# Pembahasan Olimpiade Matematika SMA
# Tingkat Kabupaten
# Tahun 2012

Oleh Tutur Widodo

1. Banyaknya bilangan bulat $n$ yang memenuhi

$$(n-1)(n-3)(n-5)(n-2013) = n(n+2)(n+4)(n+2012)$$

adalah ...

**Jawaban : 0 ( tidak ada )**

Jika $n$ genap maka ruas kanan genap tetapi ruas kiri ganjil. Sedangkan jika $n$ ganjil maka ruas kanan ganjil tetapi ruas kiri genap. Jadi, tidak ada nilai $n$ yang memenuhi.

2. Banyaknya pasangan bilangan asli berbeda yang selisih kuadratnya 2012 adalah ...

**Jawaban : 1**

Misal kedua bilangan tersebut adalah $a$ dan $b$ maka $a^2 - b^2 = 2012 \quad \Leftrightarrow \quad (a+b)(a-b) = 2012$. Oleh karena itu, $(a+b)$ dan $(a-b)$ adalah faktor positif dari 2012. Karena faktor positif dari 2012 adalah 1, 2, 4, 503, 1006 dan 2012. Selain itu, karena $(a+b)$ dan $(a-b)$ paritasnya sama maka nilai yang mungkin adalah $a+b = 1006$ dan $a-b = 2$. Sehingga diperoleh, $a = 504$ dan $b = 502$.

3. Bilangan terbesar $x$ kurang dari 1000 sehingga terdapat tepat dua bilangan asli $n$ sehingga $\dfrac{n^2+x}{n+1}$ merupakan bilangan asli adalah ...

**Jawaban : 960**

Perhatikan,

$$\frac{n^2+x}{n+1} = n - 1 + \frac{x+1}{n+1}$$

maka agar $\dfrac{n^2+x}{n+1}$ bulat, haruslah $n+1$ faktor dari $x+1$. Oleh karena itu, supaya hanya ada tepat dua nilai $n$ maka $x+1$ harus memiliki tepat 3 faktor. Dengan kata lain $x+1$ adalah kuadrat suatu bilangan prima. Jadi, diperoleh $x + 1 = 31^2 = 961$ sehingga $x = 960$.

4. Diketahui suatu kelas terdiri dari 15 siswa. Semua siswa tersebut akan dikelompokkan menjadi 4 kelompok yang terdiri dari 4, 4, 4 dan 3 siswa. Ada berapa cara pengelompokan tersebut?

**Jawaban :** $\dfrac{\binom{15}{4}\binom{11}{4}\binom{7}{4}}{3!}$

Misal kelompok yang terbentuk adalah A, B, C dan D dengan A, B dan C terdiri dari 4 anggota dan D terdiri dari 3 anggota. Maka :

- Banyaknya cara menyusun A ada $\binom{15}{4}$
- Banyaknya cara menyusun B ada $\binom{11}{4}$
- Banyaknya cara menyusun C ada $\binom{7}{4}$

Untuk kelompok D tinggal sisanya saja, jadi tidak perlu repot menghitung. Tetapi yang perlu diingat adalah dengan cara ini setiap kasus dihitung sebanyak 3!= 6 kali.

Jadi, jawabannya adalah $\dfrac{\binom{15}{4}\binom{11}{4}\binom{7}{4}}{3!}$

5. Diberikan segitiga siku-siku $ABC$, dengan $AB$ sebagi sisi miringnya. Jika keliling dan luasnya berturut-turut 624 dan 6864. Panjang sisi miring segitiga tersebut adalah ...

   **Jawaban : 290**

   Dari keterangan soal diperoleh,

$$a + b + c = 624 \quad \Leftrightarrow \quad a + b = 624 - c$$

   dan

$$\frac{ab}{2} = 6864$$

   Dengan rumus phytagoras diperoleh

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ &= (a + b)^2 - 2ab \\ &= (624 - c)^2 - 4 \cdot 6864 \\ &= c^2 - 2 \cdot 624c + 624^2 - 4 \cdot 6864 \end{aligned}$$

   maka diperoleh $c = 290$.

6. Banyaknya tripel bilangan bulat $(x, y, z)$ yang memenuhi

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = x^3 + y^3 + z^3$$

   adalah ...

   **Jawaban : tak hingga**

   Jika $x = k, y = 1 - k$ dan $z = 0$ dengan $k \in \mathbb{Z}$ maka diperoleh,

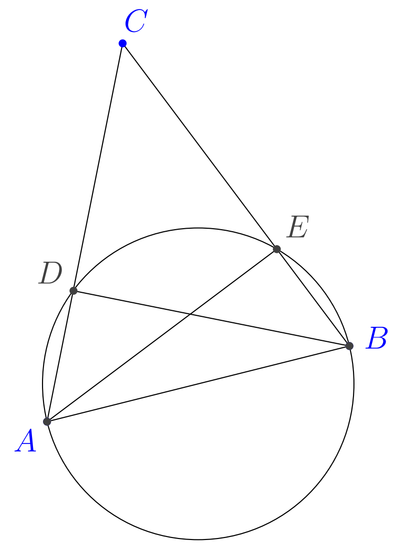
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx &= k^2 + (1 - k)^2 - k(1 - k) \\ &= k^2 + 1 - 2k + k^2 - k + k^2 \\ &= 3k^2 - 3k + 1 \\ &= k^3 + 1 + 3k^2 - 3k - k^3 \\ &= k^3 + (1 - k)^3 \\ &= x^3 + y^3 + z^3 \end{aligned}$$

   ini berarti $(k, 1-k, 0)$ adalah penyelesaian dari $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx = x^3+y^3+z^3$. Oleh karena itu, $(k, 1-k, 0)$ dengan $k \in \mathbb{Z}$ dan semua permutasinya adalah penyelesaian dari $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx = x^3+y^3+z^3$ yang tentu saja jumlahnya ada takhingga.

7. Diberikan suatu lingkaran dengan diameter $AB = 30$. Melalui $A$ dan $B$ berturut-turut ditarik tali busur $AD$ dan $BE$ berpotongan di titik $C$. Jika $AC = 3AD$ dan $BC = 4BE$, maka luas segitiga $ABC$ adalah ...

   **Jawaban : 540**

   Perhatikan sketsa gambar di bawah ini!




Perlu diperhatikan bahwa $\angle ADB = \angle CDB = \angle AEB = \angle AEC = 90°$. Misal, $AD = x$ dan $BE = y$ maka $AC = 3x, CD = 2x, BC = 4y$ dan $CE = 3y$. Dengan teorema Phytagoras pada segitiga $ABD$ dan segitiga $BCD$ diperoleh

$$\begin{aligned} 30^2 - x^2 = (4y)^2 - (2x)^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 900 - x^2 = 16y^2 - 4x^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 900 = 16y^2 - 3x^2 \end{aligned}$$

Demikian pula dengan teorema Phytagoras pada segitiga $ABE$ dan segitiga $ACE$ diperoleh

$$\begin{aligned} 30^2 - y^2 = (3x)^2 - (3y)^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 900 - y^2 = 9x^2 - 9y^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 900 = 9x^2 - 8y^2 \end{aligned}$$

dengan menggabungkan kedua persamaan di atas didapat,

$$16y^2 - 3x^2 = 9x^2 - 8y^2 \quad \Leftrightarrow \quad 24y^2 = 12x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 2y^2$$

sehingga kita peroleh

$$900 = 16y^2 - 3x^2 = 16y^2 - 6y^2 = 10y^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \sqrt{90}$$

Oleh karena itu,

$$AE^2 = 900 - y^2 = 900 - 90 = 810 \quad \Leftrightarrow \quad AE = \sqrt{810}$$

Jadi,

$$\begin{aligned} \text{Luas segitiga } ABC &= \frac{1}{2} BC \cdot AE \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4y \cdot \sqrt{810} \\ &= 2 \cdot \sqrt{90}\sqrt{810} \\ &= 2 \cdot 3\sqrt{10} \cdot 9\sqrt{10} = 540 \end{aligned}$$

8. Misalkan $a, b, c, d,$ dan $e$ adalah bilangan-bilangan bulat sehingga $2^a 3^b 4^c 5^d 6^e$ juga merupakan bilangan bulat. Jika diketahui bahwa nilai mutlak dari $a, b, c, d$ dan $e$ tidak lebih dari 2012 maka nilai terkecil yang mungkin dari $a + b + c + d + e$ adalah ...
**Jawaban : -2012**

Perhatikan,

$$2^a 3^b 4^c 5^d 6^e = 2^a 3^b 2^{2c} 5^d (2\cdot 3)^e = 2^{a+2c+e} 3^{b+e} 5^d$$

Agar $a+b+c+d+e$ minimal, maka haruslah $a+2c+e=0, b+e=0$ dan $d=0$. Dari $a+2c+e=0$ dan $b+e=0$ diperoleh persamaan $b=a+2c$. Karena nilai minimum $b$ yang mungkin adalah $-2012$ maka agar $a+b+c+d+e$ minimum pilih $a=-2012$ dan $c=0$. Sehingga $a+b+c+d+e=a=-2012$.

9. Jika $(\sqrt{2012}+\sqrt{2011})^2 = n+r$ dengan $n$ merupakan bilangan asli dan $0 \le r < 1$, maka $r = ...$

   **Jawaban :** $(\sqrt{2012}+\sqrt{2011})^2 - 8045$

$$(\sqrt{2012}+\sqrt{2011})^2 = 2012 + 2011 + 2\sqrt{2012\cdot 2011}$$

Perhatikan bahwa $2011 < \sqrt{2012\cdot 2011} < 2012$ sehingga $\sqrt{2012\cdot 2011} = 2011 + k$. Akan ditunjukkan bahwa $k < \frac{1}{2}$. Andaikan $k \ge \frac{1}{2}$ maka berakibat

$$\begin{aligned} 2012\cdot 2011 &= (2011+k)^2 \\ &\ge (2011+\frac{1}{2})^2 \\ &= 2011^2 + 2011 + \frac{1}{4} \\ &> 2011\cdot 2012 \end{aligned}$$

yang jelas salah. Oleh karena itu, terbukti $k < \frac{1}{2}$ sehingga $0 \le 2k < 1$.

$$\begin{aligned} (\sqrt{2012}+\sqrt{2011})^2 &= 2012 + 2011 + 2\sqrt{2012\cdot 2011} \\ &= 4023 + 4022 + 2k \\ &= 8045 + r \end{aligned}$$

sehingga $r = (\sqrt{2012}+\sqrt{2011})^2 - 8045$

10. Tentukan semua nilai $b$ sehingga untuk semua $x$ paling tidak salah satu dari $f(x) = x^2 + 2012x + b$ atau $g(x) = x^2 - 2012x + b$ positif.

    **Jawaban :** $b > 0$

    Jumlahkan kedua fungsi, diperoleh

$$f(x) + g(x) = 2x^2 + 2b$$

sehingga untuk sebarang nilai $x$ jika $b > 0$ maka $f(x) + g(x)$ selalu bernilai positif. Ini berarti paling tidak salah satu dari $f(x)$ atau $g(x)$ bernilai positif. Selanjutnya tinggal dibuktikan, untuk $b \le 0$ terdapat $x = t$ sehingga $f(t) \le 0$ dan $g(t) \le 0$. Untuk itu pilih $t = 0$ sehingga

$$f(t) = f(0) = b \le 0 \text{ dan } g(t) = g(0) = b \le 0$$

Jadi, terbukti nilai $b$ yang memenuhi adalah $b > 0$.

11. Jumlah semua bilangan bulat $x$ sehingga ${}^2\log(x^2 - 4x - 1)$ merupakan bilangan bulat adalah ...

    **Jawaban : 4**

    Agar ${}^2\log(x^2 - 4x - 1)$ bernilai bulat maka $x^2 - 4x - 1 = 2^n$ untuk suatu bilangan bulat $n$. Karena $x^2 - 4x - 1$ bernilai bulat maka $n \geq 0$. Perhatikan juga,

$$\begin{aligned} x^2 - 4x - 1 = 2^n \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 4 - 1 = 2^n + 4 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-2)^2 = 2^n + 5 \end{aligned}$$

tetapi karena $(x-2)^2 \equiv 0, 1,$ atau $4 \bmod 8$ dan untuk $n \geq 3, 2^n + 5 \equiv 5 \bmod 8$ maka $n \leq 2$. Jadi, nilai yang memenuhi $n = 0, 1, 2$. Mudah dicek hanya nilai $n = 2$ yang memenuhi dengan memperoleh persamaan kuadrat $x^2 - 4x - 5 = 0$. Jadi, $x_1 + x_2 = 4$.

12. Ada berapa faktor positif dari $2^7 3^5 5^3 7^2$ yang merupakan kelipatan 6?
**Jawaban : 420**
Karena $2^7 3^5 5^3 7^2 = 2^6 3^4 5^3 7^2 \cdot 6$, maka banyaknya faktor positif $2^7 3^5 5^3 7^2$ yang merupakan kelipatan 6 sama dengan banyaknya faktor positif dari $2^6 3^4 5^3 7^2$ yaitu ada
$(6 + 1)$ x $(4 + 1)$ x $(3 + 1)$ x $(2 + 1) = 420$.

13. Suatu set soal terdiri dari 10 soal pilihan B atau S dan 15 soal pilihan ganda dengan 4 pilihan. Seorang siswa menjawab semua soal dengan menebak jawaban secara acak. Tentukan Probabilitas ia menjawab dengan benar hanya 2 soal?
**Jawaban :**
Jika 2 soal benar tersebut berasal dari soal tipe B atau S maka peluangnya adalah

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{15}$$

Jika 2 soal benar tersebut berasal dari soal tipe pilihan ganda maka peluangnya adalah

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{13} \binom{15}{2}$$

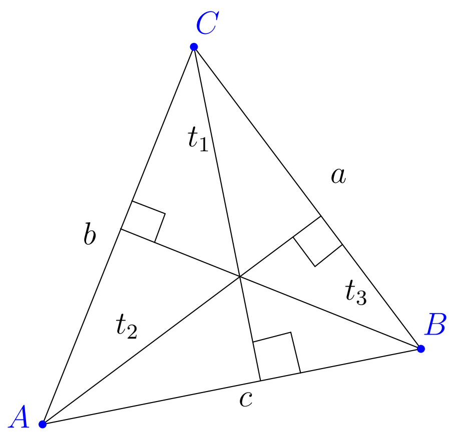
Jika 1 soal benar tersebut berasal dari soal tipe B atau S dan 1 soal benar berasal dari pilihan ganda maka peluangnya adalah

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^{14} \binom{15}{1}$$

Jadi, secara keseluruhan peluang menjawab tepat 2 soal benar adalah

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{15} + \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{13} \binom{15}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^{14} \binom{15}{1}$$

14. Diberikan segitiga $ABC$ dengan keliling 3, dan jumlah kuadrat sisi-sisinya sama dengan 5. Jika jari-jari lingkaran luarnya sama dengan 1, maka jumlah ketiga garis tinggi dari segitiga $ABC$ tersebut adalah ...
**Jawaban : 1**
Perhatikan gambar di bawah ini!




Misalkan sisi - sisi segitiga tersebut adalah $a, b, c$ maka diperoleh

$$a + b + c = 3$$

dan

$$a^2 + b^2 + c^2 = 5$$

selain itu kita punya identitas

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$$

sehingga diperoleh

$$9 = (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac) = 5+2(ab+bc+ac) \quad \Leftrightarrow \quad ab+bc+ac = 2$$

Misalkan pula $R$ jari - jari lingkaran luar dari segitiga $ABC$ maka diketahui $R = 1$. Dari aturan sinus diperoleh

$$\frac{a}{\sin A} + \frac{b}{\sin B} + \frac{c}{\sin C} = 2R = 2$$

Oleh karena itu, jika $t_1, t_2, t_3$ berturut - turut adalah garis tinggi yang ditarik dari titik $C, A, B$ maka didapatkan

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 + t_3 &= b \sin A + c \sin B + a \sin C \\ &= b \cdot \frac{a}{2} + c \cdot \frac{b}{2} + a \cdot \frac{c}{2} \\ &= \frac{1}{2}(ab + bc + ac) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \end{aligned}$$

15. Jika hasil kali tiga bilangan ganjil berurutan sama dengan 7 kali jumlah ketiga bilangan itu, maka jumlah kuadrat ketiga bilangan itu adalah ...
**Jawaban : 83**
Misal tiga bilangan tersebut adalah $t - 2, t, t + 2$ dengan $t$ bilangan ganjil. Sehingga diperoleh,

$$(t - 2)t(t + 2) = 7 \cdot 3t \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 25 = 0$$

Jika $t = 5$ maka tiga bilangan tersebut adalah $3, 5, 7$ sehingga $3^2 + 5^2 + 7^2 = 83$
Jika $t = -5$ maka tiga bilangan tersebut adalah $-7, -5, -3$ sehingga $(-3)^2 + (-5)^2 + (-7)^2 = 83$.

16. Diketahui $\triangle ABC$ sama kaki dengan panjang $AB = AC = 3, BC = 2$, titik $D$ pada sisi $AC$ dengan panjang $AD = 1$. Tentukan luas $\triangle ABD$.
**Jawaban :** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
Dengan Heron formula diperoleh,

$$\text{Luas } \triangle ABC = \sqrt{4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$$

Selain itu, kita punya

$$\frac{\text{Luas } \triangle ABD}{\text{Luas } \triangle ABC} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$$

sehingga diperoleh,

$$\text{Luas } \triangle ABD = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

17. Suatu dadu ditos enam kali. Tentukan Probabilitas jumlah mata yang muncul 27.
**Jawaban :** $\frac{1666}{6^6}$
Untuk mencari banyak kemungkinan jumlah mata dadu yang muncul berjumlah 27 equivalen dengan mencari banyaknya penyelesaian dari persamaan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 27$ dimana $x_i$ bilangan bulat dan $1 \leq x_i \leq 6$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Yang setara dengan mencari koefisien $x^{27}$ dari $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^6$. Perhatikan,

$$\begin{aligned} x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 &= x(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5) \\ &= x(1 + x + x^2 + x^3(1 + x + x^2)) \\ &= x(1 + x + x^2)(1 + x^3) \end{aligned}$$

sehingga

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^6 = x^6(1 + x^3)^6(1 + x + x^2)^6$$

Dengan Binom Newton didapat,

$$(1 + x^3)^6 = \sum_{i=0}^{6} x^{3i}$$

dan

$$\begin{aligned} (1 + x + x^2)^6 &= \sum_{i=0}^{6} (x^2)^{6-i}(x + 1)^i \\ &= \sum_{i=0}^{6} x^{12-2i} \left( \sum_{j=0}^{i} x^j \right) \\ &= \sum_{i=0}^{6} \sum_{j=0}^{i} x^{12-2i+j} \end{aligned}$$

Oleh karena itu didapat

- Koefisien $x^9$ dari $(x^3 + 1)^6$ adalah 20
- Koefisien $x^{12}$ dari $(x^3 + 1)^6$ adalah 15
- Koefisien $x^{15}$ dari $(x^3 + 1)^6$ adalah 6
- Koefisien $x^{18}$ dari $(x^3 + 1)^6$ adalah 1

selain itu diperoleh juga,

- Koefisien $x^{12}$ dari $(x^2 + x + 1)^6$ adalah 1

- Koefisien $x^9$ dari $(x^2+x+1)^6$ adalah 50
- Koefisien $x^6$ dari $(x^2+x+1)^6$ adalah 141
- Koefisien $x^6$ dari $(x^2+x+1)^6$ adalah 50

Jadi, koefisien $x^{27}$ dari $x^6(1+x^3)^6(1+x+x^2)^6$ adalah
(20 x 1)+(15 x 50)+(6 x 141)+(1 x 50)=1666
Jadi, peluang diperoleh jumlah mata yang muncul sama dengan 27 adalah $\frac{1666}{6^6}$

18. Diberikan segitiga $ABC$ dengan sisi-sisi : $AB = x+1, BC = 4x-2$ dan $CA = 7-x$. Tentukan nilai dari $x$ sehingga segitiga $ABC$ merupakan segitiga sama kaki.
**Jawaban : $\frac{9}{5}$**
Karena $x+1, 4x-2$ dan $7-x$ membentuk sisi - sisi segitiga maka berlaku,

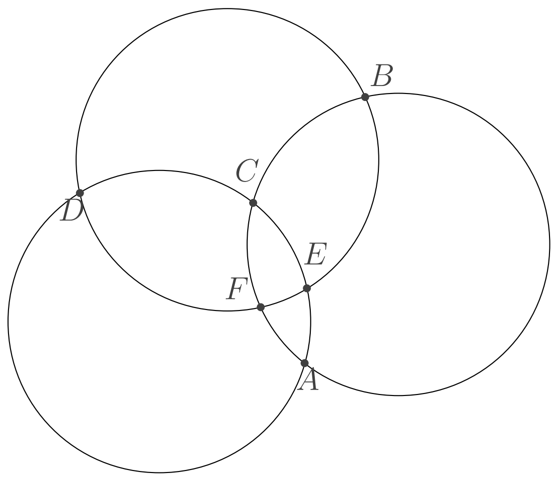
$$\begin{aligned}(x+1)+(4x-2) &> 7-x \text{ sehingga } x > \frac{4}{3}\\ (x+1)+(7-x) &> 4x-2 \text{ sehingga } x < \frac{5}{2}\\ (7-x)+(4x-2) &> x+1 \text{ sehingga } x > -2\end{aligned}$$

Oeh karena itu,

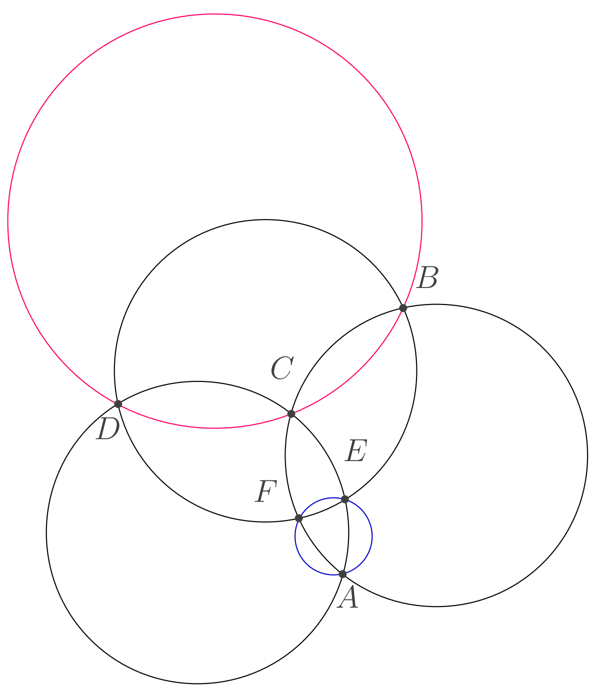
- Jika $x+1 = 4x-2$ diperoleh $x = 1$ yang jelas tidak mungkin sebab $\frac{4}{3} < x < \frac{5}{2}$.
- Jika $x+1 = 7-x$ diperoleh $x = 3$ yang jelas tidak mungkin sebab $\frac{4}{3} < x < \frac{5}{2}$.
- Jika $7-x = 4x-2$ diperoleh $x = \frac{9}{5}$.

19. Misalkan terdapat 5 kartu dimana setiap kartu diberi nomor yang berbeda yaitu 2, 3, 4, 5, 6. Kartu-kartu tersebut kemudian dijajarkan dari kiri ke kanan secara acak sehingga berbentuk barisan. Berapa probabilitas bahwa banyaknya kartu yang dijajarkan dari kiri ke kanan dan ditempatkan pada tempat ke- $i$ akan lebih besar atau sama dengan $i$ untuk setiap $i$ dengan $1 \leq i \leq 5$
**Jawaban : $\frac{2}{15}$**
Susunan yang paling sederhana adalah 2, 3, 4, 5, 6
Untuk memenuhi kondisi pada soal maka masing - masing angka 2, 3, 4, dan 5 hanya bisa digeser ke kanan satu langkah saja. Cara ini ada sebanyak $2^4 = 16$.
Sedangkan untuk kemungkinan angka digeser ke kiri tidak perlu kita perhatikan, sebab jika kita menggeser angka ke kiri maka pasti ada angka yang harus digeser ke kanan sehingga sudah masuk perhitungan yang pertama di atas. Oleh karena itu, besar probabilitas adalah $\frac{16}{5!} = \frac{2}{15}$.

20. N lingkaran digambar pada sebuah bidang datar demikian sehingga terdapat enam titik dimana keenam titik tersebut terdapat pada paling sedikit tiga lingkaran. Berapa N terkecil yang memenuhi kondisi tersebut?
**Jawaban : 5**
Jika kita menggambar 3 lingkaran pada didang datar maka maksimal akan terbentuk 6 titik potong, seperti gambar berikut




Karena melalui sebarang 3 titik yang tidak segaris dapat dibentuk sebuah lingkaran yang melalui ketiga titik tersebut, maka dengan membuat dua lingkaran yang masing - masing melalui 3 titik $A, B, C, D, E, F$ akan terbentuk 5 lingkaran dimana terdapat 6 titik yang masing - masing terdapat pada 3 lingkaran, sesuai apa yang diminta.




***Disusun oleh : Tutur Widodo***
Apabila ada saran, kritik maupun masukan
silakan kirim via email ke
tutur.w87@gmail.com
Terima kasih.
My blog : http://mathematic-room.blogspot.com