SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA TAHUN 2002

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2003

Bidang Matematika

Waktu : 90 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH UMUM
TAHUN 2002

OLIMPIADE MATEMATIKA
TINGKAT KABUPATEN/KOTA
TAHUN 2002

1 Bagian Pertama

1. Bilangan $\frac{(2^4)^8}{(4^8)^2}$ sama dengan

   A. ¼ B. ½ C. 1 D. 2 E. 8

2. Bando selalu berkata bohong. Suatu hari dia berkata kepada tetangganya, Andi : "Paling tidak salah satu diantara kita tidak pernah berbohong." Dari informasi ini kita merasa pasti bahwa

   A. Andi selalu berbohong
   B. Andi sesekali berbohong
   C. Andi selalu berkata benar
   D. Andi sesekali berkata benar
   E. Andi tidak pernah berkata apa pun

3. Bilangan n terbesar sehingga 8^n membagi 44^{44} adalah

   A. 8 B. 22 C. 29 D. 44 E. 88

4. Pernyataan manakah yang benar ?

   A. Jika $x < 0$ maka $x^2 > x$
   B. Jika $x^2 > 0$ maka $x > 0$
   C. Jika $x^2 > x$ maka $x > 0$
   D. Jika $x^2 > x$ maka $x < 0$
   E. Jika $x < 1$ maka $x^2 < x$

5. Misalkan x^{-n} sama dengan $\left(\frac{1}{x}\right)^n$ untuk setiap bilangan real x. Maka $a^3 - a^{-3}$ sama dengan

   A. $\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(a^2+1+\frac{1}{a^2}\right)$
   B. $\left(\frac{1}{a}-a\right)\left(a^2-1+\frac{1}{a^2}\right)$
   C. $\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(a^2-2+\frac{1}{a^2}\right)$
   D. $\left(\frac{1}{a}-a\right)\left(\frac{1}{a^2}+1+a^2\right)$
   E. bukan diantara A, B, C dan D

6. Lima ekor kambing memakan rumput seluas 5 kali ukuran lapangan bola dalam 5 hari. Berapa hari yang diperlukan oleh 3 ekor kambing untuk menghabiskan rumput seluas 3 kali lapangan bola ?

   A. 2 B. 3 C. 4 D. 5 E. 6

7. Jika untuk setiap x, y bilangan real berlaku x\$y = xy − x + y maka (x + y)\$(x − y) sama dengan ··

   A. $x^2 - y^2 + 2x$
   B. $x^2 - y^2 - 2x$
   C. $x^2 - y^2 + 2y$
   D. $x^2 - y^2 - 2y$
   E. $x^2 - y^2$

8. Berapa banyak pasang bilangan bulat positif (a,b) yang memenuhi $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{6}$?

   A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. 5

9. Untuk nilai a yang manakah garis lurus $y = 6x$ memotong parabola $y = x^2 + a$ tepat di satu titik?·
A. 7 B. 8 C. 9 D. 10 E. 11

10. Digit 1, 9, 9, 8 dalam 1998 mempunyai jumlah total 1 + 9 + 9 + 8 = 27. Bilangan berikutnya yang mempunyai jumlah digit 27 terjadi di antara tahun
A. 2500 dan 2700 C. 2901 dan 3100 E. 9901 dan 9999
B. 2701 dan 2900 D. 3101 dan 9900

2 Bagian Kedua

11. Pada suatu segitiga ABC, sudut C tiga kali besar sudut A dan sudut B dua kali besar sudut A. Berapakah perbandingan (rasio) antara panjang AB dengan BC ?

12. Bando dan Bandi ingin mengecat pagar, Bando dapat menyelesaikan pengecatan pagar oleh dirinya sendiri dalam waktu 3 jam, sedangkan Bandi dapat menyelesaikannya dalam 4 jam. Pada pukul 12:00 siang mereka mulai mengecat pagar bersama-sama. Akan tetapi pada suatu ketika mereka bertengkar. Mereka bertengkar selama 10 menit dan dalam masa itu tidak satupun yang melakukan pengecatan. Setelah pertengkaran tersebut Bandi pergi dan Bando meyelesaikan pengecatan pagar sendirian. Jika Bando menyelesaikan pengecatan pada pukul 14:25, pada pukul berapakah pertengkaran dimulai ?

13. Berapakah jumlah digit-digit bilangan $2^{2002} \cdot 5^{2003}$?

14. Berapa banyak bilangan positif yang kurang dari 10.000 yang berbentuk $x^8 + y^8$ untuk suatu bilangan bulat $x > 0$ dan $y > 0$?

15. Tentukan bilangan n terkecil sehingga setiap subhimpunan dari {1, 2, 3, ···, 20} yang beranggotakan n unsur pasti mengandung dua anggota yang selisihnya 8.

16. Garis AB dan CD sejajar dan berjarak 4 satuan. Misalkan AD memotong BC di titik P diantara kedua garis. Jika AB = 4 dan CD = 12, berapa jauh P dari garis CD ?

17. Misalkan a dan b bilangan real yang berbeda sehingga
$$\frac{a}{b} + \frac{a + 10b}{b + 10a} = 2$$
Tentukan nilai $\frac{a}{b}$.

18. Bilangan bulat positif $p \geq 2$ disebut bilangan prima jika ia hanya mempunyai faktor 1 dan p. Tentukan nilai penjumlahan semua bilangan prima diantara 1 dan 100 yang sekaligus bersifat : satu lebihnya dari suatu bilangan kelipatan 5 dan satu kurangnya dari suatu bilangan kelipatan 6.

19. Misalkan

$$a = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{5} + \cdots + \frac{1001^2}{2001}$$

dan

$$b = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \frac{3^2}{7} + \cdots + \frac{1001^2}{2003}$$

Tentukan bilangan bulat yang nilainya paling dekat ke a – b.

20. Suatu persegi panjang berukuran 8 kali $2\sqrt{2}$ mempunyai titik pusat yang sama dengan suatu lingkaran berjari-jari 2. Berapakah luas daerah irisan antara persegi panjang dan lingkaran tersebut ?

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA 2002

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2003

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN PERTAMA

1. (Jawaban : C)

$$\therefore \quad \frac{\left(2^4\right)^8}{\left(4^8\right)^2} = \frac{2^{32}}{4^{16}} = \frac{2^{32}}{2^{32}} = 1$$

2. (Jawaban : B)

Ingkaran dari : paling tidak salah satu di antara kita tidak pernah berbohong adalah :

$\therefore$ **Kedua-duanya pernah berbohong**

3. (Jawaban : C)

$44^{44} = 4^{44} \cdot 11^{44} = 16^{22} \cdot 11^{44} = 8^{22} \cdot 2^{22} \cdot 11^{44} = 8^{22} \cdot (2^3)^7 \cdot 2 \cdot 11^{44} = 8^{29} \cdot 2 \cdot 11^{44}$

Karena 8 tidak membagi $(2 \cdot 11^{44})$, maka :

$\therefore$ $\mathbf{n_{maks} = 29}$

4. (Jawaban : A)

Dasar teori :

Jika	$x < 0$	maka	$x^2 > x$
Jika	$0 < x < 1$	maka	$x^2 < x$
Jika	$x > 1$	maka	$x^2 > x$

A. Benar

B. Salah karena jika $x^2 > 0$ dimungkinkan $x < 0$ atau $x > 0$

C. Salah. Karena $x^2 > x$ maka $x(x-1) > 0$ sehingga $x < 0$ atau $x > 1$

D. Salah karena jika $x^2 > x$ dimungkinkan $x < 0$ atau $x > 1$

E. Salah karena untuk $x < 0$ maka $x^2 > x$

$\therefore$ Pernyataan yang benar adalah : **jika $\mathbf{x < 0}$ maka $\mathbf{x^2 > x}$**

5. (Jawaban : A)

$(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$$a^3 - a^{-3} = a^3 - \left(\frac{1}{a}\right)^3$$

$$a^3 - a^{-3} = \left(a - \frac{1}{a}\right)\left(a^2 + a \cdot \frac{1}{a} + \left(\frac{1}{a}\right)^2\right)$$

$$\therefore \quad a^3 - a^{-3} = \left(a - \frac{1}{a}\right)\left(a^2 + 1 + \frac{1}{a^2}\right)$$

6. (Jawaban : D)

Kecepatan makan untuk 1 ekor kambing, v_k = 1 lap. bola/ 5 hari / 5 kambing.

V_k = 1/5 lap bola/hari/kambing

Banyaknya rumput yang dimakan, n_r dirumuskan dengan :

$N_r = v_k \cdot n_{hari} \cdot n_{kambing}$
$3 = 1/5 \cdot n_{hari} \cdot 3$
$\therefore$ **n_{hari} = 5 hari**

7. (Jawaban : D)
(x + y) \$ (x – y) = (x + y) (x – y) – (x + y) + (x– y)
$\therefore$ (x + y) \$ (x – y) = $\mathbf{x^2 - y^2 - 2y}$

8. (Jawaban : ?)
Karena b > 0 maka $\frac{1}{a} < \frac{1}{6}$ sehingga a > 6 .... (1)
Karena $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{6}$ maka $\frac{a+b}{ab} = \frac{1}{6}$
$a = \frac{6(b-6)+36}{b-6}$
$a = 6 + \frac{36}{b-6}$ .... (2)
Karena a > 6 maka (b – 6) > 0 .... (3)
Karena a bilangan bulat maka (b –6) adalah faktor dari 36 dan karena (b – 6) > 0 maka nilai (b – 6) yang memenuhi adalah 1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18 atau 36.

Untuk					
	b – 6 = 1	b – 6 = 2	b – 6 = 3	b – 6 = 4	b – 6 = 6
	b = 7	b = 8	b = 9	b = 10	b = 12
	a = 42	a = 24	a = 18	a = 15	a = 12
	b – 6 = 9	b – 6 = 12	b – 6 = 18	b – 6 = 36	
	b = 15	b = 18	b = 24	b = 42	
	a = 10	a = 9	a = 8	a = 7	

Pasangan bilangan bulat (a, b) yang memenuhi adalah :
{ (7,42) ; (8,24) ; (9,18) ; (10,15) ; (12,12) ; (15,10) ; (18,9) ; (24,8) ; (42,7) }
$\therefore$ Maka banyaknya pasangan (a, b) yang memenuhi adalah **9**

9. (Jawaban : C)
Karena 6x = x^2 + a maka x^2 –6x + a = 0
Disk = 6^2 – 4(1)(a) = 36 – 4a
Syarat agar y = 6x memotong parabola y = x^2 + a di satu titik adalah Disk = 0
36 – 4a = 0
$\therefore$ **a = 9**

10. (Jawaban : B)
Misal bilangan selanjutnya adalah ABCD, maka A = 2 karena 1 + 9 + 9 + 9 $\neq$ 27.
B + C + D = 25
Karena diinginkan B sekecil-kecilnya, maka (C + D) harus sebesar-besarnya dan karena B $\leq$ 9; C $\leq$ 9 dan D $\leq$ 9 maka $(C + D)_{maks}$ = 18 sehingga B_{min} = 25 – 18 = 7.
Maka tahun berikutnya yang digitnya berjumlah 27 adalah 2799
$\therefore$ Maka tahun berikutnya yang digitnya berjumlah 27 terjadi di antara tahun **2701 dan 2900**

BAGIAN KEDUA

11. $\angle C = 3\angle A$ dan $\angle B = 2\angle A$

Karena $\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$ maka $\angle A + 2\angle A + 3\angle A = 180^o$ sehingga $\angle A = 30^o$

$\angle C = 3\angle A = 90^o$

$$\frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{BC}{\sin \angle A}$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin 30^\circ} = 2$$

12. Misal kecepatan Bando mengecat v_o = 1 pagar / 3 jam = 1/3 pagar/jam

Kecepatan Bandi mengecat v_i = 1 pagar / 4 jam = 1/4 pagar/jam

t_1 adalah lamanya waktu Bando dan Bandi mengecat bersama (dalam jam)

Maka banyaknya pagar yang dicat oleh mereka n_{p1} adalah :

$n_{p1} = v_o \cdot t_1 + v_1 \cdot t_1$

$$n_{p1} = \frac{1}{3}t_1 + \frac{1}{4}t_1 = \frac{7}{12}t_1$$

t_2 adalah lamanya waktu Bando mengecat pagar sendirian setelah pertengkaran (dalam jam)

$n_{p2} = v_o \cdot t_2$

$$n_{p2} = \frac{1}{3}t_2$$

Karena t_{total} adalah waktu dari 12.00 sampai 14.25 maka $t_{total} = \frac{29}{12}$ jam

Lama pertengkaran 10 menit atau $\frac{1}{6}$ jam

$t_{total} = t_1$ + lama pertengkaran + t_2

$$\frac{29}{12} = t_1 + \frac{1}{6} + t_2$$

$t_1 + t_2 = \frac{9}{4}$. Maka $t_2 = \frac{9}{4} - t_1$

$$n_{p1} + n_{p2} = 1 = \frac{7}{12}t_1 + \frac{1}{3}t_2$$

$$1 = \frac{7}{12}t_1 + \frac{1}{3}\left(\frac{9}{4} - t_1\right)$$

$12 = 7t_1 + 9 - 4t_1$ sehingga t_1 = 1 jam

Maka pertengkaran dimulai 1 jam setelah pukul 12.00

$\therefore$ Pertengkaran dimulai pukul **13.00**

13. $N = 2^{2002} \cdot 5^{2003} = 5 \cdot (2 \cdot 5)^{2002} = 5 \cdot 10^{2002}$

N = 500000····· (Sebuah bilangan yang terdiri dari 2003 digit dengan digit pertama 5 diikuti digit 0 sebanyak 2002 kali)

$\therefore$ Jumlah digit N = 5 + 0 + 0 + 0 + ··· = **5**

14. Misal $P = x^8 + y^8$; maka $P < 10^4$

Karena $x^8 > 0$ dan $y^8 > 0$ maka $x^8 < 10^4$ dan $y^8 < 10^4$

$x^2 < 10$ dan $y^2 < 10$

Maka x = 1; 2; atau 3 dan y = 1; 2; atau 3

Untuk x = 1 dan y = 1 maka $P = 1^8 + 1^8 = 2 < 10000$ (memenuhi)

Untuk x = 1 dan y = 2 atau x = 2 dan y = 1 maka $P = 1^8 + 2^8 = 257 < 10000$ (memenuhi)

Untuk x = 1 dan y = 3 atau x = 3 dan y = 1 maka $P = 1^8 + 3^8 = 6562 < 10000$ (memenuhi)

Untuk x = 2 dan y = 2 maka $P = 2^8 + 2^8 = 512 < 10000$ (memenuhi)

Untuk x = 2 dan y = 3 atau x = 3 dan y = 2 maka $P = 2^8 + 3^8 = 6817 < 10000$ (memenuhi)

Untuk x = 3 dan y = 3 maka $P = 3^8 + 3^8 = 13122 > 10000$ (tidak memenuhi)

Maka nilai P yang memenuhi adalah 2; 257; 6562; 512; 6817

$\therefore$ Banyaknya nilai yang berbentuk $x^8 + y^8$ dengan x, y bilangan bulat adalah **5**

15. Misal a − b = 8. Kemungkinan 2 nilai yang berselisih 8 adalah :

20 − 12	18 − 10	16 − 8	14 − 6	12 − 4	10 − 2
19 − 11	17 − 9	15 − 7	13 − 5	11 − 3	9 − 1

Bilangan 9; 10; 11; 12 berperan 2 baik sebagai a maupun b.

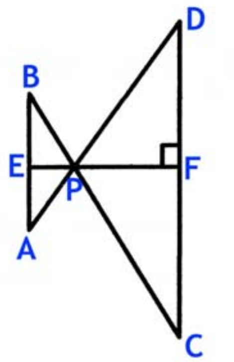
Jika kedelapan bilangan berikut :

a. 9	c. 11	e. 5 atau 13	g. 7 atau 15
b. 10	d. 12	f. 6 atau 14	h. 8 atau 16

tidak termasuk dalam n_{unsur}, maka tidak akan ada 2 unsur dari n_{unsur} yang berselisih 8. Maka untuk n = 20 − 8, masih dimungkinkan tidak ada 2 unsur dari n_{unsur} yang berselisih 8.

$\therefore$ **$n_{minimal}$ = 13**

16. Dibuat garis EF tegak lurus AB maupun CD serta melalui titik P.



Karena ∠CPD = ∠APB dan AB sejajar dengan CD, maka ΔAPB sebangun dengan ΔCPD.

$$\frac{EP}{PF} = \frac{CD}{AB} = \frac{12}{4} = 3$$

$$PF = \frac{1}{3} \cdot EP \quad \cdots\cdots\cdots\cdot (1)$$

EP + PF = 4

$$EP + \frac{1}{3} \cdot EP = 4$$

$\therefore$ EP = **3** satuan

17. Karena $\frac{a}{b}+\frac{a+10b}{b+10a}=2$ maka $\frac{a}{b}+\frac{\frac{a}{b}+10}{1+10\frac{a}{b}}=2$

Misal $\frac{a}{b}=x$, maka $\frac{x+10}{1+10x}=2-x$

x + 10 = 2 – 10x^2 + 19x

(5x – 4) (x – 1) = 0

x = 1 atau $x=\frac{4}{5}$

∴ Karena a ≠ b, maka x ≠ 1 maka $\frac{a}{b}=\frac{4}{5}$

18. 1 < p < 100

Dari pernyataan selanjutnya, maka :

p = 1 + 5x dengan x adalah bilangan bulat.

Karena 1 < 1 + 5x < 100 maka 0 < 5x < 99

0 < x < 20 ············ (1)

p = 6y – 1 dengan y adalah bilangan bulat.

Karena 1 < 6y – 1 < 100 maka 2 < 6y < 101

0 < y < 17 ············· (2)

1 + 5x = 6y – 1

5x = 2(3y – 1) ············ (3)

3y – 1 = 5t dan x = 2t dengan t adalah bilangan bulat

$t=\frac{3y-1}{5}$ ··············· (4)

Karena t adalah bilangan bulat, maka 5 membagi (3y – 1) sehingga (3y – 1) adalah bilangan dengan angka satuan 0 atau 5. Maka y harus suatu bilangan dengan angka satuan 2 atau 7.

Karena 0 < y < 17, maka y = 2 atau 7 atau 12.

Jika y = 2 maka p = 6(2) – 1 = 11 (bilangan pima)

Jika y = 7 maka p = 6(7) – 1 = 41 (bilangan pima)

Jika y = 12 maka p = 6(12) – 1 = 71 (bilangan pima)

∴ Maka jumlah seluruh bilangan prima = 11 + 41 + 71 = **123**

19. $a-b=\frac{1^2}{1}+\left(\frac{2^2}{3}-\frac{1^2}{3}\right)+\left(\frac{3^2}{5}-\frac{2^2}{5}\right)+\left(\frac{4^2}{7}-\frac{3^2}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1001^2}{2001}-\frac{1000^2}{2001}\right)-\frac{1001^2}{2003}$

Mengingat (x^2 – y^2) = (x + y) (x – y), maka persamaan di atas menjadi :

$a-b=1+(1)+(1)+(1)+\cdots+(1)-\frac{1001^2}{2003}$

$a-b=1001\cdot 1-\frac{1001^2}{2003}$

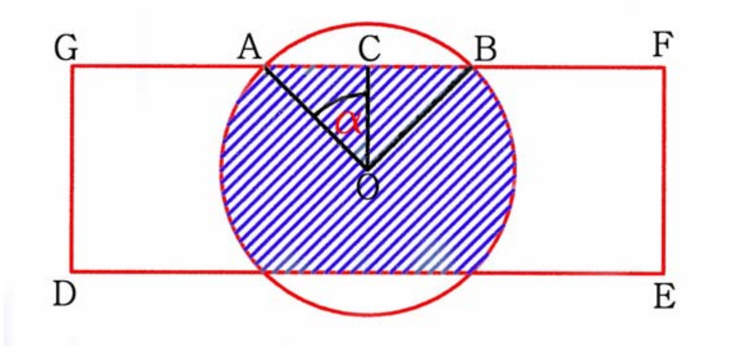
$$a - b = \frac{1001 \cdot (2003 - 1001)}{2003}$$

$$a - b = \frac{1001 \cdot 1002}{2003}$$

$$a - b \approx \frac{1002}{2}$$ dengan mengingat $2003 \approx 2 \cdot 1001$

$\therefore$ **a – b ≈ 501**

20.



Dari soal diketahui bahwa DE = 8 dan EF = $2\sqrt{2}$

OA = OB = 2

$$OC = \frac{1}{2} \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{OC}{OA} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$. Maka $\alpha = 45^o$

$\angle AOB = 90^o$

Luas juring OAB $= \frac{90^\circ}{360} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{4} \cdot \pi (2^2) = \pi$

Luas ΔOAB $= \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 90^\circ = 2$

Luas tembereng AB = Luas juring OAB – Luas ΔOAB = $\pi - 2$

Luas arsir = Luas lingkaran – 2 · Luas tembereng AB

Luas arsir = $\pi (r)^2 - 2 \cdot (\pi - 2)$

Luas arsir = $4\pi - 2\pi + 4$

$\therefore$ Luas arsir = **$2\pi + 4$**

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2003

TINGKAT PROVINSI

Bidang Matematika

Bagian Pertama

Waktu : 90 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH UMUM
TAHUN 2002

OLIMPIADE MATEMATIKA
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2002

BAGIAN PERTAMA

1. Misalkan $A = (-1)^{-1}$, $B = (-1)^1$ dan $C = 1^{-1}$. Berapakah A + B + C ?

2. Jika $y = \dfrac{x-1}{2x+3}$, tuliskan x sebagai fungsi dari y.

3. Misalkan $S = (x-2)^4 + 8(x-2)^3 + 24(x-2)^2 + 32(x-2) + 16$. Apakah S jika dituliskan dalam sesedikit mungkin suku penjumlahan ?

4. Bilangan real 2,525252⋯ adalah bilangan rasional, sehingga dapat ditulis dalam bentuk $\dfrac{m}{n}$, dimana m, n bilangan-bilangan bulat, $n \neq 0$. Jika dipilih m dan n yang relatif prima, berapakah m + n ?

5. Misalkan M dan m berturut-turut menyatakan bilangan terbesar dan bilangan terkecil di antara semua bilangan 4-angka yang jumlah keempat angkanya adalah 9. Berapakah faktor prima terbesar dari M – m ?

6. Tinjau persamaan yang berbentuk $x^2 + bx + c = 0$. Berapa banyakkah persamaan demikian yang memiliki akar-akar real jika koefisien b dan c hanya boleh dipilih dari himpunan {1,2,3,4,5,6} ?

7. Diketahui tiga bilangan k, m dan n. Pernyataan "Jika $k \geq m$, maka $k > n$" adalah tidak benar. Apakah pernyataan yang benar dalam hal ini ?

8. Sebuah saluran air seharusnya dibuat dengan menggunakan pipa berdiameter 10 cm. Akan tetapi yang tersedia hanyalah pip-pipa kecil yang berdiameter 3 cm. Supaya kapasitas saluran tidak lebih kecil daripada yang diinginkan, berapakah banyaknya pipa 3 cm yang perlu dipakai sebagai pengganti satu pipa 10 cm ?

9. Sebuah segitiga samasisi, sebuah lingkaran dan sebuah persegi memiliki keliling yang sama. Di antara ketiga bangun tersebut, manakah yang memiliki luas terbesar ?

10. Segitiga ABC memiliki panjang sisi AB = 10, BC = 7, dan CA = 12. Jika setiap sisi diperpanjang menjadi tiga kali panjang semula, maka segitiga yang terbentuk memiliki luas berapa kali luas ΔABC ?

11. Sebanyak n orang pengurus sebuah organisasi akan dibagi ke dalam empat komisi mengikuti ketentuan berikut : (i) setiap anggota tergabung ke dalam tepat dua komisi, dan (ii) setiap dua komisi memiliki tepat satu anggota bersama. Berapakah n ?

12. Didefinisikan $a*b = a + b + ab$ untuk semua bilangan real a,b. Jika $S = \{a \text{ bilangan real } a*(-a) > a\}$ tuliskan S sebagai sebuah selang (interval).

13. Garis tengah sebuah setengah lingkaran berimpit dengan alas AB dari ΔABC. Titik sudut C bergerak sedemikian rupa, sehingga titik tengah sisi AC selalu terletak pada setengah lingkaran. Berupa apakah lengkungan tempat kedudukan titik C ?

14. Berapakah bilangan bulat positif terbesar yang membagi semua bilangan $1^5 - 1$, $2^5 - 2$, $\cdots$, $n^5 - n$?

15. Jika $2002 = a_1 + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + \cdots + a_n \cdot n!$, dimana a_k adalah bilangan bulat, $0 \le a_k \le k$, $k = 1, 2, \cdots, n$, dan $a_n \ne 0$, tentukan pasangan terurut (n, a_n).

16. Berapakah sisa pembagian $43^{43^{43}}$ oleh 100 ?

17. Empat pasang suami-isteri membeli karcis untuk 8 kursi sebaris pada suatu pertunjukan. Dua orang akan duduk bersebelahan hanya kalau keduanya pasangan suami isteri atau berjenis kelamin sama. Berapa banyakkah cara menempatkan keempat pasang suami-isteri ke 8 kursi tersebut ?

18. Ada berapa banyakkah bilangan 4-angka berbentuk $\overline{abcd}$ dengan $a \le b \le c \le d$?

19. Kita gambarkan segibanyak beraturan (reguler) R dengan 2002 titik sudut beserta semua diagonalnya. Berapakah banyaknya segitiga yang terbentuk yang semua titik sudutnya adalah titik sudut R, tetapi tidak ada sisinya yang merupakan sisi R ?

20. Suatu lomba maraton diikuti oleh empat SMU : Merak, Merpati, Pipit dan Walet. Setiap SMU mengirimkan lima pelari. Pelari yang masuk finish ke-1, 2, 3, 4, 5, 6 memperoleh nilai berturut-turut 7, 5, 4, 3, 2, 1. Nilai setiap SMU adalah jumlah nilai kelima pelarinya. SMU dengan nilai terbesar adalah juara lomba. Di akhir lomba ternyata SMU Pipit menjadi juara dan tidak ada dua pelari yang masuk finish bersamaan. Ada berapa banyakkah kemungkinan nilai SMU pemenang ?

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2003
TINGKAT PROVINSI

Bidang Matematika

Bagian Kedua

Waktu : 120 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH UMUM
TAHUN 2002

OLIMPIADE MATEMATIKA
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2002

BAGIAN KEDUA

1. Lima buah bilangan asli berbeda, k, ℓ, m, n dan p, akan dipilih. Kelima informasi berikut ternyata cukup untuk mengurutkan kelima bilangan tersebut :
   (a) diantara setiap dua bilangan, salah satu bilangan mesti membagi bilangan yang lainnya,
   (b) m adalah bilangan yang terbesar atau yang terkecil,
   (c) p tidak boleh membagi sekaligus m dan k,
   (d) $n \le \ell - p$, dan
   (e) k membagi n atau p membagi n, tetapi tidak sekaligus kedaunya.

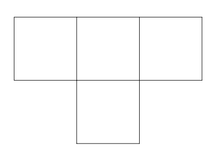
   Tentukan urutan yang mungkin bagi k, ℓ, m, n dan p

2. Tentukan semua bilangan bulat positif p sehingga $\frac{3p + 25}{2p - 5}$ juga bulat positif.

3. Diberikan sebuah bilangan 6-angka.
   Buktikan bahwa keenam angka bilangan tersebut dapat disusun ulang sedemikian rupa, sehinggga jumlah tiga angka pertama dan jumlah tiga angka terakhir berselisih tidak lebih dari 9.

4. Diberikan segitiga sama sisi ABC dan sebuah titik P sehingga jarak P ke A dan ke C tidak lebih jauh dari jarak P ke B.
   Buktikan bahwa PB = PA + PC jika dan hanya jika P terletak pada lingkaran luar ΔABC.

5. Bangun datar pada gambar disebut *tetromino-T*. Misalkan setiap petak tetromino menutupi tepat satu petak pada papan catur. Kita ingin menutup papan catur dengan tetromino-tetromino sehingga setiap petak tetromino menutup satu petak catur tanpa tumpang tindih.



tetromino-T

   (a) Tunjukkan bahwa kita dapat menutup papan catur biasa, yaitu papan catur dengan 8 X 8 petak, dengan menggunakan 16 tetromino-T.
   (b) Tunjukkan bahwa kita tidak dapat menutup papan 'catur' 10 X 10 petak dengan 25 tetromino-T.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2003
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2002

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Bagian Pertama

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN PERTAMA

1. $A + B + C = \frac{1}{(-1)^1} + (-1)^1 + \frac{1}{(1)^1} = -1 - 1 + 1$

   $\therefore \ A + B + C = -1$

2. $y = \frac{x - 1}{2x + 3}$

   2yx + 3y = x – 1
   x – 2yx = 3y + 1
   x (1 – 2y) = 3y + 1
   $\therefore \ x = \frac{3y + 1}{1 - 2y}$

3. $(a + b)^4 = a^0b^4 + 4a^1b^3 + 6a^2b^2 + 4a^3b^1 + a^4b^0$
   $S = 2^0 \cdot (x - 2)^4 + 4 \cdot 2^1 \cdot (x - 2)^3 + 6 \cdot 2^2 \cdot (x - 2)^2 + 4 \cdot 2^3 \cdot (x - 2)^1 + 2^4 \cdot (x - 2)^0$
   Mengingat teori di atas, maka : $S = (2 + (x - 2))^4$
   $\therefore$ S = $\mathbf{x^4}$

4. Misal X = 2,525252··· maka 100X = 252,525252···
   100X – X = 252,525252··· – 2,525252···
   99X = 250
   $X = \frac{250}{99}$
   Karena 250 dan 99 relatif prima, maka m = 250 dan n = 99
   $\therefore$ m + n = 250 + 99 = **349**

5. Misal bilangan itu adalah : abcd
   Agar abcd sebesar-besarnya maka a harus sebesar-besarnya. Maka a = 9.
   Karena a = 9, agar a + b + c + d = 9, maka b = 0 ; c = 0; d = 0. Maka M = 9000
   Agar abcd sekecil-kecilnya maka a harus sekecil-kecilnya dan karena a $\neq$ 0, maka a = 1.
   b juga harus sekecil-kecilnya, maka b = 0.
   c juga harus sekecil-kecilnya, maka c = 0.
   Karena a + b + c + d = 9, maka d = 8. Akibatnya m = 1008
   M – m = 9000 – 1008 = 7992 = 8 · 999 = 8 · 27 · 37
   M – m = $2^3 \cdot 3^3 \cdot 37$
   $\therefore$ Maka faktor prima tebesar dari M – m adalah **37**

6. Agar akar-akar persamaan tersebut real maka Diskriminan = $b^2 - 4\cdot(1)\cdot c \geq 0$. Maka $4c \leq b^2$
   Karena $1 \leq c \leq 6$, maka $4 \leq 4c \leq 24$
   Untuk b = 1 maka $4c \leq 1$. Akibatnya tidak ada nilai c yang memenuhi
   Untuk b = 2 maka $4c \leq 4$. Akibatnya nilai c yang memenuhi ada satu, yaitu c = 1
   Untuk b = 3 maka $4c \leq 9$. Akibatnya nilai c yang memenuhi ada dua, yaitu c = 1 ; 2
   Untuk b = 4 maka $4c \leq 16$. Akibatnya nilai c yang memenuhi ada empat, yaitu c = 1 ; 2; 3; 4
   Untuk b = 5 maka $4c \leq 25$. Akibatnya nilai c yang memenuhi ada enam, yaitu c = 1 ; 2; 3; 4; 5; 6
   Untuk b = 6 maka $4c \leq 36$. Akibatnya nilai c yang memenuhi ada enam, yaitu c = 1 ; 2; 3; 4; 5; 6
   ∴ Maka banyaknya pasangan yang memenuhi ada : 0 + 1 + 2 + 4 + 6 + 6 = **19**

7. $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p \equiv \sim p \vee q$
   $\sim(p \rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$
   $p : k \geq m$ $\quad$ $q : k > n$
   Karena $q : k > n$, maka ingkaran dari q adalah $\sim q \equiv k \leq n$
   ∴ Pernyataan yang benar adalah : **$k \geq m$ dan $k \leq n$.** Penulisan lain adalah **$m \leq k \leq n$.**

8. Kapasitas pipa tergantung dari luas penampangnya.
   $L_{pakai} \geq L_{seharusnya}$
   $n \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi\,(3)^2 \geq \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (10)^2$
   $9n \geq 100$
   $n \geq 11,111\cdots$
   ∴ n_{min} = **12**

9. Misal masing-masing keliling bangun = K
   Untuk segitiga jelas 3s = K. Karena s = K/3 maka Luas = ½ $s^2 \sin 60^o = \frac{1}{36}\sqrt{3}K^2$
   Untuk lingkaran, $2\pi R = K$. Karena $R = \frac{K}{2\pi}$ maka Luas = $\pi R^2 = \frac{K^2}{4\pi}$
   Untuk persegi, 4s = K. Karena $s = \frac{K}{4}$ maka Luas = $s^2 = \frac{K^2}{16}$
   Karena $\pi = 3,142\cdots < 4$ dan $\sqrt{3} < 2$, maka
   $$\frac{1}{4\pi} > \frac{1}{16} > \frac{1}{18} = \frac{2}{36} > \frac{\sqrt{3}}{36}$$
   ∴ Karena $\frac{1}{4\pi} > \frac{1}{16} > \frac{\sqrt{3}}{36}$, maka bangun yang memiliki luas terbesar adalah : **lingkaran**

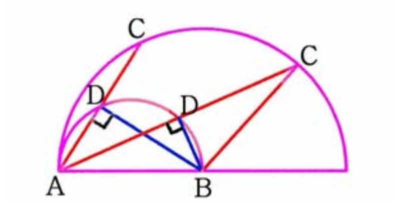
10. Luas segitiga semula = ½ ab sin C
    Luas segitiga akhir = ½ (3a)(3b)sin C = 9 · ½ ab sin C
    Luas segitiga akhir = 9 · Luas segitiga semula
    ∴ Perbandingan luas segitiga akhir dengan luas segitiga semula adalah = **9**

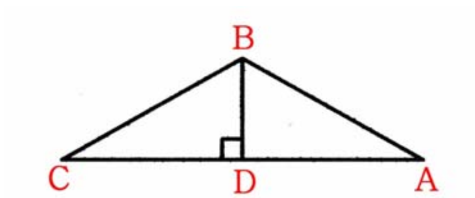
11. (a) setiap anggota tergabung ke dalam tepat dua komisi
    (b) setiap dua komisi memiliki tepat satu anggota bersama
    Karena ada 4 komisi maka banyaknya pasangan komisi yang bisa dibuat adalah ${}_4C_2 = 6$.
    Karena banyaknya pasangan komisi ada 6 maka banyaknya anggota minimal adalah 6 sebab jika kurang dari 6 maka akan ada seorang anggota yang tergabung dalam lebih dari 2 komisi.
    Jika terdapat lebih dari 6 anggota maka akan ada seorang anggota yang masuk dalam sebuah komisi tetapi tidak masuk ke dalam tiga komisi lain. Hal ini bertentangan dengan (a) bahwa seorang anggota tergabung ke dalam tepat dua komisi. Akibatnya banyaknya anggota ada 6 orang.
    Contoh pembagian keenam anggota ke dalam empat komisi yang memenuhi (a) dan (b) adalah :
    Misalkan komisi tersebut adalah A, B, C, D dengan a_i menyatakan anggota ke-i dengan $1 \le i \le 6$.

Komisi A	Komisi B	Komisi C	Komisi D
a_1	a_1	a_2	a_3
a_2	a_4	a_4	a_5
a_3	a_5	a_6	a_6

$\therefore$ Jadi, banyaknya pengurus agar memenuhi syarat tersebut adalah **6**

12. $a * (-a) = a + (-a) + a \cdot (-a) = -a^2$
    $S = \{$ a bilangan real $| -a^2 > a \} = \{$ a bilangan real $| a(a + 1) < 0 \}$
    $\therefore$ **S = { a bilangan real | $-1 < a < 0$ }**

13. 



AB adalah diameter dan D terletak pada lingkaran. Maka $\angle ADB = 90^o$
Karena AD = CD dan BD $\perp$ AC maka ΔABC adalah segitiga sama kaki dengan AB = BC.
Karena BC = AB = diameter lingkaran yang berarti bernilai tetap dan B adalah titik yang tetap maka lengkung yang terjadi adalah berupa setengah lingkaran dengan pusat titik B.
$\therefore$ Lengkung yang terjadi adalah berupa **setengah lingkaran**

14. $1^5 - 1 = 0$; $2^5 - 2 = 30$. Untuk n > 2 maka $n^5 - n > 30$.
    Semua bilangan membagi 0. Karena salah satu bilangan tersebut adalah 30 maka nilai maksimum bilangan yang membagi $1^5 - 1$, $2^5 - 2$, $\cdots$, $n^5 - n$ adalah 30. Akan dibuktikan bahwa 30 membagi $n^5 - n$ untuk setiap n bilangan asli.
    Alternatif 1 :
    Misal : $N = n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = (n - 1)n(n + 1)(n^2 + 1)$
    Karena (n − 1) , n dan (n + 1) adalah tiga bilangan berurutan maka N pasti habis dibagi 3! = 6.
    - Untuk n = 5k
      Karena n adalah faktor dari N dan n habis dibagi 5 maka N pasti habis dibagi 5
    - Untuk n = 5k + 1
      n − 1 = 5k
      Karena (n − 1) adalah faktor dari N dan (n − 1) habis dibagi 5 maka N pasti habis dibagi 5
    - Untuk n = 5k + 2

$n^2 + 1 = (5k + 2)^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 5 = 5 (5k^2 + 4k + 1)$
Karena $(n^2 + 1)$ adalah faktor dari N dan $(n^2 + 1)$ habis dibagi 5 maka N pasti habis dibagi 5

- Untuk n = 5k + 3
  $n^2 + 1 = (5k + 3)^2 + 1 = 25k^2 + 30k + 10 = 5 (5k^2 + 6k + 2)$
  Karena $(n^2 + 1)$ adalah faktor dari N dan $(n^2 + 1)$ habis dibagi 5 maka N pasti habis dibagi 5
- Untuk n = 5k + 4
  n + 1 = 5k + 5 = 5 (k + 1)
  Karena (n + 1) adalah faktor dari N dan (n + 1) habis dibagi 5 maka N pasti habis dibagi 5

Karena untuk n = 5k ; n = 5k + 1 ; n = 5k + 2 ; n = 5k + 3 dan n = 5k + 4 semuanya menghasilkan N habis dibagi 5 maka N pasti habis dibagi 5 untuk n bilangan bulat positif.
Karena N habis dibagi 6 dan 5 serta 6 dan 5 relatif prima maka N pasti habis dibagi $6 \cdot 5 = 30$

Alternatif 2 :

$n^5 - n = (n - 1)\, n\, (n + 1)\, (n^2 + 1) = (n - 1)\, n\, (n + 1)\, (n^2 - 4 + 5)$
$n^5 - n = (n - 1)\, n\, (n + 1)\, (n^2 - 4) + 5\, (n - 1)\, n\, (n + 1)$
$n^5 - n = (n - 2)\, (n - 1)\, n\, (n + 1)\, (n + 2) + 5\, (n - 1)\, n\, (n + 1)$

Karena (n − 2), (n − 1) , n, (n + 1) dan (n + 2) adalah lima bilangan bulat berurutan maka perkalian (n − 2) (n − 1) n (n + 1) (n + 2) habis dibagi 5! = 120 atau juga habis dibagi 30 sebab 30 membagi 120.
Karena (n − 1) , n dan (n + 1) adalah 3 bilangan berurutan maka (n − 1) n (n + 1) pasti habis dibagi 3! = 6. Maka 5 (n − 1) n (n + 1) habis dibagi $5 \cdot 6 = 30$.

$\therefore$ Bilangan nilai maksimum bilangan yang membagi $1^5 - 1, 2^5 - 2, \cdots , n^5 - n$ adalah **30.**

15. Misal $T = a_1 + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + \cdots + a_n \cdot n!$
Karena 7! = 5040 dan 6! = 720 maka $n_{maksimum} = 6$.
Jika n = 5 maka $T_{maks} = 1 + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! + 5 \cdot 5! = 1 + 4 + 18 + 96 + 600 = 719 < 2002$
T = 2002 hanya jika n = 6
Karena untuk n = 5 maka$T_{maks} = 719$ maka $2002 - 719 = 1283 \le a_6 \cdot 6! \le 2002$ yang dipenuhi hanya jika $a_6 = 2$

Maka $a_1 + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + a_4 \cdot 4! + a_5 \cdot 5! = 2002 - 2 \cdot 6! = 562$
Jika n = 4 maka $T_{maks} = 1 + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! = 119$
$562 - 119 = 443 \le a_5 \cdot 5! \le 562$ yang dipenuhi hanya jika $a_5 = 4$

Maka $a_1 + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + a_4 \cdot 4! = 562 - 4 \cdot 5! = 562 - 480 = 82$
Jika n = 3 maka $T_{maks} = 1 + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! = 23$
$82 - 23 = 59 \le a_4 \cdot 4! \le 82$ yang dipenuhi hanya jika $a_4 = 3$

Maka $a_1 + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! = 82 - 3 \cdot 4! = 82 - 72 = 10$
Jika n = 2 maka $T_{maks} = 1 + 2 \cdot 2! = 9$
$10 - 9 = 1 \le a_3 \cdot 3! \le 10$ yang dipenuhi hanya jika $a_3 = 1$

Maka $a_1 + a_2 \cdot 2! = 10 - 1 \cdot 3! = 10 - 6 = 4$
Jika n = 1 maka $T_{maks} = 1 = 1$
$4 - 1 = 3 \le a_2 \cdot 2! \le 4$ yang dipenuhi hanya jika $a_2 = 2$

Maka $a_1 = 4 - 2 \cdot 2! = 4 - 4 = 0$
$\therefore$ Pasangan terurut (n,a_n) adalah **{ (1,0) ; (2,2) ; (3,1) ; (4,3) ; (5,4) ; (6,2) }**

16. Alternatif 1 :

Dua digit terakhir dari 43^1 adalah 43

Dua digit terakhir dari 43^2 adalah 49

Dua digit terakhir dari 43^3 adalah 07

Dua digit terakhir dari 43^4 adalah 01

Dua digit terakhir dari 43^5 adalah 43 ······ dst.

Karena $43 = 4\cdot 10 + 3$ maka 2 digit terakhir dari 43^{43} sama dengan dua digit terakhir dari 43^3 yaitu 07. Sehingga 43^{43} = ······07 = 100t + 7 = 4k + 7 dengan t dan k adalah bilangan bulat.

$$43^{43^{43}} = 43^{4k+7} = 43^{4k}\cdot 43^7 = \left(43^4\right)^k\cdot 43^7$$

Karena dua digit terakhir dari 43^4 adalah 01 maka dua digit terakhir dari $(43^4)^k$ adalah juga 01. Dua digit terakhir dari 43^7 sama dengan dua digit terakhir dari 43^3 yaitu 07.

Maka dua digit terakhir dari $43^{43^{43}}$ sama dengan dua digit terakhir dari perkalian dua digit terakhir $(43^4)^k$ dengan dua digit terakhir dari 43^7.

Karena 01 x 07 = 07. Maka 2 digit terakhir dari $43^{43^{43}}$ adalah 07.

Alternatif 2 :

Karena $43^{43} = (4\cdot 11 - 1)^{43}$ maka $43^{43} \equiv (-1)^{43} \pmod 4$

$43^{43} \equiv -1 \pmod 4 \equiv 3 \pmod 4$

Berarti 43^{43} = 4k + 3 dengan k adalah bilangan asli.

$43^{43^{43}} = 43^{4k+3} = (1849)^{2k}\cdot 43^3$

$43^{43^{43}} \equiv (49)^{2k}\cdot 43^{43} \pmod{100}$

$43^{43^{43}} \equiv (2401)^k\cdot 7 \pmod{100}$ sebab $43^{43} \equiv 7 \pmod{100}$

$43^{43^{43}} \equiv 1^k\cdot 7 \pmod{100}$

$43^{43^{43}} \equiv 7 \pmod{100}$

Karena $43^{43^{43}} \equiv 7 \pmod{100}$ berarti $43^{43^{43}}$ = 100p + 7 dengan p adalah bilangan asli.

$\therefore$ $43^{43^{43}}$ jika dibagi 100 akan bersisa **7**

17. Misal S = suami dan I = isteri

Kemungkinan susunannya adalah :

a. SIISSIIS atau ISSIISSI
   Karena yang berdekatan haruslah pasangan suami isteri maka kasus ini seolah-olah menempatkan 4 pasangan suami isteri dalam 4 tempat. Banyaknya cara = $2\cdot {}_4P_4$ = 48.
b. SIISSSII atau ISSIIISS
   Karena ada 3 pasang kursi yang harus diisi 3 pasang suami isteri maka banyaknya cara menyusun = $2\cdot {}_4C_3\cdot 3!$ = 48
c. SSIISSII atau IISSIISS
   Kasus ini sama dengan (a). Banyaknya cara adalah 48.
d. SIIISSSI atau ISSSIIIS
   Karena ada 3 pasang kursi yang harus diisi 3 pasang suami isteri maka banyaknya cara adalah $2\cdot 4\cdot 3!$ = 48
e. SSIIISSI atau IISSSIIS
   Kasus ini sama dengan (c). Banyaknya cara ada 48 cara.
f. SIIIISSS atau ISSSSIII
   Ada 2 pasang kursi yang harus diisi oleh 2 pasang suami isteri. Banyaknya cara = ${}_4C_2\cdot 2!$. Empat kursi lain terdiri dari 2 kursi diisi oleh 2 perempuan dan 2 kursi lainnya diisi 2 lelaki.

Maka banyaknya cara = $2 \cdot ({}_4C_2 \cdot 2!) \cdot 2! \cdot 2! = 96$

g. SSIIIISS atau IISSSSII

Soal ini mirip dengan bagian (f). Banyaknya cara ada 96.

h. SSSIIIIS atau IIISSSSI

Soal ini juga mirip dengan bagian (f). Banyaknya cara ada 96.

i. SSSSIIII atau IIIISSSS

Pasangan yang di tengah dipilih dari 4 pasangan yang lain.

Maka banyaknya cara = $2 \cdot 4 \cdot 3! \cdot 3! = 288$

Maka banyaknya cara = 48 + 48 + 48 + 48 + 48 + 96 + 96 + 96 + 288 = 816 cara

$\therefore$ Jadi, banyaknya cara menempatkan keempat pasang suami isteri ke-8 kursi adalah **816.**

18. a. Untuk a = 1

- Untuk a = 1 dan b = 1.
  Untuk c = 1 maka nilai d ada 9 kemungkinan. Untuk c = 2 ada 8 kemungkinan. ···· dst.
  Maka untuk a = 1 dan b = 1 ada 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45 kemungkinan.
- Untuk a = 1 dan b = 2
  Sama dengan untuk a = 1 dan b = 1 dikurangi dengan untuk c = 1.
  Maka untuk a = a dan b = 2 ada 45 − 9 = 36 kemungkinan.
- Untuk a = 1 dan b = 3
  Ada 36 − 8 = 28 kemungkinan

  ⋮

  dst

Untuk a = 1 ada 45 + 36 + 28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1

b. Untuk a = 2

Sama dengan untuk a = 1 dikurangi untuk b = 1

Untuk a = 2 ada 36 + 28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1

⋮

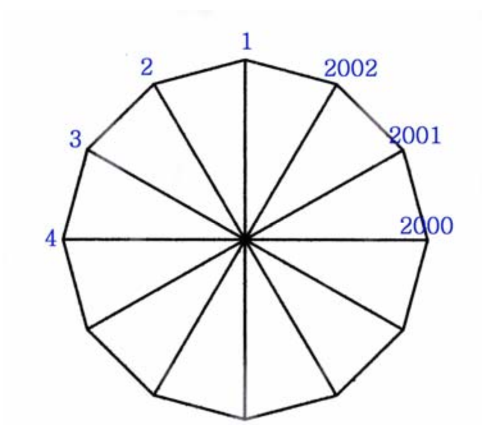
dst

Misalkan banyaknya bilangan = N.

N = $1 \cdot 45 + 2 \cdot 36 + 3 \cdot 28 + 4 \cdot 21 + 5 \cdot 15 + 6 \cdot 10 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 3 + 9 \cdot 1 = 495$

$\therefore$ Banyaknya bilangan yang memenuhi $a \le b \le c \le d$ adalah **495**

19.



Misal :

A = Banyaknya segitiga seluruhnya yang dapat dibentuk termasuk yang sisinya merupakan sisi R.

B = Banyaknya segitiga yang dapat dibentuk dengan hanya 1 sisinya yang merupakan sisi R.

C = Banyaknya segitiga yang dapat dibentuk dengan 2 sisinya merupakan sisi R.

- Banyaknya segitiga seluruhnya yang dapat dibentuk termasuk yang sisinya merupakan sisi R
  Segitiga dibentuk dari 3 titik yang tidak segaris, maka banyaknya segitiga yang dapat dibentuk adalah ${}_{2002}C_3 = \frac{2002 \cdot 2001 \cdot 2000}{6}$ = 2002 · 667· 1000
- Banyaknya segitiga yang dapat dibentuk dengan hanya 1 sisinya yang merupakan sisi R.
  Untuk membentuk segitiga ini maka 2 dari 3 titiknya harus berurutan, namun ketiga titiknya tidak berurutan. Misal kedua titik tersebut adalah n dan n+1, maka titik ketiga tidak boleh n−1 atau n+2. Banyaknya 2 titik yang berurutan ada 2002 kemungkinan, yaitu 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, ⋯, 2001-2002, 2002-1. Misalkan titik yang kita pilih adalah 2-3, maka titik ketiga tidak boleh titik 1 atau 4, maka banyaknya kemungkinan 1 titik ketiga adalah 1998 cara.
  Banyaknya segitiga yang dapat dibentuk adalah 1998 x 2002
- Banyaknya segitiga yang dapat dibentuk dengan 2 sisinya merupakan sisi R
  Untuk membentuk segitiga ini maka ke-3 titiknya harus berurutan. Banyaknya segitiga yang dapat dibentuk adalah 2002, yaitu 1-2-3, 2-3-4, 3-4-5, ⋯, 2001-2002-1, 2002-1-2.

Banyaknya segitiga dimaksud adalah = A − B − C

= 2002 · 667 · 1000 − 1998 · 2002 − 2002

= 2002 (667 · 1000 − 1999)

= 1331332002

∴ Banyaknya segitiga yang semua titik sudutnya adalah titik sudut R, tetapi tidak ada sisinya yang merupakan sisi R adalah **1.331.332.002**

20. Nilai total = 7 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 22

Nilai maksimum yang dapat diperoleh SMU Pipit adalah 7 + 5 + 4 + 3 + 2 = 21

Misal nilai minimum SMU Pipit adalah x maka nilai sisa adalah 22 − x.

Nilai minimum yang dapat diperoleh adalah jika nilai sisa yang ada terdistribusi merata kepada ketiga

SMU yang lain. Misal nilai masing-masing ketiga SMU yang lain adalah k, maka :

x + 3k = 22 dan x > k

3x > 22 − x. Maka x > 22/4.

Jika x = 6 maka nilai sisa = 22 − 6 = 16. Ada 2 SMU mendapat nilai 5 dan satu SMU mendapat nilai 6. Hal yang tidak boleh karena berarti tidak ada pemenang.

Jika x = 7 maka nilai sisa = 22 − 7 = 15. Yang berarti ketiga SMU yang lain masing-masing mendapat nilai 5.

Nilai 5 dapat diperoleh dari 5 ; 3 + 2 dan 4 + 1 yang berarti memenuhi syarat.

Maka nilai maksimum SMU Pipit = 21 sedangkan nilai minimunmnya = 7. Semua nilai dari 7 sampai 21 semua dapat diperoleh dari kombinasi : 7, 5, 4, 3, 2, 1. Nilai dari 7 sampai dengan 21 ada 15.

∴ Banyaknya kemungkinan nilai SMU pemenang adalah **15**

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2003
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2002

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Bagian Kedua

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN KEDUA

1.
- Jika m adalah bilangan yang terbesar
  Berdasarkan (c) dan (a), maka p membagi m sedangkan k membagi p sehingga m > p > k
  Berdasarkan (d), $\ell \geq$ n + p, maka ℓ > n dan ℓ > p sehingga m > ℓ > p > k
  Berdasarkan (e) :
  - Jika k membagi n maka n membagi p sehingga p > n > k. Urutan yang mungkin adalah m > ℓ > p > n > k
  - Jika p membagi n maka n membagi k sehingga k > n > p. Karena p > k maka hal ini merupakan sebuah kontradiksi.
- Jika m adalah bilangan terkecil
  Berdasarkan (c) dan (a), maka m membagi p dan p membagi k sehingga k > p > m
  Berdasarkan (e) :
  - Jika k membagi n maka n membagi p sehingga p > n > k. Karena k > p maka hal ini merupakan sebuah kontradiksi.
  - Jika p membagi n maka n membagi k sehingga k > n > p. Akibatnya k > n > p > m.

  Berdasarkan (d) :
  - Karena n = ℓ – p maka ℓ = n + p dan karena p < n maka n < ℓ < 2n. Karena n harus membagi ℓ maka hal tersebut tidak mungkin.
  - Karena n < ℓ – p maka ℓ > p+ n. Sehingga tidak dapat ditentukan yang lebih besar antara ℓ dan k, maka urutan yang mungkin adalah : k > ℓ > n > p > m atau ℓ > k > n > p > m.

∴ Semua urutan yang mungkin bagi k, ℓ, m, n dan p adalah :
1. **m > ℓ > p > n > k atau**
2. **k > ℓ > n > p > m atau**
3. **ℓ > k > n > p > m**

2. Alternatif 1 :

Misal $m = \frac{3p+25}{2p-5} = \frac{2p-5+p+30}{2p-5} = 1 + \frac{p+30}{2p-5}$ ………. (1)

Ambil p + 30 = 2p – 5 maka p = 35.
- Untuk p > 35, maka p + 30 < 2p – 5 sehingga $\frac{p+30}{2p-5} < 1$ sehingga tidak mungkin m bilangan bulat.
- Untuk 0 < p < 35
  Semakin besar nilai p, maka perbandingan p + 30 dan 2p – 5 akan semakin kecil sehingga nilai m semakin kecil mendekati satu.

Karena m > 0 maka 2p – 5 > 0. Akibatnya p $\geq$ 3
Bentuk di atas dapat juga diubah menjadi :

2pm – 5m = 3p + 25
p(2m–3) = 5m + 25

$p = \frac{5m+25}{2m-3}$ ………. (2)

dengan 2m – 3 > 0 atau m > 1.

Berdasarkan persamaan (1)

Jika p = 3 maka m = 1 + 33/1 = 34 (bilangan bulat)
Jika p = 4 maka m = 37/3 (bukan bilangan bulat)
Jika p = 5 maka m = 40/5 = 8 (bilangan bulat)
Jika p = 6 maka m = 43/7 (bukan bilangan bulat)
Jika p = 7 maka m = 36/9 (bukan bilangan bulat)
Jika p = 8 maka m = 49/11 (bukan bilangan bulat)
Jika p = 9 maka m = 52/13 = 4 (bilangan bulat)

Karena semakin besar nilai p maka nilai m semakin kecil, maka sesuai persamaan (1) dicoba :

Jika m = 3 maka p = 40/3 (bukan bilangan bulat)
Jika m = 2 maka p = 35 (bilangan bulat)

Alternatif 2 :

Karena $m = \frac{3p+25}{2p-5}$ maka 2mp − 5m = 3p + 25.

4mp − 10m = 6p + 50

(2m − 3)(2p − 5) = 50 + 15

(2m − 3)(2p − 5) = 65

2m − 3 dan 2p − 5 masing-masing adalah faktor dari 65. Faktor dari 65 adalah ±1, ±5, ±13, ±65.

Jika 2p − 5 = −1 dan 2m − 3 = −65 maka p = 2 dan m = −31 (tidak memenuhi p dan m asli)
Jika 2p − 5 = 1 dan 2m − 3 = 65 maka p = 3 dan m = 34 (memenuhi p dan m asli)
Jika 2p − 5 = −5 dan 2m − 3 = −13 maka p = 0 dan m = −5 (tidak memenuhi p dan m asli)
Jika 2p − 5 = 5 dan 2m − 3 = 13 maka p = 5 dan m = 8 (memenuhi p dan m asli)
Jika 2p − 5 = −13 dan 2m − 3 = −5 maka p = −4 dan m = −1 (tidak memenuhi p dan m asli)
Jika 2p − 5 = 13 dan 2m − 3 = 5 maka p = 9 dan m = 4 (memenuhi p dan m asli)
Jika 2p − 5 = −65 dan 2m − 3 = −1 maka p = −30 dan m = 1 (tidak memenuhi p dan m asli)
Jika 2p − 5 = 65 dan 2m − 3 = 1 maka p = 35 dan m = 2 (memenuhi p dan m asli)

∴ Bilangan bulat positif p sehingga $\frac{3p+25}{2p-5}$ juga bulat positif adalah **3 ; 5 ; 9 atau 35**

3. Misal ke-6 angka itu A, B, C, D, E, F dengan A ≥ B ≥ C ≥ D ≥ E ≥ F dengan 0 ≤ A, B, C, D, E, F ≤ 9. Penyusunan bilangan yang benar sehingga didapat selisih tiga bilangan pertama dengan tiga bilangan terakhir seminimal mungkin adalah ACEBDF.

   Misal T = A + C + E − B − D − F

   T = (A − F) + (C − B) + (E − D)

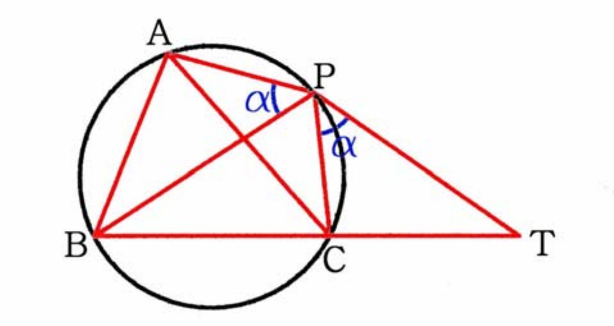
   Jelas bahwa A − F ≤ 9. Tanda kesamaan akan terpenuhi hanya apabila A = 9 dan F = 0.

   Karena C ≤ B dan E ≤ D maka C − B ≤ 0 dan E − D ≤ 0. Tanda kesamaan terjadi hanya jika C = B dan E = D.

   Maka T = (A − F) + (C − B) + (E − D) ≤ 9 + 0 + 0 = 9

   ∴ **Terbukti bahwa jumlah tiga angka pertama dan jumlah tiga angka terakhir suatu bilangan enam angka dapat disusun sedemikian rupa sehingga berselisih tidak lebih dari 9**

4. Pembuktian *Teorema Ptolemy*



ABCP adalah segiempat talibusur atau dengan kata lain titik P terletak pada lingkaran luar segitiga ABC dengan titik P terletak pada busur AC. Misal $\angle APB = \alpha$. Dibuat segitiga PCT dengan CT adalah perpanjangan BC dan $\angle CPT = \alpha$. Karena ABCP adalah segi empat tali busur maka $\angle BAP + \angle BCP = 180^o$ sehingga $\angle BAP = \angle PCT$. Karena $\angle APB = \angle CPT$ dan $\angle BAP = \angle PCT$ maka ΔBAP sebangun dengan ΔPCT.

Akibatnya $\frac{PA}{PC} = \frac{AB}{CT} = \frac{PB}{PT}$ .... (1)

$CT = \frac{AB}{PA} \cdot PC$ .... (2)

Dari persamaan (1) juga didapat : $\frac{PA}{PB} = \frac{PC}{CT}$.

Karena $\angle APC = \angle BPT = \alpha + \angle BPC$ dan $\frac{PA}{PB} = \frac{PC}{PT}$ maka ΔAPC sebangun dengan ΔBPT

Akibatnya $\frac{PA}{PB} = \frac{PC}{PT} = \frac{AC}{BT}$ .... (3)

$BT = \frac{PB}{PA} \cdot AC$ ....(4)

BT = BC + CT

Subtitusikan pers. (2) dan (4)

$$\frac{PB}{PA} \cdot AC = BC + \frac{AB}{PA} \cdot PC$$

$PB \cdot AC = PA \cdot BC + PC \cdot AB$ (*Teorema Ptolemy*)

Jika ΔABC adalah segitiga sama sisi, maka AC = BC = AB, maka :

PB = PA + PC (Terbukti)

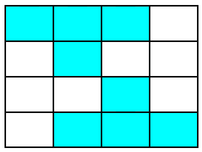
atau

Jika PB = PA + PC dan karena AB = BC = AC, maka

$PB \cdot AC = PA \cdot BC + PC \cdot AB$

$\therefore$ Sesuai dengan *Teorema Ptolemy*, maka ABCP adalah segi empat tali busur atau dengan kata lain **titik P terletak pada lingkaran luar segitiga ABC.**

5. a.



Karena petak 4 x 4 dapat ditutupi oleh 4 buah *Tetromino-T*, maka tentunya **kita dapat menutup petak catur 8 x 8 dengan 16 buah *Tetromino-T*.**

b. Andaikan 25 tetronimo tersebut dapat menutup papan ‘catur’ 10 x 10 petak.
Sebuah *tetromino-T* akan menutupi 1 buah petak hitam dan 3 buah petak putih atau 1 buah petak putih dan 3 buah petak hitam pada papan catur.

Karena 1 dan 3 bilangan ganjil serta banyaknya *Tetromino-T* ada 25 yang juga merupakan bilangan ganjil maka ke-25 *Tetromino-T* tersebut akan menutupi sejumlah ganjil petak hitam dan sejumlah ganjil petak putih pada papan catur. Hal ini kontradiksi dengan kenyataan bahwa pada papan catur 10 x 10 terdapat 50 petak hitam dan 50 petak putih.
Terbukti bahwa kita tidak dapat menutup papan ‘catur’ 10 X 10 petak dengan 25 *tetromino-T*.

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2003

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2002

YOGYAKARTA, 10 SEPTEMBER 2002

Bidang Matematika

Waktu : 4 Jam

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH UMUM
TAHUN 2002

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2002
YOGYAKARTA, 10 SEPTEMBER 2002

BIDANG : MATEMATIKA

WAKTU : 4 JAM

1. Buktikan bahwa $n^4 - n^2$ habis dibagi oleh 12 untuk sebarang bilangan bulat $n > 1$

2. Lima buah dadu (enam-muka) akan dilempar satu demi satu, lalu hasil kelima angka yang muncul akan dihitung. Manakah yang lebih besar peluang terjadinya hasil kali 180 atau hasil kali 144 ?

3. Tentukan semua solusi dari sistem persamaan

$$x + y + z = 6$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 12$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = 24$$

4. Diberikan segitiga ABC dengan AC > BC. Pada lingkaran luar segitiga ABC terletak titik D yang merupakan titik tengah busur AB yang memuat titik C. Misalkan E adalah titik pada AC sehingga DE tegak lurus pada AC.
Buktikan bahwa AE = EC + CB

5. Sembilan dari sepuluh bilangan berikut : 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 16, 18, 19 akan diisikan ke dalam petakkosong pada tabel 3 x 5 di samping. Sesudah semua petak terisi, jumlah bilangan pada setiap baris akan sama. Demikian pula halnya jumlah bilangan pada setiap kolom akan sama. Tentukan semua pengisian petak yang mungkin.

10		
		9
	3	
11		17
	20	

6. Tentukan semua bilangan prima p yang membuat $4p^2 + 1$ dan $6p^2 + 1$ keduanya bilangan prima.

7. Misalkan ABCD sebuah belah ketupat dengan $\angle A = 60^o$ dan P adalah titik potong kedua diagonal AC dan BD. Misalkan Q, R dan S tiga titik pada (keliling) belah ketupat. Jika PQRS juga membentuk belah ketupat, tunjukkan bahwa tepat satu di antara Q, R, S berimpit dengan titik sudut belah ketupat ABCD.

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2003

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2002

YOGYAKARTA, 10 SEPTEMBER 2002

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

1. Alternatif 1 :
   $n^4 - n^2 = n^2(n^2 - 1) = n^2(n - 1)(n + 1)$
   $(n - 1)$, n dan $(n + 1)$ adalah 3 bilangan bulat berurutan maka 3! = 6 membagi $(n - 1)n(n + 1)$.
   Maka $3 \mid n^4 - n^2$.
   Jika n genap maka $4 \mid n^2$ sedangkan jika n ganjil maka $4 \mid n^2 - 1$. Maka $4 \mid n^2(n^2 - 1) = n^4 - n^2$
   Karena 3 dan 4 relatif prima maka $n^4 - n^2$ habis dibagi $3 \cdot 4 = 12$.
   Alternatif 2 :
   $n^4 - n^2 = n^2(n^2 - 1) = n^2(n - 1)(n + 1) = (n - 1)n(n + 1)(n + 2 - 2)$
   $n^4 - n^2 = (n - 1)n(n + 1)(n + 2) - 2(n - 1)n(n + 1)$
   $n - 1$, n, $n + 1$ dan $n + 2$ adalah 4 bilangan bulat berurutan maka $4! = 24 \mid (n - 1)n(n + 1)(n + 2)$.
   $(n - 1)$, n dan $(n + 1)$ adalah 3 bilangan bulat berurutan maka 3! = 6 membagi $(n - 1)n(n + 1)$.
   Maka $12 \mid 2(n - 1)n(n + 1)$.
   Maka $12 \mid n^4 - n^2$
   $\therefore$ **Terbukti bahwa $n^4 - n$ habis dibagi 12 untuk sebarang bilangan bulat n > 1.**

2. $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$
   Maka kemungkinan lima mata dadu yang memenuhi perkaliannya = 180 adalah (1, 3, 3, 4, 5), (1, 2, 3, 5, 6), (1, 1, 5, 6, 6), (2, 2, 3, 3, 5) dan permutasinya yang secara berurutan banyaknya kemungkinan tersebut adalah $\frac{5!}{2!}$, $5!$, $\frac{5!}{2!\cdot 2!}$, $\frac{5!}{2!\cdot 2!}$
   Peluang hasil kali mata dadu sama dengan 180 adalah = $\frac{1}{6^5}\left(\frac{5!}{2!} + 5! + 2\cdot\frac{5!}{2!\cdot 2!}\right) = \frac{240}{6^5}$
   $144 = 2^4 \cdot 3^2$
   Maka kemungkinan lima mata dadu yang memenuhi perkaliannya = 144 adalah (1, 1, 4, 6, 6), (1, 2, 2, 6, 6), (1, 2, 3, 4, 6), (1, 3, 3, 4, 4), (2, 2, 3, 3, 4), (2, 2, 2, 3, 6) dan permutasinya yang secara berurutan banyaknya kemungkinan tersebut adalah $\frac{5!}{2!\cdot 2!}$, $\frac{5!}{2!\cdot 2!}$, $5!$, $\frac{5!}{2!\cdot 2!}$, $\frac{5!}{2!\cdot 2!}$, $\frac{5!}{3!}$.
   Peluang hasil kali mata dadu sama dengan 144 adalah = $\frac{1}{6^5}\left(4\cdot\frac{5!}{2!\cdot 2!} + 5! + \frac{5!}{3!}\right) = \frac{260}{6^5}$
   $\therefore$ **Maka peluang yang lebih besar adalah terjadinya hasil kali 144.**

3. Alternatif 1 :
   $x + y + z = 6$ .... (1)
   $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ .... (2)
   $x^3 + y^3 + z^3 = 24$ .... (3)
   $(x + y + z)^2 = 6^2$
   $x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) = 36$
   $xy + xz + yz = 12$ .... (4)
   Alternatif 1.a :
   $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) = 6 \cdot 12 = 72$
   $x^3 + y^3 + z^3 + xy^2 + xz^2 + x^2y + x^2z + yz^2 + y^2z = 72$
   $xy^2 + xz^2 + x^2y + x^2z + yz^2 + y^2z = 48$ .... (5)

$(x + y + z)(xy + xz + yz) = 6 \cdot 12 = 72$

$xy^2 + xz^2 + x^2y + x^2z + yz^2 + y^2z + 3xyz = 72$. Maka $48 + 3xyz = 72$

$xyz = 8$ .... (6)

Dari persamaan (1), (4) dan (6) dapat disimpulkan bahwa x, y dan z adalah akar-akar persamaan $t^3 - 6t^2 + 12t - 8 = 0$ sehingga $(t - 2)^3 = 0$

Maka $x = y = z = 2$

$\therefore$ **Semua solusi yang memenuhi sistem persamaan tersebut hanya x = y = z = 2.**

Alternatif 1.b :

Dengan AM-GM

$x^2 + y^2 \geq 2xy$

$x^2 + z^2 \geq 2xz$

$y^2 + z^2 \geq 2yz$

Tanda kesamaan terjadi jika dan hanya jika $x = y = z$

Maka

$12 = x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz = 12$ .... (7)

Berdasarkan persamaan (2) dan (4) maka $x = y = z$

Karena $x + y + z = 6$ maka $x = y = z = 2$.

Setelah dicek ternyata $x = y = z = 2$ memenuhi ketiga persamaan.

$\therefore$ **Semua solusi yang memenuhi sistem persamaan tersebut hanya x = y = z = 2.**

Alternatif 2 :

Dari persamaan (1) dan (2) didapat

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}} = \frac{x + y + z}{3} \quad \text{.................................} \quad (8)$$

Berdasarkan ketaksamaan QM-AM maka

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}} \geq \frac{x + y + z}{3} \quad \text{..........................} \quad (9)$$

Tanda kesamaan terjadi jika dan hanya jika $x = y = z$.

Berdasarkan persamaan (8) dan (9) dapat disimpulkan bahwa $x = y = z = 2$.

Setelah dicek ternyata $x = y = z = 2$ memenuhi ketiga persamaan.

$\therefore$ **Semua solusi yang memenuhi sistem persamaan tersebut hanya x = y = z = 2.**

Alternatif 3 :

$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 12 - 4(x + y + z)$

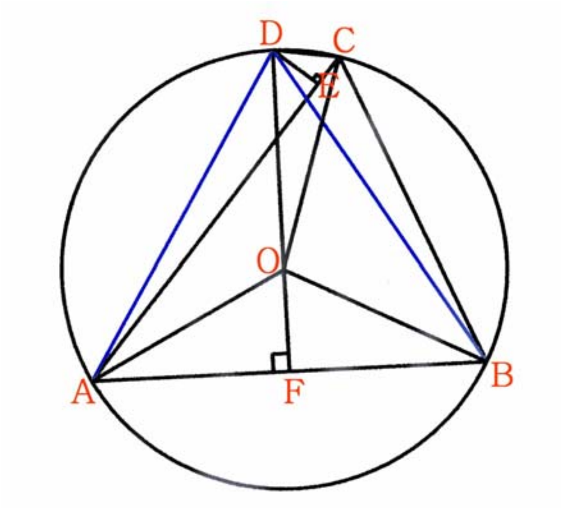
$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 12 + 12 - 4(6) = 0$

Karena bilangan kuadrat tidak mungkin negatif maka kesamaan terjadi hanya jika $x = y = z = 2$.

Setelah dicek ternyata $x = y = z = 2$ memenuhi ketiga persamaan.

$\therefore$ **Semua solusi yang memenuhi sistem persamaan tersebut hanya x = y = z = 2.**

4.



Misalkan $\angle ACB = \gamma$

Karena ΔABD dan ΔABC memiliki alas yang sama dan titik A, B, C dan D semuanya terletak pada satu lingkaran yang sama maka $\angle ADB = \angle ACB = \gamma$.

Titik F adalah pertengahan AB dengan DF tegak lurus AB. Maka AD = BD.

Karena DF tegak lurus AB dan F pertengahan maka $\angle ADF = \angle FDB = \frac{1}{2}\gamma$.

Karena O pusat lingkaran maka $\angle AOB = 2\angle ACB = 2\gamma$ serta $\angle AOB = \angle FOB = \gamma$

$AD = BD = \dfrac{AB}{2\sin\frac{1}{2}\gamma}$ .... (1)

ABCD adalah segiempat talibusur, maka sesuai teorema *Ptolemy* berlaku :

$AC \cdot BD = DC \cdot AB + AD \cdot BC$

Karena AD = BD maka

$DC = \dfrac{(AC - BC)}{2\sin\frac{1}{2}\gamma}$ .... (2)

Karena DE tegak lurus AC maka pada ΔADE berlaku $AD^2 = DE^2 + AE^2$ .... (3)

Pada ΔDEC berlaku $DC^2 = DE^2 + EC^2$ .... (4)

Dari persamaan (3) dan (4) didapat :

$AD^2 - DC^2 = AE^2 - EC^2$

Mengingat AE = AC − EC maka :

$AD^2 - DC^2 = AC^2 - 2\ AC \cdot EC$

$$\frac{(AB)^2 - (AC - BC)^2}{4\sin^2\frac{1}{2}\gamma} = AC^2 - 2AC \cdot EC$$

Mengingat bahwa $2\sin^2 \frac{1}{2}\gamma = 1 - \cos\gamma$ dan $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\ AC\ BC \cos\gamma$ maka :

$$\frac{AC \cdot BC \cdot (2 - 2\cos\gamma)}{2 - 2\cos\gamma} = AC^2 - 2AC \cdot EC$$

BC = AC − 2EC

Karena AC = AE + EC maka AE = EC + CB (terbukti)

$\therefore$ **Terbukti bahwa AE = EC + CB.**

5. Karena jumlah pada setiap barisan sama dan jumlah pada setiap kolom sama maka jumlah ke-15 bilangan tersebut akan habis dibagi 3 dan 5 yang berarti jumlah ke-15 bilangan tersebut habis dibagi 15.
   Jumlah ke-16 bilangan = 3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+16+17+18+19+20 = 178
   Karena 178 $\equiv$ 13 (mod 15) maka bilangan yang harus dibuang adalah 13.

10	A	B
C	D	9
E	3	F
11	G	17
H	20	J

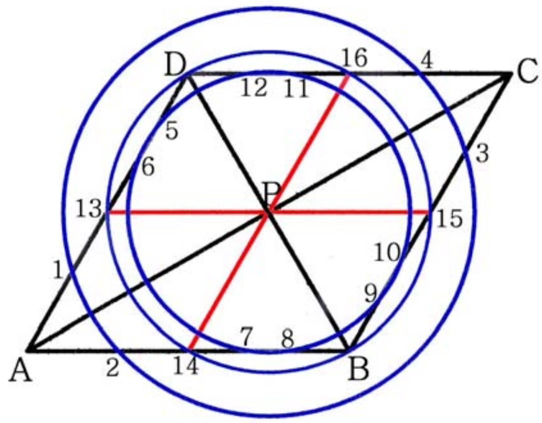
   Karena jumlah bilangan = 165 maka jumlah masing-masing baris = 165 : 5 = 33 dan jumlah pada masing-masing kolom = 165 : 3 = 55.
   Berdasarkan hal tersebut maka jelas bahwa G = 5.
   H + J = 13. Pasangan yang mungkin memenuhi adalah (6, 7) atau (7, 6)
   A + B = 23. Pasangan yang mungkin memenuhi adalah (4, 19), (19, 4). Pasangan (7, 16) dan (16, 7) tidak mungkin memenuhi sebab 7 pasti berada pada baris ke-5.
   Jika A = 4 dan B = 19 maka A + D + 3 + G + 20 = 55. Akibatnya D = 23 (tidak ada bilangan 23).
   Maka nilai yang mungkin memenuhi hanya A = 19 dan B = 4 yang dipenuhi oleh D = 8.
   Pada baris ke-2, C + D + 9 = 33. Maka C = 16.
   Pada baris ke-3 berlaku E + F = 30. Pasangan (E, F) yang mungkin hanya (12, 18) atau (18, 12).
   Jika E = 18 maka 10 + C + E + 11 + H = 55. Akibatnya H = 0 (tidak ada bilangan 0)
   Maka kemungkinan nilai E hanya jika E = 12. Maka F = 18 dan H = 6 yang berakibat J = 7
   Dengan mengecek kembali semua bilangan tersebut maka semuanya terpenuhi.
   $\therefore$ **Hanya ada satu kemungkinan pengisian petak yaitu :**

10	19	4
16	8	9
12	3	18
11	5	17
6	20	7

6. Karena p prima maka $4p^2 + 1$ dan $6p^2 + 1$ keduanya bilangan prima > 5.
   Alternatif 1 :
   Jika $p^2 \equiv \pm 1$ (mod 5) maka $4p^2 + 1 \equiv 0$ (mod 5) yang tidak mungkin merupakan bilangan prima.
   Jika $p^2 \equiv \pm 2$ (mod 5) maka $6p^2 + 1 \equiv 0$ (mod 5) yang tidak mungkin merupakan bilangan prima.
   Sedangkan jika $p^2 \equiv 0$ (mod 5) maka bilangan prima p yang memenuhi hanya p = 5.
   Untuk p = 5 maka $4p^2 + 1 = 101$ dan $6p^2 + 1 = 151$ yang keduanya merupakan bilangan prima.
   Alternatif 2 :
   Angka satuan bilangan kuadrat adalah 0, 1, 4, 5, 6, 9.
   Jika angka satuan p^2 adalah 0 maka angka satuan p juga 0 yang membuat tidak mungkin p prima.
   Jika angka satuan p^2 adalah 5 maka angka satuan p juga 5. Bilangan prima p yang memenuhi hanya jika p = 5 maka $4p^2 + 1 = 101$ dan $6p^2 + 1 = 151$ yang keduanya merupakan bilangan prima.

Jika angka satuan p^2 adalah 1 atau 6 maka angka satuan $4p^2 + 1$ adalah 5 yang membuat tidak mungkin $4p^2 + 1$ bilangan prima.
Jika angka satuan p^2 adalah 4 atau 9 maka angka satuan $6p^2 + 1$ adalah 5 yang membuat tidak mungkin $5p^2 + 1$ bilangan prima.
$\therefore$ **Maka nilai p prima yang memenuhi $4p^2 + 1$ dan $6p^2 + 1$ hanya p = 5.**

7. ABCD adalah belah ketupat sehingga AB = BC = CD = DA.
Tidak mungkin Q, R dan S ketiga berimpit dengan titik sudut belah ketupat ABCD sebab akan menyebabkan terdapat tiga titik P dan dua di antara Q, R dan S akan sejajar.
Misalkan terdapat dua titik, misalkan Q dan R, yang berhimpit dengan titik sudut ABCD. Salah satu PQ atau PR adalah merupakan sisi belah ketupat PQRS. Tanpa mengurangi keumuman misalkan PQ adalah sisi belah ketupat PQRS. Maka PQ akan sejajar dengan salah satu diagonal ABCD. Karena R berhimpit dengan titik sudut belah ketupat ABCD maka tidak mungkin ada ruas garis sejajar PQ dengan salah ujungnya merupakan titik sudut ABCD.



Misalkan titik Q terletak pada sisi belah ketupat ABCD sehingga PQ tidak sejajar dengan salah satu sisi ABCD serta PQ merupakan salah satu sisi belah ketupat PQRS. Misalkan juga titik R adalah titik sehingga PR juga merupakan sisi belah ketupat PQRS. Tidak mungkin PR sejajar sisi-sisi ABCD sebab akan membuat panjang PR = ½AB ≠ PQ. Maka titik S tidak akan mungkin terletak pada sisi yang sama dengan Q dan R sebab akan menyebabkan QS atau QR sejajar sisi ABCD, padahal PQ maupun PR tidak sejajar sisi ABCD.

Misalkan terdapat dua titik di antara Q, R atau S yang terletak pada sisi yang sama. Misalkan titiki tersebut adalah QR. Tidak mungkin QR diagonal sebab akan menyebbakan titik S terletak di luar ABCD. Akibatnya PS harus sejajar QR maka titik S adalah pertengahan dari sisi AB. BC, CD atau DA. Panjang PS = ½AB. Dengan pusat P dan jari-jari PS dibuat lingkaran yang memotong belah ketupat ABCD di pertengahan sisi AB, BC, CD, DA, B atau D Akibatnya titik Q atau R haruslah terletak pada pertengahan sisi ABCD. Maka titik keempat haruslah terletak pada A, B, C atau D.

Jika tidak terdapat dua titik yang terletak pada sisi yang sama. Maka akan terdapat dua titik yang terletak pada sisi yang sejajar. Tanpa mengurangi keumuman misalakn sisi yang sejajar tersebut adalah AD dan BC.

Jika titik Q terletak pada bagian A-13. Misalkan juga titik Q adalah titik 1. Dari titik Q dibuat garis lurus melalui P dan meootng sisi BC di titik K. Karena ΔAPD kongruen dengan ΔBPC (ketiga sudutnya sama dan AD = BC), maka PQ = PK. Dengan P sebagai pusat dan jari-jari PQ dibuat sebuah lingkaran yang akan memotong sisi BC di titik K. Maka agar terbentuk belah ketupat PQRS, haruslah titik K merupakan salah satu titik sudut belah ketupat PQRS. Padahal Q, P dan K berada pada satu garuis lurus. Maka tidak mungkin dapat dibentuk belah ketupat PQRS dengan salah satu titik terletak pada sisi A-13.

Jika titik Q terletak pada bagian 13-D. Tanpa mengurangi keumuman misalkan titik Q adalah titik 5. Dengan pusat P dan jari-jari PQ dapat dibuat sebuah lingkaran yang memotong belah ketupat ABCD di titik 6 sampai 12. Dengan cara yang sama dengan sebelumnya maka 5-P-9, 6-P-10, 7-P-11, 8-P-12 masing-masing merupakan garis lurus. Karena Q adalah titik 5 maka satu titik yang terletak pada sisi BC adalah titik 10, misalkan titik ini adalah R. Dari titik Q dibuat garis sejajar PR yang hanya akan memotong sisi BC sehingga pada sisi BC akan terdapat dua titik di antara Q, R dan S dan sesuai penjelasan sebelumnya hal tersebut tidak akan terpenuhi .

Maka dapat disimpulkan bahwa PQRS akan berbentuk belah ketupat hanya jika dua titik di antara Q, R atau S merupakan pertengahan sisi AB, BC, CD atau DA dan satu di anatar berhimpit dengan titik A, B, C atau D.

$\therefore$ **Terbukti bahwa jika PQRS membentuk belah ketupat maka tepat satu di antara Q, R atau S berhimpit dengan titik sudut belah ketupat ABCD.**