalah 157, maka bilangan yang bersisa 2 jika dibagi 5, bersisa 3 jika dibagi 7 dan bersisa 4 jika dibagi 9 akan berbentuk N = (35 · 9)k + 157

N = 315k + 157

N_{min} = 157 jika k = 0

$\therefore$ Jumlah digit dari N_{min} adalah = 1 + 5 + 7 = **13**

Alternatif 2 :

Karena N bersisa 2 jika dibagi 5 maka N = 5m + 2 untuk suatu bilangan bulat tak negatif m.

$N \equiv 3 \pmod 7$

$5m + 2 \equiv 3 \pmod 7$

$5m \equiv 1 \pmod 7$

Nilai m yang memenuhi haruslah berbentuk m = 7k + 3 untuk suatu bilangan bulat tak negatif k.

N = 5m + 2 = 5(7k + 3) + 2 = 35k + 17

$N \equiv 4 \pmod 9$

$35k + 17 \equiv 4 \pmod 9 \equiv 22 \pmod 9$

$35k \equiv 5 \pmod 9$

Nilai k yang memenuhi haruslah berbentuk k = 9p + 4 untuk suatu bilangan bulat tak negatif p.

N = 35k + 17 = 35(9p + 4) + 17 = 315p + 157.

N_{min} = 157 jika p = 0

$\therefore$ Jumlah digit dari N_{min} adalah = 1 + 5 + 7 = **13**

10. (Jawaban : C)

Gradien = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m = \frac{m - (-9)}{7 - m}$

m + 9 = 7m – m^2

$(m - 3)^2 = 0$

∴ m = **3**

BAGIAN KEDUA

11. $f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} f(-x) = 2x$

Untuk x = $\frac{1}{2}$ maka $f(2) + 2f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$ .... (1)

Untuk x = –2 maka $f\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} f(2) = -4$

$2f\left(-\frac{1}{2}\right) - f(2) = -8$ .... (2)

Kurangkan persamaan (1) dengan persamaan (2)

2f(2) = 9

∴ **f(2) =** $\frac{9}{2}$

12. $a^2 - b^2$ = 2003. Maka (a + b) (a – b) = 2003 · 1

* Untuk a + b = 2003 dan (a – b) = 1
  didapat 2a = 2004. Maka a = 1002 dan b = 1001
  $a^2 + b^2 = (1002)^2 + (1001)^2 = 2006005$
* Untuk (a + b) = 1 dan (a – b) = 2003
  didapat 2a = 2004. Maka a = 1002 dan b = – 1001
  $a^2 + b^2 = (1002)^2 + (-1001)^2 = 2006005$

∴ $a^2 + b^2$ = **2006005**

13. Alternatif 1:

* Jika 2 orang siswa akan dibentuk 1 kelompok
  Banyaknya cara ada 1
* Jika 4 orang siswa (misal A, B, C dan D) akan dibentuk menjadi 2 kelompok yang masing-masing beranggota 2 orang

Pasangkan A dengan salah satu anggota lainnya. Maka sisanya adalah membentuk 1 kelompok yang masing-masing beranggota 2 orang. Banyaknya cara ada 1.
Karena kemungkinan pasangan A ada 3, maka banyaknya cara dari 4 orang siswa akan dibentuk 2 kelompok yang masing-masing beranggota dua orang adalah 3 x 1 = 3 cara.

* Jika 6 orang siswa (misal A, B, C, D, E dan F) akan dibentuk menjadi 3 kelompok yang masing-masing beranggota 2 orang
  Pasangkan A dengan salah satu anggota lainnya. Maka sisanya adalah membentuk 2 kelompok yang masing-masing beranggota 2 orang. Banyaknya cara ada 3 x 1.
  Karena kemungkinan pasangan A ada 5, maka banyaknya cara dari 6 orang siswa akan dibentuk 3 kelompok yang masing-masing beranggota dua orang adalah 5 x 3 x 1 = 15 cara.
* Jika 8 orang siswa (misal A, B, C, D, E, F, G dan H) akan dibentuk menjadi 4 kelompok yang masing-masing beranggota 2 orang
  Pasangkan A dengan salah satu anggota lainnya. Maka sisanya adalah membentuk 3 kelompok yang masing-masing beranggota 2 orang. Banyaknya cara ada 5 x 3 x 1.
  Karena kemungkinan pasangan A ada 7, maka banyaknya cara dari 8 orang siswa akan dibentuk 4 kelompok yang masing-masing beranggota dua orang adalah 7 x 5 x 3 x 1 = 105 cara.
* Jika 10 orang siswa (misal A, B, C, D, E, F, G, H, I dan J) akan dibentuk menjadi 5 kelompok yang masing-masing beranggota 2 orang
  Pasangkan A dengan salah satu anggota lainnya. Maka sisanya adalah membentuk 4 kelompok yang masing-masing beranggota 2 orang. Banyaknya cara ada 7 x 5 x 3 x 1.
  Karena kemungkinan pasangan A ada 9, maka banyaknya cara dari 10 orang siswa akan dibentuk 5 kelompok yang masing-masing beranggota dua orang adalah 9 x 7 x 5 x 3 x 1 = 945 cara.

Alternatif 2 :

Pilih salah satu siswa. Banyaknya cara memasangkan siswa tersebut dengan siswa lain adalah ${}_9C_1$. Pilih salah satu siswa dari 8 siswa yang sisa. Banyaknya cara memasangkan siswa tersebut dengan siswa yang lain adalah ${}_7C_1$. Pilih salah satu siswa dari 6 siswa yang sisa. Banyaknya cara memasangkan siswa tersebut dengan siswa yang lain adalah ${}_5C_1$. Pilih salah satu siswa dari 4 siswa yang sisa. Banyaknya cara memasangkan siswa tersebut dengan siswa yang lain adalah ${}_3C_1$. Sisanya adalah 2 orang siswa yang tidak dapat dipilih lagi.
Banyaknya cara membentuk kelima kelompok adalah ${}_9C_1 \cdot {}_7C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot 1 = 945$.

∴ Banyaknya cara membentuk kelima kelompok tersebut adalah **945**

14. Misal f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = f(5) = k
Dibentuk persamaan polinomial :

$$g(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + c - k$$
$$g(x) = f(x) - k$$

Jelas bahwa g(1) = g(2) = g(3) = g(4) = g(5) = 0
Berarti bahwa 1; 2; 3; 4 dan 5 adalah akar-akar persamaan polinomial g(x) = 0.

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + c - k = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -\frac{B}{A} = -\frac{a}{1} = -a$$

Karena akar-akarnya adalah 1; 2; 3; 4 dan 5 maka :
1 + 2 + 3 + 4 + 5 = – a
∴ a = – **15**

15. $S = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2002^2}\right)\left(1-\frac{1}{2003^2}\right)$

$S = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2002}\right)\left(1+\frac{1}{2002}\right)\left(1-\frac{1}{2003}\right)\left(1+\frac{1}{2003}\right)$

$S = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}\right)\cdots\left(\frac{2002}{2001}\cdot\frac{2001}{2002}\right)\cdot\left(\frac{2003}{2002}\cdot\frac{2002}{2003}\right)\cdot\frac{2004}{2003}$

$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{2004}{2003}$

$\therefore \quad S = \frac{1002}{2003}$

16. Misalkan pada hari tersebut Iwan berbohong dan dengan berdasarkan perkataannya, pada hari sebelumnya Iwan harus berkata jujur. Akibatnya hari tersebut adalah Senin karena pada hari Minggu Iwan berkata jujur. Pada hari Senin Budi berkata jujur. Maka berdasarkan perkataannya berarti pada hari Minggu Budi berbohong. Hal tersebut kontradiksi karena pada hari Minggu Budi berkata jujur.

Misalkan pada hari tersebut Iwan berkata jujur dan dengan berdasarkan perkataannya, pada hari sebelumnya Iwan harus berkata bohong. Akibatnya hari tersebut adalah Kamis karena Rabu Iwan berbohong. Pada hari Kamis Budi berkata bohong. Maka berdasarkan perkataannya berarti pada hari Rabu Budi berkata jujur. Hal tersebut sesuai karena pada hari Rabu Budi berkata jujur.

$\therefore$ Percakapan tersebut terjadi pada hari **Kamis**

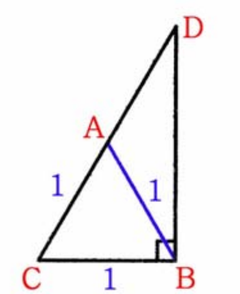
17. $\angle CBA = 60^o$ maka $\angle ABD = 30^o$

Jelas $\angle ACB = 60^o$, maka $\angle ADB = 90^o - \angle ACB = 30^o$

$\frac{BD}{\sin\angle BAD} = \frac{AB}{\sin\angle ADB}$, maka $\frac{BD}{\sin 120^\circ} = \frac{1}{\sin 30^\circ}$

$BD = \frac{\sin 120^\circ}{\sin 30^\circ}$

$\therefore$ BD = $\sqrt{3}$



18. Karena $\sqrt{81}$ = 9 dan $\sqrt{100}$ = 10 maka $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$ = 9 dipenuhi oleh 81 $\le$ x < 100

Karena $\sqrt{144}$ = 12 dan $\sqrt{169}$ = 13 maka $\lfloor\sqrt{y}\rfloor$ = 12 dipenuhi oleh 144 $\le$ y < 169

$\lfloor y - x \rfloor_{min} = \lfloor y_{min} - x_{maks} \rfloor = \lfloor 144 - 99{,}99\cdots \rfloor = \lfloor 44{,}00\cdots1 \rfloor$

$\therefore$ $\lfloor \mathbf{y - x} \rfloor_{\mathbf{min}}$ **= 44**

19. Nilai total = 3 · (5 + 3 + 2 + 1 + 1) = 36

Misal nilai pemenang = x. Maka nilai sisa = 36 – x

Agar x minimum maka nilai sisa harus terdistribusi merata kepada 4 pelari lain. Misal nilai masing-masing pelari lain = y

$x + 4y = 36$ dengan $x > y$. Maka $4x > 4y$

$4x > 36 - x$.

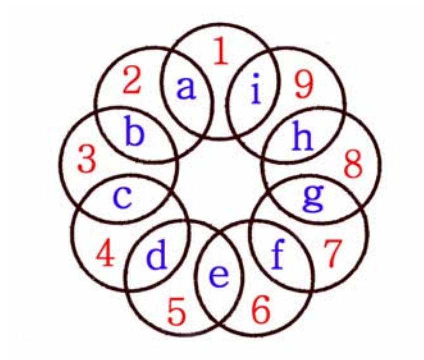
$5x > 36$

Jika x = 8 maka 4y = 28 sehingga y = 7.

Kombinasi nilai 7 adalah (5,1,1) ; (1,5,1) ; (3,1,3) ; (2,3,2). Karena masing-masing nilai 2, 3 dan 5 tidak lebih dari tiga kali dan nilai 1 tidak lebih dari 6 kali, maka kombinasi di atas memenuhi.

∴ Nilai minimum pemenang adalah **8**

20.



$1 \le a, b, c, d, e, f, g, h, i \le 9$

Karena a, b, c, d, e, f, g, h, i adalah bilangan bulat berbeda maka :

$a + b + c + d + e + f + g + h + i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$

Misal masing-masing lingkaran berjumlah k dan karena ada 9 lingkaran, maka :

$(a+1+i)+(b+2+a)+(c+3+b)+(d+4+c)+(e+5+d)+(f+6+e)+(g+7+f)+(h+8+g)+(i+9+h) = 9k$

$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) + 2\,(a + b + c + d + e + f + g + h + i) = 9k$

$45 + 2 \cdot 45 = 9k$

$k = 15$

Karena $a + 1 + i = 15$ maka $a + i = 14$

Kemungkinan nilai a dan i adalah : a = 5 dan i = 9 atau a = 9 dan i = 5 atau a = 6 dan i = 8 atau a = 8 dan i = 6.

Karena $i + 9 + h = 15$ maka $i + h = 6$

Kemungkinan nilai h dan i adalah : h = 1 dan i = 5 atau h = 5 dan i = 1 atau h = 2 dan i = 4 atau h = 4 dan i = 2.

Irisan dari kedua persamaan di atas didapat i = 5. Maka h = 1 dan a = 9

Karena $b + 2 + a = 15$ maka $b = 15 - 2 - 9 = 4$

Karena $c + 3 + b = 15$ maka $c = 15 - 3 - 4 = 8$

Karena $d + 4 + c = 15$ maka $d = 15 - 4 - 8 = 3$

Karena $e + 5 + d = 15$ maka $e = 15 - 5 - 3 = 7$

Karena $f + 6 + e = 15$ maka $f = 15 - 6 - 7 = 2$

Karena $g + 7 + f = 15$ maka $g = 15 - 7 - 2 = 6$

∴ $a + d + g = 9 + 3 + 6 =$ **18**

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2004

TINGKAT PROVINSI

Bidang Matematika

Bagian Pertama

Waktu : 90 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH UMUM
TAHUN 2003

OLIMPIADE MATEMATIKA
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2003

BAGIAN PERTAMA

1. Jika a dan b bilangan bulat ganjil dengan $a > b$, berapa banyakkah bilangan bulat genap di antara a dan b ?

2. Agung mendapatkan bahwa nilai rata-rata dari tiga ulangan matematika yang diikutinya adalah 81. Nilai ulangan pertama adalah 85. Nilai ulangan ketiga lebih rendah 4 dari nilai ulangan kedua. Berapakah nilai ulangan kedua Agung ?

3. Apakah himpunan jawab dari persamaan $|x + 2| + |3x| = 14$?

4. $\square - \frac{\square}{\square} \cdot \square$ Keempat bilangan 3, 5, 7 dan 8 akan diisikan ke dalam kotak-kotak di samping. Berapakah hasil terbesar yang dapat diperoleh ?

5. Misalkan x, y, z tiga bilangan asli berbeda. Faktor persekutuan terbesar ketiganya adalah 12, sedangkan kelipatannya persekutuan terkecil ketiganya adalah 840. Berapakah nilai terbesar bagi $x + y + z$?

6. Berapakah bilangan bulat positif k terkecil sehingga $\underbrace{20032003\cdots2003}_{k}$ habis dibagi 9 ?

7. Persamaan kuadrat $2x^2 - 2(2a + 1)x + a(a - 1) = 0$ mempunyai dua akar real x_1 dan x_2. Berapakah nilai a yang memenuhi persamaan kuadrat tersebut sehingga $x_1 < a < x_2$?

8. Dalam sebuah segitiga ABC siku-siku sama kaki, dibuat persegi PQRS sebagai berikut : Titik P pada sisi AB, titik Q pada sisi AC, sedangkan titik-titik R dan S pada sisi miring BC. Jika luas segitiga ABC adalah x, berapakah luas persegi PQRS ?

9. Upik melemparkan n dadu. Ia menghitung peluang terjadinya jumlah mata dadu sama dengan 6. Untuk n berapakah peluang tersebut paling besar ?

10. Suatu garis vertikal membagi segitiga dengan titik sudut (0,0), (1,1) dan (9,1) menjadi dua daerah dengan luas yang sama. Apakah persamaan garis tersebut ?

11. Misalkan m dan n dua bilangan asli yang memenuhi $m^2 - 2003 = n^2$. Berapakah mn ?

12. Berapakah nilai x yang memenuhi ${}^4\log ({}^2\log x) + {}^2\log ({}^4\log x) = 2$?

13. Titik P terletak di dalam persegi ABCD demikian rupa, sehingga AP : BP : CP = 1 : 2 : 3. Berapakah besar sudut APB ?

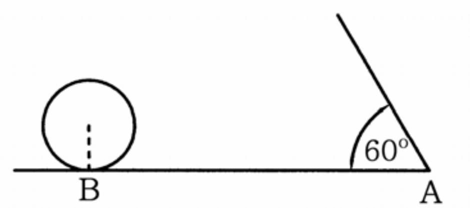
14. Dengan mengkombinasikan ketiga warna dasar merah, kuning, dan biru dapat dibentuk warna-warna yang lain. Misalkan terdapat 5 kaleng cat warna merah, 5 kaleng warna kuning, dan 5

kaleng warna biru. Budi boleh memilih kaleng manapun untuk mencampurkan warna, dan semua cat dalam sebuah kaleng harus dipakai semua. Ada berapa pilihan warna yang dihasilkan ?

15. Pak Oto membeli dua mobil untuk dijual kembali. Ia memperoleh keuntungan 30% dari mobil pertama, tetapi menderita kerugian 20% pada mobil kedua. Harga jual kedua mobil sama. Berapa persenkah keuntungan (atau kerugian) pak Oto secara keseluruhan ?
[Catatan : Semua persentase terhadap harga pembelian. Untuk jawaban, gunakan tanda '–' untuk menyatakan kerugian dan tanda '+' untuk menyatakan keuntungan.]

16. Empat pasang suami isteri menonton pagelaran orkestra. Tempat duduk mereka harus dipisah antara kelompok suami dan kelompok isteri. Untuk masing-masing kelompok disediakan 4 buah tempat duduk bersebelahan dalam satu barisan. Ada berapa banyak cara memberikan tempat duduk kepada mereka ?

17. Sebuah bola dengan jari-jari r ditendang dari B ke A. Bola tersebut menggelinding sebanyak tepat 10 putaran sebelum membentur bidang miring dan berhenti. Berapakah jarak dari B ke A ?



18. Berapakah sisa pembagian $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + 99 \cdot 99! + 100 \cdot 100!$ oleh 101 ?

19. Suatu lingkaran mempunyai diameter AB yang panjangnya merupakan bilangan bulat 2-angka. Tali busur CD tegak lurus pada AB dan memotong AB di titik H. Panjang CD sama dengan bilangan yang diperoleh dengan menukar letak kedua angka dari panjang AB. Jika jarak dari H ke pusat lingkaran merupakan bilangan rasional, berapakah panjang AB ?

20. Berapakah banyaknya cara memilih tiga bilangan berbeda sehingga tidak ada dua bilangan yang berurutan, jika bilangan-bilangan tersebut dipilih dari himpunan $\{1, 2, 3, \cdots, 9, 10\}$?

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2004

TINGKAT PROVINSI

Bidang Matematika

Bagian Kedua

Waktu : 120 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH UMUM
TAHUN 2003

OLIMPIADE MATEMATIKA
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2003

BAGIAN KEDUA

1. Andi, Beni, Coki, Doni dan Edo bermain kancil-serigala. Setiap anak menjadi kancil atau serigala, tetapi tidak kedua-duanya. Kancil selalu jujur, sementara serigala selalu berdusta.
   Andi berkata bahwa Beni adalah kancil. Coki berkata bahwa Doni adalah serigala. Edo berkata Andi bukan serigala. Beni berkata Coki bukan kancil. Doni berkata bahwa Edo dan Andi adalah binatang yang berbeda.
   Tentukan banyaknya serigala dalam permainan ini.

2. Tentukan semua bilangan bulat a dan b sehingga bilangan
   $$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}}$$
   merupakan bilangan rasional

3. Titik-titik P dan Q berturut-turut adalah titik tengah rusuk AE dan CG pada kubus ABCD.EFGH. Jika panjang rusuk kubus adalah 1 satuan, tentukan luas segi-empat DPFQ.

4. Buktikan bahwa $999! < 500^{999}$.
   [Catatan : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.]

5. Tiga buah titik terletak pada daerah yang dibatasi oleh sumbu y dan grafik persamaan $7x - 3y^2 + 21 = 0$. Buktikan bahwa sedikitnya dua di antara ketiga titik tersebut mempunyai jarak tidak lebih dari 4 satuan.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2004
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2003

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Bagian Pertama

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN PERTAMA

1. Banyaknya bilangan bulat antara a dan b adalah a − b − 1. Karena a dan b ganjil, maka banyaknya bilangan genap di antara a dan b lebih satu dari banyaknya bilangan ganjil di antara a dan b.

   Maka banyaknya bilangan bulat genap dirumuskan dengan $\frac{(a-b-1)+1}{2}$.

   ∴ Banyaknya bilangan genap di antara a dan b adalah $\frac{a-b}{2}$

2. Misal nilai ulangan ke-2 Agung = x, maka $\frac{(85)+(x)+(x-4)}{3} = 81$

   81 + 2x = 81 · 3. Maka x = 81

   ∴ Nilai ulangan Agung ke-2 = **81**

3. * Untuk x ≤ −2, maka |x + 2| = −x − 2 dan |3x| = −3x
   |x + 2| + |3x| = 14. Maka −x − 2 − 3x = 14 sehingga x = −4 (memenuhi bahwa x ≤ −2)
   * Untuk −2 ≤ x ≤ 0 maka |x + 2| = x + 2 dan |3x| = −3x
   |x + 2| + |3x| = 14. Maka x + 2 − 3x = 14 sehingga x = −6 (tidak memenuhi bahwa −2 ≤ x ≤ 0)
   * Untuk x ≥ 0 maka |x + 2| = x + 2 dan |3x| = 3x
   |x + 2| + |3x| = 14. Maka x + 2 + 3x = 14 sehingga x = 3 (memenuhi bahwa x ≥ 0)

   ∴ Himpunan jawab dari persamaan |x + 2| + |3x| = 14 adalah = **{ −4, 3}**

4. $$\boxed{N} = \boxed{A} - \frac{\boxed{B}}{\boxed{D}} \cdot \boxed{C}$$

   Teori : Agar T − M maksimal, maka T harus sebesar-besarnya dan M harus sekecil-lecilnya.
   Jika diinginkan N sebesar-besarnya, maka A dan D harus maksimal dengan A > D sedangkan B dan C harus minimum dan karena B · C = C · B, maka tidak ada pengaruh posisi B dan C.
   Berarti A = 8, B = 3, C = 5, D = 7 atau A = 8, B = 5, C = 3, D = 7

   ∴ $N = 8 - \frac{3}{7} \cdot 5 = \frac{41}{7}$

5. Karena faktor persekutuan terbesar dari x, y, z adalah 12, maka x, y, z akan berbentuk x = 12a, y = 12b dan z = 12c dengan a, b dan c adalah bilangan bulat FPB(a, b, c) = 1
   Dan karena 840 : 12 = 70, maka a, b dan c masing-masing harus faktor dari 70. Nilai a, b dan c harus diambil dari faktor-faktor 70 yaitu : 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35 dan 70.
   Karena diinginkan nilai x + y + z yang terbesar maka nilai a + b + c juga harus yang terbesar. Karena FPB (14, 35, 70), FPB (10, 35, 70), FPB (7, 35, 70), FPB (5, 35, 70) semuanya lebih dari 1 maka a, b dan c diambil dari 2, 35 dan 70 atau 10, 14, 35 dan karena 2 + 35 + 70 > 10 + 14 + 35 maka a, b dan c diambil dari 2, 35 dan 70.

   ∴ $(x + y + z)_{terbesar}$ = 12 · 2 + 12 · 35 + 12 · 70 = **1284**

6. Misal N = $\underbrace{20032003\cdots2003}_{k}$.

Agar N habis dibagi 9 maka jumlah digit N harus habis dibagi 9.
Karena 2 + 0 + 0 + 3 = 5 maka jumlah digit N = 5k.
∴ Bilangan bulat positif k terkecil yang memenuhi adalah **k = 9**

7. $x_{1,2} = \dfrac{4a + 2 \pm \sqrt{(4a+2)^2 - 4(2)(a^2 - a)}}{2 \cdot 2} = a + \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 6a + 1}$

* Akar-akarnya real berarti Disk ≥ 0. Maka Disk = $(4a + 2)^2 - 4(2)(a^2 - a) \geq 0$
$8a^2 + 24a + 4 \geq 0$
$2a^2 + 6a + 1 \geq 0$

$$a_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(2)(1)}}{2 \cdot 2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{7}$$

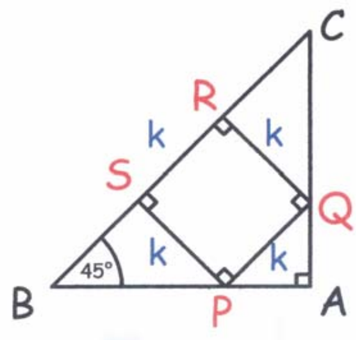
Nilai a yang memenuhi adalah $a \leq -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{7}$ atau $a \geq -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{7}$ .... (1)

* $a < x_2$. Maka $a < a + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 6a + 1}$ sehingga $\sqrt{2a^2 + 6a + 1} > -1$
Akar dari suatu bilangan bernilai positif sehingga semua nilai a memenuhi. .... (2)

* $a > x_1$. Maka $a > a + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 6a + 1}$ sehingga $\sqrt{2a^2 + 6a + 1} > 1$
$2a^2 + 6a + 1 > 1$
$2a(a + 3) > 0$
Nilai a yang memenuhi adalah $a < -3$ atau $a > 0$ .... (3)

Karena $\sqrt{7} < 3$ maka $-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{7} > -3$ dan $-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{7} < 0$.
Irisan dari ketiga penyelesaian untuk a adalah $a < -3$ atau $a > 0$
∴ Maka nilai a yang memenuhi adalah **a < –3 atau a > 0**

8.



Misal PQ = QR = RS = PS = k

$\angle ACB = \angle ABC = \angle APQ = \angle AQP = \angle BPS = \angle CQR = 45^o$

Maka BS = CR = k

BP = CQ = $k\sqrt{2}$

Luas ΔABC = $\frac{1}{2}(AB)(AC) = \frac{1}{2}\left(k\sqrt{2}+\frac{1}{2}k\sqrt{2}\right)\left(k\sqrt{2}+\frac{1}{2}k\sqrt{2}\right) = x$

$k^2 = \frac{4x}{9}$

$\therefore$ Luas persegi PQRS = $\frac{4x}{9}$

9. Karena nilai terkecil dadu = 1, maka n $\le$ 6.

* Untuk n = 1

Peluang terjadinya jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah $\frac{1}{6}$

* Untuk n = 2

Kejadian jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1) = 5

Peluang terjadinya jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah $\frac{5}{6^2} = \frac{5}{36} < \frac{1}{6}$

* Untuk n = 3

Kejadian jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah (1,1,4), (1,2,3), (1,3,2), (1,4,1), (2,1,3), (2,2,2), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1), (4,1,1) = 10

Peluang terjadinya jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah $\frac{10}{6^3} = \frac{10}{216} < \frac{5}{36} < \frac{1}{6}$

* Untuk n = 4

Kejadian jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah (1,1,1,3), (1,1,2,2), (1,1,3,1), (1,2,1,2), (1,2,2,1), (1,3,1,1), (2,1,1,2), (2,1,2,1), (2,2,1,1), (3,1,1,1) = 10

Peluang terjadinya jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah $\frac{10}{6^4} = \frac{10}{1296} < \frac{10}{216} < \frac{5}{36} < \frac{1}{6}$

* Untuk n = 5

Kejadian jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah (1,1,1,1,2), (1,1,1,2,1), (1,1,2,1,1), (1,2,1,1,1), (2,1,1,1,1) = 5

Peluang terjadinya jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah $\frac{5}{6^5} < \frac{10}{1296} < \frac{10}{216} < \frac{5}{36} < \frac{1}{6}$

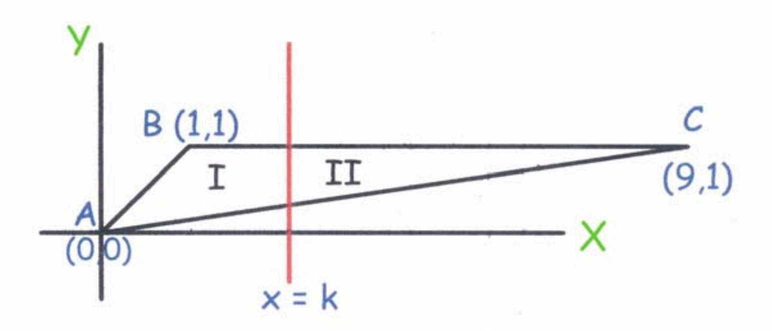
* Untuk n = 6

Kejadian jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah (1,1,1,1,1,1) = 1

Peluang jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah $\frac{1}{6^6} < \frac{5}{6^5} < \frac{10}{1296} < \frac{10}{216} < \frac{5}{36} < \frac{1}{6}$

$\therefore$ Peluang terbesar adalah jika n = **1**

10.



Misal persamaan garis vertikal tersebut adalah x = k

Luas ΔABC = ½ (9 − 1)(1 − 0) = 4

Persamaan garis melalui (0,0) dan (9,1) adalah y = $\frac{1}{9}$x

Untuk x = k maka y = $\frac{1}{9}$k

Luas Δ II = ½ Luas ΔABC

½ (9 − k)(1 − $\frac{1}{9}$k) = ½ · 4

9 − k = ± 6

k = 3 (memenuhi) atau k = 15 (tidak memenuhi bahwa $0 \le k \le 9$)

∴ Persamaan garis vertikal tersebut adalah **x = 3**

11. $m^2 - 2003 = n^2$

$m^2 - n^2 = 2003$

(m + n)(m − n) = 2003

2003 adalah bilangan prima sehingga persamaan dipenuhi hanya jika m + n = 2003 dan m − n = 1

Sehingga m = 1002 dan n = 1001

∴ mn = 1002 · 1001 = **1003002**

12. $^4\log\left(^2\log x\right) + {}^2\log\left(^4\log x\right) = 2$

$^2\log\left(^2\log x\right)^{1/2} + {}^2\log\left(^2\log \sqrt{x}\right) = 2$

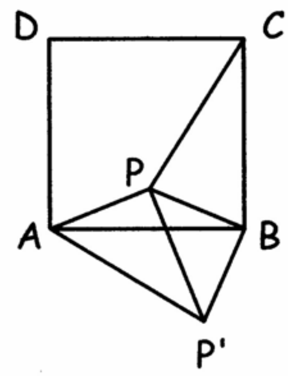
$\sqrt{^2\log x} \cdot \frac{1}{2} \cdot {}^2\log x = 2^2 = 4$

$\left(^2\log x\right)^{3/2} = 8$

x = 2^4

∴ **x = 16**

13.



Misalkan AP = a maka BP = 2a dan CP = 3a

Dengan berpusat di B, titik P diputar sejauh 90^o menjadi titik P'. maka ΔPBP' adalah segitiga siku-siku sama kaki.

$\angle$BPP' = 45^o dan PP' = $2a\sqrt{2}$

ΔBPC ≅ ΔAP'B sehingga AP' = 3a

$(AP')^2 = (AP)^2 + (PP')^2 - 2(AP)(PP')\cos \angle APP'$

$(3a)^2 = (a)^2 + (2a\sqrt{2})^2 - 2(a)(2a\sqrt{2})\cos \angle APP'$

$\cos \angle APP' = 0$

$\angle APP' = 90^o$

∴ $\angle APB = \angle APP' + \angle BPP' = 90^o + 45^o =$ **135^o**

14. * Jika terdapat sedikitnya satu warna yang tidak ikut dicampur
Salah satu perbandingan yang menghasilkan warna adalah 0:0:1. Karena ada 3 warna, maka akan ada 3 warna yang dihasilkan dari perbandingan ini. Perbandingan 0:0:2, 0:0:3, 0:0:4, 0:0:5 akan menghasilkan warna yang sama dengan perbandingan 0:0:1. Perbandingan lainnya yang memenuhi adalah 0:1:1, 0:1:2, 0:1:3, 0:1:4, 0:1:5, 0:2:3, 0:2:5, 0:3:4, 0:3:5, 0:4:5.
Banyaknya warna yang dihasilkan adalah 3 x 11 = 33.

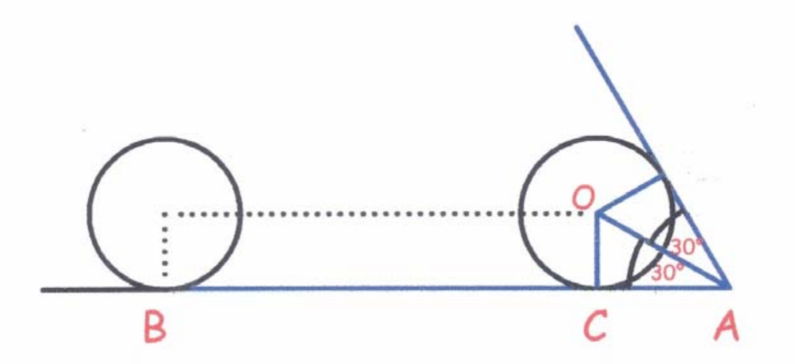
* Jika terdapat sedikitnya satu warna dengan tepat 1 kaleng warna tersebut yang dicampur
Kemungkinan perbandingannya adalah 1:1:1, 1:1:2, 1:1:3, 1:1:4, 1:1:5, 1:2:2, 1:2:3, 1:2:4, 1:2:5, 1:3:3, 1:3:4, 1:3:5, 1:4:4, 1:4:5, 1:5:5. Perbandingan 1:1:1 hanya ada 1 kemungkinan.
Banyaknya warna yang dihasilkan adalah 1 + 3 x 14 = 43.
* Jika terdapat sedikitnya satu warna dengan tepat 2 kaleng warna tersebut yang dicampur
Kemungkinan perbandingannya adalah 2:2:3, 2:2:5, 2:3:3, 2:3:4, 2:3:5, 2:4:5, 2:5:5. Perbandingan 2:2:2 akan menghasilkan warna yang sama dengan perbandingan 1:1:1. Hal yang hampir sama berhubungan dengan perbandingan 2:2:4 dan 2:4:4.
Banyaknya warna yang dihasilkan adalah 3 x 7 = 21.
* Jika terdapat sedikitnya satu warna dengan tepat 3 kaleng warna tersebut yang dicampur
Kemungkinan perbandingannya adalah 3:3:4, 3:3:5, 3:4:4, 3:4:5, 3:5:5.
Banyaknya warna yang dihasilkan adalah 3 x 5 = 15.
* Jika terdapat sedikitnya satu warna dengan tepat 4 kaleng warna tersebut yang dicampur
Kemungkinan perbandingannya adalah 4:4:5, 4:5:5.
Banyaknya warna yang dihasilkan adalah 3 x 2 = 6.

∴ Banyaknya warna keseluruhan yang dihasilkan adalah 33 + 43 + 21 + 15 + 6 = **118.**

15. Misal harga jual masing-masing mobil = p
    Misal harga pembelian mobil pertama = y_1
    $y_1 + 0{,}3y_1 = p$, maka $y_1 = \frac{10}{13}p$
    Misal harga pembelian mobil kedua = y_2
    $y_2 - 0{,}2y_2 = p$, maka $y_2 = \frac{5}{4}p$
    Harga pembelian total = $y_1 + y_2 = \frac{10}{13}p + \frac{5}{4}p = \frac{105}{52}p$
    Selisih = $2p - \frac{10}{13}p - \frac{5}{4}p = -\frac{1}{52}p$
    Kerugian Pak Oto = $\frac{-\frac{1}{52}p}{\frac{105}{52}p} \times 100\ \% = -\frac{100}{105}\ \%$
    ∴ Kerugian Pak Oto = $-\frac{20}{21}$ **%**

16. Banyaknya cara duduk masing-masing kelompok adalah sama dengan permutasi 4 obyek pada 4 tempat = ${}_4P_4 = 24$.
    Posisi duduk kelompok isteri dapat di sebelah kanan maupun di sebelah kiri kelompok suami.
    ∴ Banyaknya cara memberikan tempat duduk kepada mereka adalah = 2 · 24 · 24 = **1152 cara**.

17.

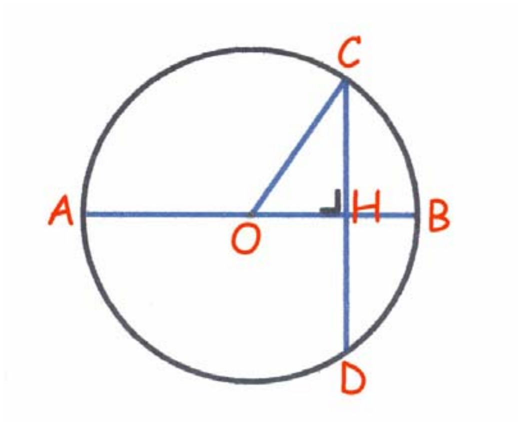


BC = 10 · 2πr = 20πr
CA = OC · cotg 30° = r√3
AB = BC + CA = 20πr + r√3

∴ Jarak dari B ke A = **(20π + √3)r**

18. Misal $P = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + 99 \cdot 99! + 100 \cdot 100!$
$T = 2 \cdot 1! + 3 \cdot 2! + 4 \cdot 3! + \cdots + 100 \cdot 99! + 101 \cdot 100! = 2! + 3! + 4! + \cdots + 100! + 101!$
$T - P = (2 - 1)\ 1! + (3 - 2)\ 2! + (4 - 3)\ 3! + \cdots + (100 - 99)\ 99! + (101 - 100)\ 100!$
$T - P = 1! + 2! + 3! + \cdots + 99! + 100!$
$2! + 3! + 4! + \cdots + 100! + 101! - P = 1! + 2! + 3! + \cdots + 99! + 100!$
$P = 101! - 1! = 101! - 1$
101! adalah bilangan yang habis dibagi 101, maka $P = 101! - 1 = 101k + 101 - 1 = 101k + 100$
$\therefore$ $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + 99 \cdot 99! + 100 \cdot 100!$ dibagi 101 akan bersisa **100**

19.



Misal panjang AB = 10a + b
OC = ½ AB = ½ (10a + b)
Panjang CD = 10b + a
CH = ½ (10b + a)
Dengan a dan b adalah bilangan bulat positif dan $0 < a \le 9$, $0 < b \le 9$

$$OH = \sqrt{(OC)^2 - (CH)^2}$$

$$OH = \frac{1}{2}\sqrt{(10a + b)^2 - (10b + a)^2}$$

$$OH = \frac{3}{2}\sqrt{11(a + b)(a - b)}$$

Karena OH adalah bilangan rasional dan $a + b > a - b$ maka :
$a + b = 11k$ dan $a - b = km^2$ dengan k dan m adalah bilangan asli sebab a dan b asli.
Karena $a + b \le 18$ maka $11k \le 18$ sehingga nilai k yang memenuhi hanya jika k = 1.
Maka $a - b = m^2$. Karena $a - b < 9$ maka nilai m^2 yang mungkin hanya 1 atau 4.
Jika $a + b = 11$ dan $a - b = 4$ maka tidak mungkin didapat a dan b asli.
Jika $a + b = 11$ dan $a - b = 1$ maka nilai a dan b yang memenuhi hanya jika a = 6 dan b = 5.
$\therefore$ Panjang AB = **65**

20. Misal H = {1, 2, 3, ⋯, 9, 10}

Alternatif 1 :

* Banyaknya 2 bilangan berurutan dari himpunan H ada 9 yaitu : (1,2), (2,3), (3,4), ⋯, (9,10)
* Menentukan 3 bilangan dari H yang 2 berurutan namun ketiganya tidak berurutan :
  Untuk (1,2) hanya ada satu bilangan ketiga yang akan membuat ketiga bilangan tersebut berurutan, yaitu 3. Maka banyaknya cara 3 bilangan diambil dari himpunan H yang 2 bilangannya adalah (1,2) namun bilangan ketiga bukan 3 ada 7, yaitu : (1,2,4), (1,2,5), ⋯, (1,2,10). Banyaknya cara ini juga sama dengan 2 bilangan di antaranya adalah (9,10)
  Untuk (2,3) ada dua bilangan ketiga yang akan membuat ketiga bilangan tersebut berurutan, yaitu 1 dan 4. Maka banyaknya cara 3 bilangan diambil dari himpunan H yang 2 bilangannya adalah (2,3) namun bilangan ketiga bukan 1 atau 4 ada 6, yaitu : (2,3,5), (2,3,6), ⋯, (2,3,10). Banyaknya cara ini juga sama dengan 2 bilangan di antaranya adalah (3,4), (4,5), ⋯, (8,9).
  Banyaknya cara 3 bilangan diambil dari himpunan H yang 2 di antaranya berurutan namun ketiga bilangan tersebut tidak berurutan adalah = $2 \cdot 7 + 7 \cdot 6 = 56$.
* Banyaknya cara 3 bilangan diambil dari himpunan H yang ketiganya berurutan = 8, yaitu : (1,2,3), (2,3,4), (3,4,5), ⋯, (7,8,9), (8,9,10).
* Banyaknya cara 3 bilangan diambil dari himpunan H = ${}_{10}C_3 = 120$.

∴ Banyaknya cara memilih 3 bilangan berbeda dari himpunan H sehingga tidak ada 2 bilangan berurutan = 120 − 56 − 8 = **56**.

Alternatif 2 :

Jika (a, b, c) adalah 3 bilangan dari H yang memenuhi bahwa tidak ada 2 bilangan di antaranya yang berurutan maka (a, b − 1, c − 2) haruslah merupakan 3 bilangan yang berbeda dan merupakan elemen dari himpunan {1, 2, 3, ⋯, 7, 8}.

Banyaknya cara memilih 3 bilangan dari himpunan {1, 2, 3, ⋯, 7, 8} adalah ${}_{8}C_3 = 56$

∴ Banyaknya cara memilih 3 bilangan berbeda dari himpunan H sehingga tidak ada 2 bilangan berurutan = **56**.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2004

TINGKAT PROVINSI TAHUN 2003

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Bagian Kedua

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN KEDUA

1. Pernyataan-pernyataan :
   a. Andi berkata bahwa Beni adalah kancil
   b. Coki berkata bahwa Doni adalah serigala
   c. Edo berkata Andi bukan serigala
   d. Beni berkata Coki bukan kancil
   e. Doni berkata bahwa Edo dan Andi adalah binatang berbeda

   - Misalkan Andi adalah kancil.
     Berdasarkan (a) maka Beni adalah kancil.
     Berdasarkan (d) maka Coki adalah serigala.
     Berdasarkan (b) maka Doni adalah kancil.
     Berdasarkan (e) karena Andi kancil maka Edo adalah serigala.
     Berdasarkan (c) maka Andi adalah serigala. Pernyataan ini kontradiksi dengan permisalan bahwa Andi adalah kancil.

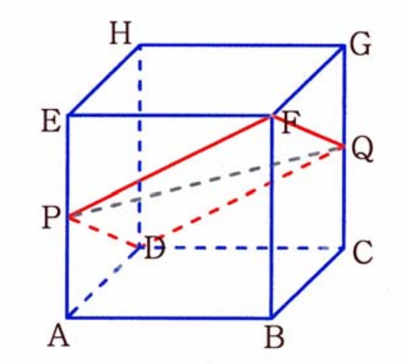
   - Misalkan Andi adalah serigala.
     Berdasarkan (a) maka Beni adalah serigala.
     Berdasarkan (d) maka Coki adalah kancil.
     Berdasarkan (b) maka Doni adalah serigala.
     Berdasarkan (e) maka Edo dan Andi sejenis. Karena Andi serigala maka Edo juga serigala.
     Berdasarkan (c) maka Andi adalah serigala yang berarti sesuai dengan permisalan bahwa Andi adalah kancil.

   Yang termasuk kancil adalah Coki dan yang termasuk serigala adalah Andi, Beni, Doni dan Edo.

   $\therefore$ **Banyaknya serigala ada** 4

2. Karena $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}}$ adalah bilangan rasional maka $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}} = \frac{p}{q}$ dengan a, b, p dan q adalah bilangan asli dan q $\neq$ 0 serta p dan q relatif prima.
   $q\sqrt{2} + q\sqrt{a} = p\sqrt{3} + p\sqrt{b}$, maka $\left(q\sqrt{2} - p\sqrt{3}\right)^2 = \left(p\sqrt{b} - q\sqrt{a}\right)^2$
   $2q^2 + 3p^2 - 2pq\sqrt{6} = p^2b + q^2a - 2pq\sqrt{ab}$
   Karena a, b, p dan q adalah bilangan asli maka 6 = ab. Pasangan (a, b) yang memenuhi adalah (1,6) ; (2,3) ; (3,2) ; (6,1). Subtitusikan keempat pasangan ini ke persamaan semula untuk dicek apakah memenuhi bilangan rasional atau tidak. Setelah dicek maka pasangan (a,b) yang akan membuat persamaan semula merupakan bilangan rasional adalah (3,2).
   $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = 1$
   $\therefore$ **a = 3 dan b = 2**

3.



Karena bidang ADHE sejajar dengan BCGF dan bidang ABFE sejajar dengan bidang DCGH maka DP sejajar FQ dan FP sejajar DQ.

$$PF = DP = DQ = FQ = \sqrt{(1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

PQ sejajar AC maka PQ = AC = $\sqrt{2}$

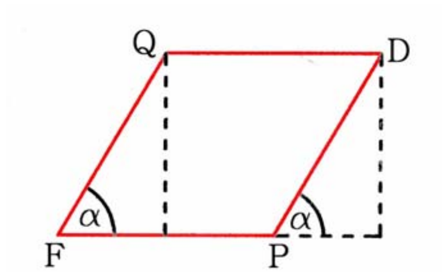
Alternatif 1 :

Mencari sudut PFQ. Misal $\angle PFQ = \alpha$

$$(PQ)^2 = (PF)^2 + (FQ)^2 - 2(PF)(FQ)\cos\alpha$$

$$2 = \frac{5}{4} + \frac{5}{4} - 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)\cos\alpha$$

$\cos\alpha = \frac{1}{5}$ sehingga $\sin\alpha = \frac{2}{5}\sqrt{6}$



Luas segi empat DPFQ = (FP)(PD)sin α

Luas segi empat DPFQ = $\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)\left(\frac{2}{5}\sqrt{6}\right)$

$\therefore$ Luas segi empat DPFQ = $\frac{1}{2}\sqrt{6}$

Alternatif 2 :

Karena PF = DP = DQ = FQ maka segiempat DPFQ adalah belah ketupat. Diagonal PQ = $\sqrt{2}$ sedangkan diagonal DF adalah diagonal ruang maka FD = $\sqrt{3}$.

Luas segiempat DPFQ = ½ · PQ · FD = ½ · $\sqrt{2}$ · $\sqrt{3}$

$\therefore$ Luas segi empat DPFQ = $\frac{1}{2}\sqrt{6}$

4. Rataan Geometri ≤ Rataan Aritmatika

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_{n-1} \cdot a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n}{n}$$

Tanda kesamaan berlaku jika $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_{n-1} = a_n$. Maka :

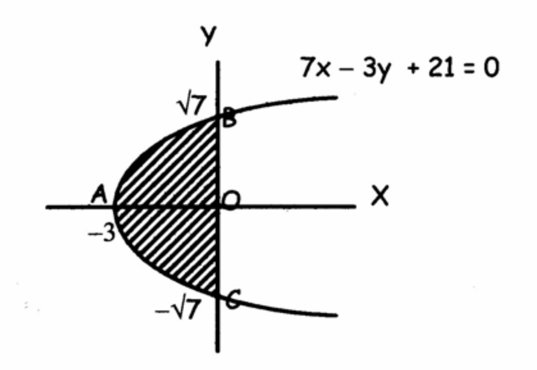
$$\sqrt[999]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 998 \cdot 999} < \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + 998 + 999}{999}$$

$$\sqrt[999]{999!} < \frac{1}{999} \cdot \frac{999}{2}(1 + 999)$$

$$\sqrt[999]{999!} < 500$$

∴ **Terbukti bahwa $999! < 500^{999}$**

5. $7x - 3y^2 + 21 = 0$. Maka $x = \frac{3}{7}\left(y + \sqrt{7}\right)\left(y - \sqrt{7}\right)$ yang merupakan suatu persamaan parabola dengan puncak di (−3,0) dan titik potong dengan sumbu Y di (0,√7) dan (0,−√7). Tampak bahwa ada 2 daerah. Satu daerah di atas sumbu X dan satu daerah lagi di bawah sumbu X.



Jarak AB = $\sqrt{(-3-0)^2 + \left(0 - \sqrt{7}\right)^2} = 4$

Jarak AC = $\sqrt{(-3-0)^2 + \left(0 - (-\sqrt{7})\right)^2} = 4$

Untuk $0 \le y \le \sqrt{7}$, tampak bahwa jarak terjauh 2 titik terjadi jika kedua titik tersebut di A dan B dengan jarak AB = 4.

Untuk $-\sqrt{7} \le y \le 0$, tampak bahwa jarak terjauh 2 titik terjadi jika kedua titik tersebut di A dan C dengan jarak AC = 4.

Karena ada 3 buah titik dan ada 2 daerah maka sesuai *Pigeon Hole Principle* (PHP) maka sedikitnya ada 2 titik dalam satu daerah yaitu memiliki ordinat $0 \le y \le \sqrt{7}$ atau $-\sqrt{7} \le y \le 0$.

∴ **Dari penjelasan di atas dapat disimpulkan bahwa jika 3 titik terletak pada daerah yang dibatasi oleh sumbu Y dan grafik persamaan $7x - 3y^2 + 21 = 0$, maka sedikitnya 2 titik di antara ketiga titik tersebut mempunyai jarak tidak lebih dari 4 satuan.**

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2004

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2003

BALIK PAPAN (KALIMANTAN TIMUR), 15 – 19 SEPTEMBER 2003

Bidang Matematika

Hari Pertama

Waktu : 180 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH UMUM
TAHUN 2003

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2003
15 – 19 SEPTEMBER 2003
BALIK PAPAN, KALIMANTAN TIMUR

BIDANG : MATEMATIKA

HARI PERTAMA

WAKTU : 180 MENIT

1. Buktikan bahwa $a^9 - a$ habis dibagi 6, untuk setiap bilangan bulat a.

2. Diberikan sebuah segiempat ABCD sebarang. Misalkan P, Q, R, S berturut-turut adalah titik-titik tengah AB, BC, CD, DA. Misalkan pula PR dan QS berpotongan di O. Buktikan bahwa PO = OR dan QO = OS.

3. Tentukan semua solusi bilangan real persamaan $\lfloor x^2 \rfloor + \lceil x^2 \rceil = 2003$.
   [**Catatan** : Untuk sebarang bilangan real α, notasi $\lfloor \alpha \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan α, sedangkan $\lceil \alpha \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan α.]

4. Diberikan sebuah matriks berukuran 19 x 19, yang setiap komponennya bernilai +1 atau –1. Misalkan pula b_i adalah hasil kali semua komponen matriks di baris ke-i, dan k_j adalah hasil kali semua komponen matriks di kolom ke-j.
   Buktikan bahwa $b_1 + k_1 + b_2 + k_2 + \cdots + b_{19} + k_{19} \neq 0$.

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2004

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2003

BALIK PAPAN (KALIMANTAN TIMUR), 15 – 19 SEPTEMBER 2003

Bidang Matematika

Hari Kedua

Waktu : 180 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH UMUM
TAHUN 2003

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2003
15 – 19 SEPTEMBER 2003
BALIK PAPAN, KALIMANTAN TIMUR

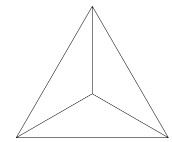
BIDANG : MATEMATIKA

HARI KEDUA

WAKTU : 180 MENIT

5. Untuk sebarang bilangan real a, b, c buktikan ketaksamaan
$$5a^2 + 5b^2 + 5c^2 \geq 4ab + 4ac + 4bc$$
dan tentukan kapan kesamaan berlaku.

6. Balairung sebuah istana berbentuk segi-6 beraturan dengan panjang sisi 6 meter. Lantai balairung tersebut ditutupi dengan ubin-ubin keramik berbentuk segitiga samasisi dengan panjang sisi 50 cm. Setiap ubin keramik dibagi ke dalam 3 daerah segitiga yang kongruen, lihat gambar. Setiap daerah segitiga diberi satu warna tertentu sehingga setiap ubin memiliki tiga warna berbeda. Raja menginginkan agar tidak ada dua ubin yang memiliki pola warna sama. Paling sedikit berapa warna yang diperlukan ?



7. Misalkan k, m, n adalah bilangan-bilangan asli demikian, sehingga $k > n > 1$ dan faktor persekutuan terbesar k dan n sama dengan 1. Buktikan bahwa jika $k - n$ membagi $k^m - n^{m-1}$, maka $k \leq 2n - 1$.

8. Diketahui segitiga ABC siku-siku di C dengan panjang sisi-sisinya merupakan bilangan bulat. Tentukan panjang sisi-sisi segitiga tersebut jika hasil kali dari dua sisi yang bukan sisi miring sama dengan tiga kali keliling segitiga.

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2004

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2003

BALIK PAPAN (KALIMANTAN TIMUR), 15 – 19 SEPTEMBER 2003

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

1. Alternatif 1 :

$a^9 - a = a(a^8 - 1)$

$a^9 - a = a(a^4 - 1)(a^4 + 1)$

$a^9 - a = a(a^2 - 1)(a^2 + 1)(a^4 + 1)$

$a^9 - a = (a - 1)a(a + 1)(a^2 + 1)(a^4 + 1)$

Karena $(a - 1)a(a + 1)$ adalah perkalian tiga bilangan bulat berurutan maka $a^9 - a$ habis dibagi $3! = 6$.

Alternatif 2 :

Sebuah bilangan bulat pasti akan memenuhi bahwa ia ganjil atau genap .

* Jika a genap maka a^9 adalah genap
  Maka $a^9 - a$ adalah selisih antara dua bilangan genap sehingga $a^9 - a$ genap
* Jika a ganjil maka a^9 adalah ganjil
  Maka $a^9 - a$ adalah selisih antara dua bilangan ganjil sehingga $a^9 - a$ genap

Karena $a^9 - a$ genap maka berarti $a^9 - a$ habis dibagi 2.

Akan dibuktikan bahwa $a^9 - a$ juga habis dibagi 3.

Alternatif 2. a :

Sebuah bilangan bulat akan memenuhi salah satu bentuk dari 3k, 3k + 1 atau 3k + 2

* Jika $a = 3k \equiv 0 \pmod 3$
  $a^9 - a = 3^9k^9 - 3k = 3(3^8k^9 - k)$ yang berarti $a^9 - a$ habis dibagi 3
  Penulisan lain. $a^9 - a \equiv 0^9 - 0 \pmod 3 \equiv 0 \pmod 3$ yang berarti $a^9 - a$ habis dibagi 3.
* Jika $a = 3k + 1 \equiv 1 \pmod 3$
  $a^9 - a = (3k + 1)^9 - (3k + 1) = 3^9k^9 + {}_9C_1\, 3^8k^8 + {}_9C_2\, 3^7k^7 + \cdots + {}_9C_7\, 3^2k^2 + {}_9C_8\, 3k + 1 - (3k + 1)$
  $a^9 - a = 3^9k^9 + {}_9C_1\, 3^8k^8 + {}_9C_2\, 3^7k^7 + \cdots + {}_9C_7\, 3^2k^2 + 24k = 3p$
  Penulisan lain. $a^9 - a \equiv 1^9 - 1 \pmod 3 \equiv 0 \pmod 3$ yang berarti $a^9 - a$ habis dibagi 3.
  $a^9 - a$ habis dibagi 3
* Jika $a = 3k + 2 \equiv -1 \pmod 3$
  $a^9 - a = (3k + 2)^9 - (3k + 2)$
  $a^9 - a = 3^9\, k^9 + {}_9C_1\, 3^8\, 2^1\, k^8 + {}_9C_2\, 3^7\, 2^2\, k^7 + \cdots + {}_9C_7\, 3^2\, 2^7\, k^2 + {}_9C_8\, 3k\, 2^8 + 1 - (3k + 2)$
  $a^9 - a = 3^9\, k^9 + {}_9C_1\, 3^8\, 2^1\, k^8 + {}_9C_2\, 3^7\, 2^2\, k^7 + \cdots + {}_9C_7\, 3^2\, 2^7\, k^2 + {}_9C_8\, 3k\, 2^8 + 2^9 - (3k + 2)$
  ${}_9C_8\, 3k\, 2^8 - 3k = 3k({}_9C_8 \cdot 2^8 - 1)$ yang berati habis dibagi 3
  $2^9 - 2 = 512 - 2 = 510$ habis dibagi 3.
  Penulisan lain. $a^9 - a \equiv (-1)^9 - (-1) \pmod 3 \equiv 0 \pmod 3$ yang berarti $a^9 - a$ habis dibagi 3.
  $a^9 - a$ habis dibagi 3

Dapat disimpulkan bahwa $a^9 - a$ habis dibagi 3.

Alternatif 2. b :

Teorema Fermat : Untuk a bilangan bulat dan p prima maka $a^p - a$ habis dibagi p. Penulisan dalam bentuk lain adalah $a^p - a \equiv 0 \pmod p$ atau bisa juga $a^p \equiv a \pmod p$

Berdasarkan teorema Fermat maka $a^3 - a$ habis dibagi 3 dan $(a^3)^3 - a^3$ juga habis dibagi 3.

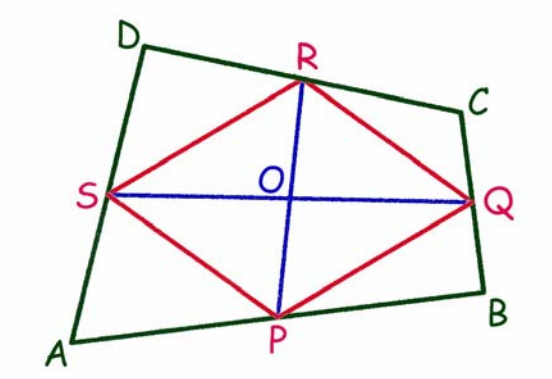
Maka $(a^3)^3 - a^3 + a^3 - a$ harus habis dibagi 3.

Karena $(a^3)^3 - a^3 + a^3 - a = a^9 - a$ maka $a^9 - a$ habis dibagi 3.

Karena 2 dan 3 relatif prima maka $a^9 - a$ habis dibagi $2 \cdot 3 = 6$

$\therefore$ **Terbukti bahwa $a^9 - a$ habis dibagi 6 untuk setiap bilangan bulat a**

2.



Alternatif 1 :

Dengan cara vektor :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = 0$

$\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DR} = 0{,}5\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right) = -0{,}5\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD}\right) = 0{,}5\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = 0{,}5\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$

Karena $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{PQ}$ maka ruas garis SR dan PQ sejajar dan sama panjang.

$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CR} = 0{,}5\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right)$

$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AS} = 0{,}5\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right) = -0{,}5\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}\right) = 0{,}5\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right)$

Karena $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PS}$ maka ruas garis QR dan PS sejajar dan sama panjang.

Akibatnya segiempat PQRS adalah jajaran genjang.

Karena $\angle$SOP = $\angle$QOR dan PS sejajar serta sama panjang dengan QR maka ΔSOP kongruen dengan ΔQOR yang berakibat QO = OS dan PO = OR

Alternatif 2 :

Pada ΔABC dan ΔPBQ berlaku $\angle$ABC = $\angle$PBQ serta $\frac{AB}{PA}$ = 2 dan $\frac{CB}{QB}$ = 2 yang berarti ΔABC dan ΔPBQ sebangun. Maka AC sejajar PQ dan $\frac{AC}{PQ}$ = 2.

Pada ΔADC dan ΔSDR berlaku $\angle$ADC = $\angle$SDR serta $\frac{AD}{SD}$ = 2 dan $\frac{CD}{RD}$ = 2 yang berarti ΔADC dan ΔSDR sebangun. Maka AC sejajar SR dan $\frac{AC}{SR}$ = 2 sehingga SR sejajar PQ dan SR = PQ.

Karena SR $\parallel$ PQ maka $\angle$SRP = $\angle$QPR dan $\angle$RSQ = $\angle$PQS dan karena SR = PQ maka ΔSOP kongruen dengan ΔQOR yang berakibat QO = OS dan PO = OR

Alternatif 3 :

PQRS adalah sebuah jajaran genjang (Varignon Parallelogram)

Menurut sifat jajaran genjang, diagonalnya saling membagi dua sama panjang.

$\therefore$ **Terbukti bahwa PO = OR dan QO = OS**

3. * Untuk $x^2 \le 1001$ maka $\lfloor x^2 \rfloor \le 1001$ dan $\lceil x^2 \rceil \le 1001$ sehingga $\lfloor x^2 \rfloor + \lceil x^2 \rceil \le 2002$
   * Untuk $x^2 \ge 1002$ maka $\lfloor x^2 \rfloor \ge 1002$ dan $\lceil x^2 \rceil \ge 1002$ sehingga $\lfloor x^2 \rfloor + \lceil x^2 \rceil \ge 2004$
   * Untuk $1001 < x^2 < 1002$ maka $\lfloor x^2 \rfloor = 1001$ dan $\lceil x^2 \rceil = 1002$ sehingga $\lfloor x^2 \rfloor + \lceil x^2 \rceil = 2003$

   Maka persamaan $\lfloor x^2 \rfloor + \lceil x^2 \rceil = 2003$ hanya dipenuhi oleh $1001 < x^2 < 1002$

   $\therefore$ $\lfloor x^2 \rfloor + \lceil x^2 \rceil = 2003$ hanya dipenuhi oleh $\sqrt{1001} < x < \sqrt{1002}$ atau $-\sqrt{1002} < x < -\sqrt{1001}$

4. Karena komponen-komponen matriks bernilai +1 atau −1 maka b_i dan k_i masing-masing juga akan bernilai +1 atau −1.

   Alternatif 1 :

   Andaikan bahwa $b_1 + k_1 + b_2 + k_2 + \cdots + b_{19} + k_{19} = 0$

   Maka harus ada 19 di antara $b_1, k_1, b_2, k_2, \cdots, b_{19}, k_{19}$ yang bernilai −1. Kemungkinannya adalah :

   - Ada p genap di antara $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_{19}$ yang bernilai −1 dan ada (19 − p) ganjil di antara $k_1, k_2, k_3, \cdots, k_{19}$ yang bernilai −1.
     Berdasarkan fakta bahwa ada p genap di antara $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_{19}$ yang bernilai −1 maka di antara 19 x 19 komponen harus ada komponen bertanda −1 sebanyak (ganjil · p + genap · ganjil) = genap
     Berdasarkan fakta bahwa ada (19 − p) ganjil di antara $k_1, k_2, k_3, \cdots, k_{19}$ yang bernilai −1 maka di antara 19 x 19 komponen harus ada sebanyak (ganjil · (19 − p) + genap · genap) = ganjil komponen bertanda −1. Hal ini bertentangan dengan kenyataan sebelumnya bahwa komponen bertanda −1 harus ada sebanyak genap.
     Maka tidak mungkin bahwa ada p genap di antara $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_{19}$ yang bernilai −1 dan ada (19 − p) ganjil di antara $k_1, k_2, k_3, \cdots, k_{19}$ yang bernilai −1.
   - Ada q ganjil di antara $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_{19}$ yang bernilai −1 dan ada (19 − q) genap di antara $k_1, k_2, k_3, \cdots, k_{19}$ yang bernilai −1.
     Berdasarkan fakta bahwa ada q ganjil di antara $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_{19}$ yang bernilai −1 maka di antara 19 x 19 komponen harus ada komponen bertanda −1 sebanyak (ganjil · q + genap · genap) = ganjil
     Berdasarkan fakta bahwa ada (19 − q) genap di antara $k_1, k_2, k_3, \cdots, k_{19}$ yang bernilai −1 maka di antara 19 x 19 komponen harus ada sebanyak (ganjil · (19 − q) + genap · ganjil) = genap komponen bertanda −1. Hal ini bertentangan dengan kenyataan sebelumnya bahwa komponen bertanda −1 harus ada sebanyak ganjil.
     Maka tidak mungkin bahwa ada q ganjil di antara $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_{19}$ yang bernilai −1 dan ada (19 − q) genap di antara $k_1, k_2, k_3, \cdots, k_{19}$ yang bernilai −1.

   Alternatif 2 :

   Pada matriks berlaku $b_1b_2b_3\cdots b_{19} = k_1k_2k_3\cdots k_{19}$ ······················ (1)

   Andaikan bahwa $b_1 + k_1 + b_2 + k_2 + \cdots + b_{19} + k_{19} = 0$ ································ (2)

   Karena b_i dan k_j bernilai +1 atau −1 Maka harus ada 19 di antara $b_1, k_1, b_2, k_2, \cdots, b_{19}, k_{19}$ yang bernilai −1.

   Jika di antara b_i ada terdapat sebanyak n buah yang bertanda −1 maka harus ada sebanyak (19−n) di antara k_i yang bertanda −1. Tetapi n dan (19−n) berbeda paritasnya (salah satunya ganjil dan satunya lagi genap), sehingga persamaan (1) tidak mungkin dapat dipenuhi. Akibatnya tidak mungkin $b_1 + k_1 + b_2 + k_2 + \cdots + b_{19} + k_{19} = 0$

   $\therefore$ **Terbukti $b_1 + k_1 + b_2 + k_2 + \cdots + b_{19} + k_{19} \ne 0$**

5. Alternatif 1 :
$(a - b)^2 \geq 0$. Maka $a^2 + b^2 \geq 2ab$
Pertidaksamaan di atas dapat diperoleh pula dari pertidaksamaan AM-GM
$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2}$ sehingga $a^2 + b^2 \geq 2ab$ .... (1)
Kesamaan terjadi bila a = b
Berdasarkan persamaan (1) didapat :
$a^2 + c^2 \geq 2ac$ .... (2)
$b^2 + c^2 \geq 2bc$ .... (3)
Jumlahkan persamaan (1), (2) dan (3)
$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ sehingga $4a^2 + 4b^2 + 4c^2 \geq 4ab + 4ac + 4bc$ .... (4)
Bilangan kuadrat bernilai ≥ 0 maka :
$a^2 + b^2 + c^2 \geq 0$ .... (5)
Kesamaan terjadi hanya jika a = 0, b = 0 dan c = 0
Jumlahkan persamaan (4) + (5) sehingga $5a^2 + 5b^2 + 5c^2 \geq 4ab + 4ac + 4bc$
Kesamaan terjadi hanya jika a = b = c = 0
∴ **Terbukti bahwa $5a^2 + 5b^2 + 5c^2 \geq 4ab + 4ac + 4bc$**

Alternatif 2 :
$(2a - b)^2 \geq 0$
Tanda kesamaan terjadi jika 2a = b.
$4a^2 + b^2 \geq 4ab$ .... (6)
Dengan cara yang sama didapat
$4b^2 + c^2 \geq 4bc$ .... (7)
$4c^2 + a^2 \geq 4ac$ .... (8)
Tambahkan persamaan (6), (7) dan (8) didapat
$5a^2 + 5b^2 + 5c^2 \geq 4ab + 4ac + 4bc$
Tanda kesamaan terjadi jika 2a = b, 2b = c dan 2c = a yang terpenuhi hanya jika a = b = c = 0
∴ **Terbukti bahwa $5a^2 + 5b^2 + 5c^2 \geq 4ab + 4ac + 4bc$**

6. Segienam beraturan dibuat dari 6 buah segitiga sama sisi yang kongruen.
Luas lantai balairung = $6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin 60^o = 108 \sin 60^o$
Luas 1 buah ubin = $\frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot \sin 60^o$
Luas lantai balairung : Luas 1 buah ubin = $8 \cdot 108 = 864$
Maka untuk menutupi lantai balairung dibutuhkan 864 buah ubin
Jika ada n buah warna maka banyaknya pola yang dapat dibuat = $({}_nC_3) \cdot (3 - 1)! =$
$\frac{n(n-1)(n-2)}{3}$
$\frac{n(n-1)(n-2)}{3} \geq 864$
$n(n - 1)(n - 2) \geq 2592$
Untuk n = 14 maka $n(n - 1)(n - 2) = 2184 < 2592$
Untuk n = 15 maka $n(n - 1)(n - 2) = 2730 > 2592$
∴ **Banyaknya warna minimum yang diperlukan adalah 15 buah**

7. $k - n \mid k^m - n^{m-1}$
   $k - n \mid k^m - n^m + n^m - n^{m-1}$
   $k - n \mid k^m - n^m + n^{m-1}(n - 1)$
   Untuk m $\in$ bilangan asli maka $k - n$ membagi $k^m - n^m$.
   Karena FPB (k,n) = 1 maka FPB($k - n$, n^{m-1}) = 1. Akibatnya $k - n$ harus membagi $n - 1$.
   Karena $k - n$ membagi $n - 1$ maka $k - n \le n - 1$
   $k \le 2n - 1$
   $\therefore$ **Terbukti bahwa $k \le 2n - 1$**

8. Misalkan sisi-sisi segitiga tersebut adalah a, b dan c dengan c adalah sisi miring, maka :
   $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ .... (1)
   ab = 3(a + b + c) .... (2)
   Karena a, b dan c adalah bilangan bulat maka sekurang-kurangnya salah satu di antara a atau b adalah kelipatan 3.
   Tanpa mengurangi keumuman misalkan a = 3k dengan k $\in$ bilangan asli (sama saja jika dimisalkan b = 3k) maka :
   $3k\sqrt{c^2 - 9k^2} = 3(3k + \sqrt{c^2 - 9k^2} + c)$
   $k\sqrt{c^2 - 9k^2} = (3k + \sqrt{c^2 - 9k^2} + c)$
   $(k-1)\sqrt{c^2 - 9k^2} = c + 3k$
   $(k-1)^2(c+3k)(c-3k) = (c+3k)^2$
   $(k-1)^2(c-3k) = (c+3k)$
   $(k-1)^2(c-3k) = c - 3k + 6k$
   $(c-3k)(k^2 - 2k) = 6k$
   Karena $k \ne 0$ maka $(c-3k)(k-2) = 6$ .... (3)
   Karena c, k $\in$ bilangan asli maka (k – 2) pasti membagi 6 dan karena c > 3k maka (k – 2) > 0
   Nilai k yang memenuhi adalah 3; 4; 5; 8
   $c = 3k + \frac{6}{k-2}$ .... (4)
   Untuk k = 3 maka a = 9 sehingga c = 15 dan b = 12 .... (5)
   Untuk k = 4 maka a = 12 sehingga c = 15 dan b = 9 .... (6)
   Untuk k = 5 maka a = 15 sehingga c = 17 dan b = 8 .... (7)
   Untuk k = 8 maka a = 24 sehingga c = 25 dan b = 7 .... (8)
   Subtitusikan persamaan (5), (6), (7), (8) ke persamaan (2) yang ternyata semuanya memenuhi.
   $\therefore$ **Panjang sisi-sisi segitiga yang memenuhi adalah :**
   * **a = 9 b = 12 c = 15**
   * **a = 12 b = 9 c = 15**
   * **a = 8 b = 15 c = 17**
   * **a = 15 b = 8 c = 17**
   * **a = 7 b = 24 c = 25**
   * **a = 24 b = 7 c = 25**