Materi

LIMIT

Nilai Limit Tak Hingga dan Limit di Tak Hingga

Oleh:

Anang Wibowo, S.Pd

MatikZone's Series

Email : matikzone@gmail.com Blog : www.matikzone.wordpress.com HP : 085 233 897 897

Ponorogo, Februari 2015

Nilai Limit Tak Hingga dan Limit di Tak Hingga

Anang Wibowo, S.Pd

Dari buku-buku pelajaran yang ada, ternyata ada beberapa bahasan yang masih belum menemui titik temu/kepastian alias masih memberikan kesimpulan yang berbeda-beda. Pertama, mengenai menentukan nilai limit yang menghasilkan c/0 apakah kesimpulan akhirnya tak hingga? Kedua, untuk limit tak hingga bentuk pecahan dengan pangkat tertinggi pada pembilang apakah juga bernilai tak hingga?

Berikut ini sedikit apa yang kami ketahui, semoga dapat menambah wawasan dan bahan diskusi untuk kita semua.

Telah kita ketahui bersama bahwa:

Definisi limit: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ (ada) $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ (limit kiri = limit kanan)

A. Menentukan Nilai $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

Dari beberapa buku pelajaran yang pernah kami buka, banyak yang menyimpulkan bahwa, dengan cara SUBTITUSI akan diperoleh:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \begin{cases} k, \; f(a) = k \text{ ....1} \\ \infty, \; f(a) = \dfrac{k}{0} \text{ ....2} \\ BTT, \; f(a) = \dfrac{0}{0} \text{ ....3} \end{cases}$$

BTT = Bentuk Tak Tentu, maka harus diproses lebih lanjut dengan cara:
a). Pemfaktoran atau
b). Perkalian dengan bentuk sekawan.

Yang menjadi pertanyaan adalah persamaan kedua, benarkah bahwa:

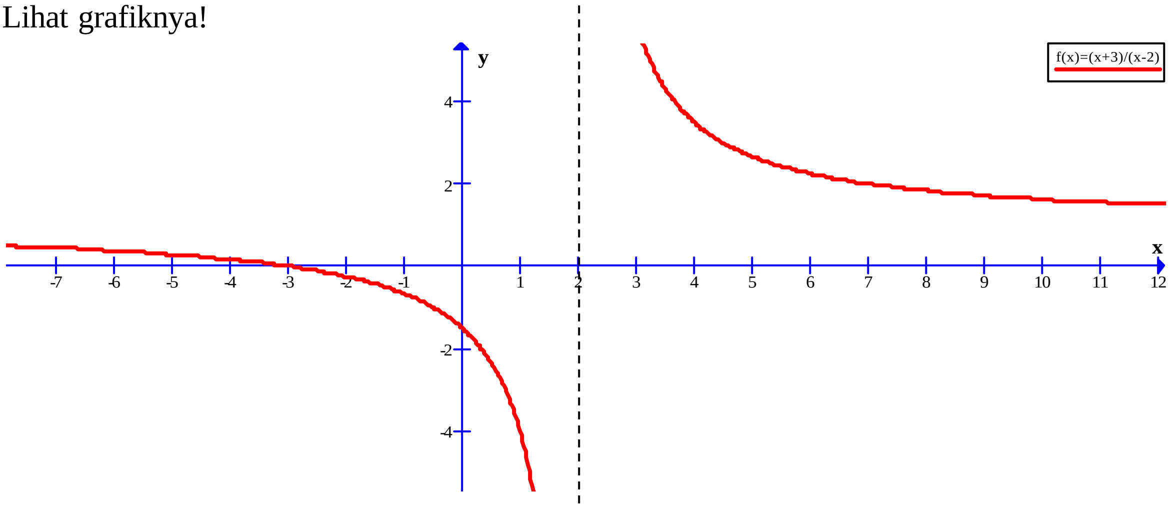
$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty, \quad jika \;\; f(a) = \frac{k}{0}$$

Perhatikan soal:

Soal Pertama:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x-2}=\frac{2+3}{2-2}=\frac{5}{0}=\infty \quad (\text{benarkah?})$$

Lihat grafiknya!

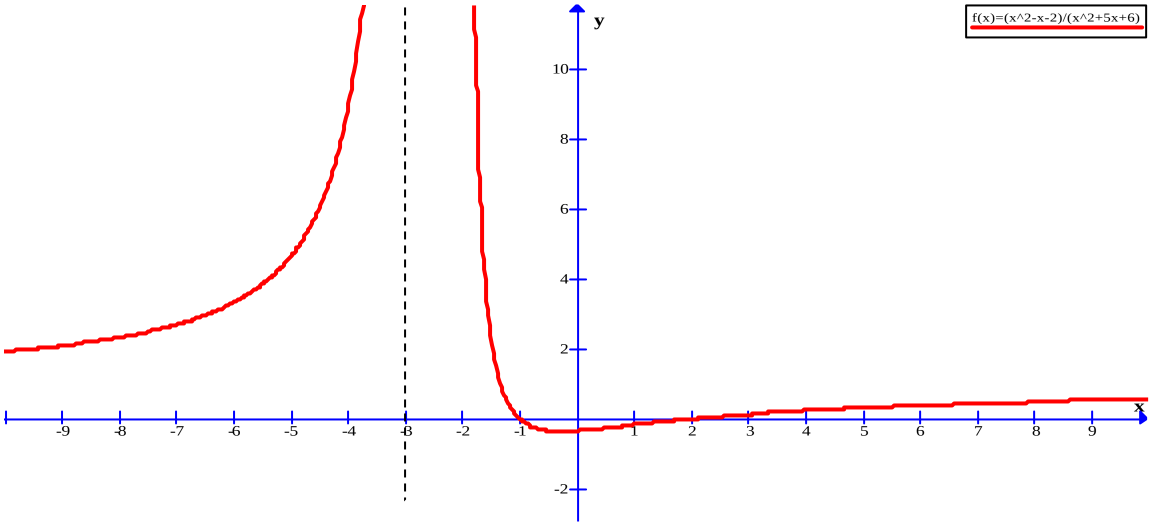


Dari grafik diketahui bahwa nilai limit kiri dan limit kanan tidak sama untuk x mendekati 2, sehingga sesuai definisi, limit $f(x)$ untuk x mendekati 2 adalah **TIDAK ADA**.

Soal Kedua:

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-x-2}{x^2+5x+6}=\frac{9+3-2}{9-15+6}=\frac{10}{0}=\infty \quad (\text{benarkah?})$$

Lihat grafiknya!



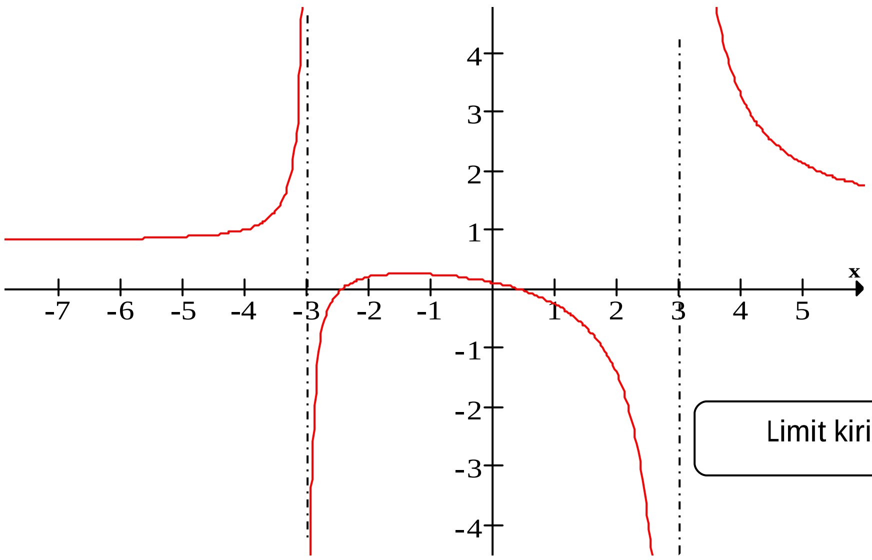
Dari grafik diketahui bahwa nilai limit kiri dan limit kanan adalah sama untuk x mendekati –3, sehingga sesuai definisi, limit $f(x)$ untuk x mendekati –3 adalah **Tak Hingga**.

Soal Ketiga:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x-1}{x^2-9}=\frac{3^2+2.3-1}{3^2-9}=\frac{14}{0}$$, demikian juga, $$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+2x-1}{x^2-9}=\frac{(-3)^2+2(-3)-1}{(-3)^2-9}=\frac{2}{0}.$$

apakah nilai lilmitnya tak hingga?

Perhatikan grafik!



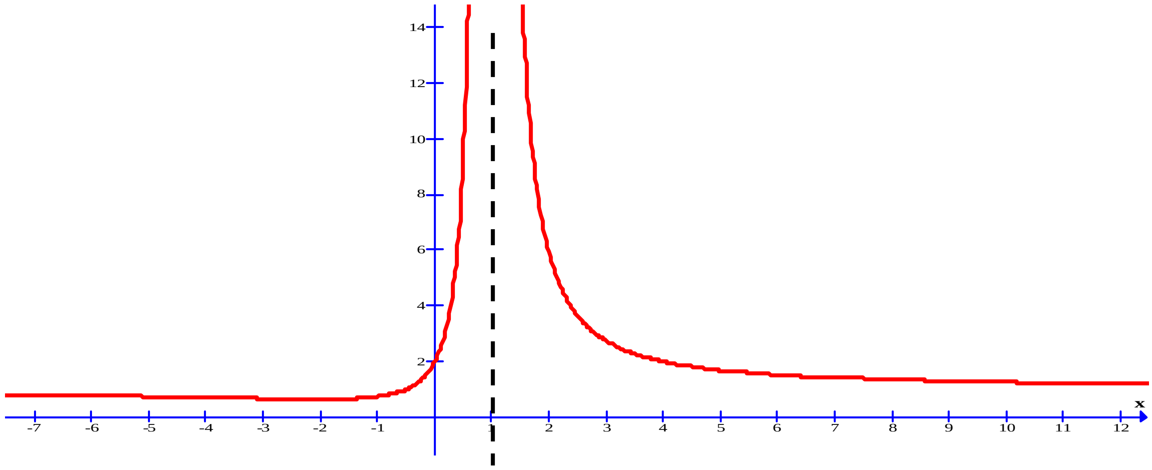
Limit kiri $\neq$ Limit kanan

Jadi, nilai $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-9}$ **TIDAK ADA**, demikian juga untuk $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-9}$

Soal Keempat:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2}{x^2-2x+1}=\frac{1+2}{1-2+1}=\frac{3}{0}=\infty \quad (\text{benarkah?})\ ?$$

Lihat grafiknya!

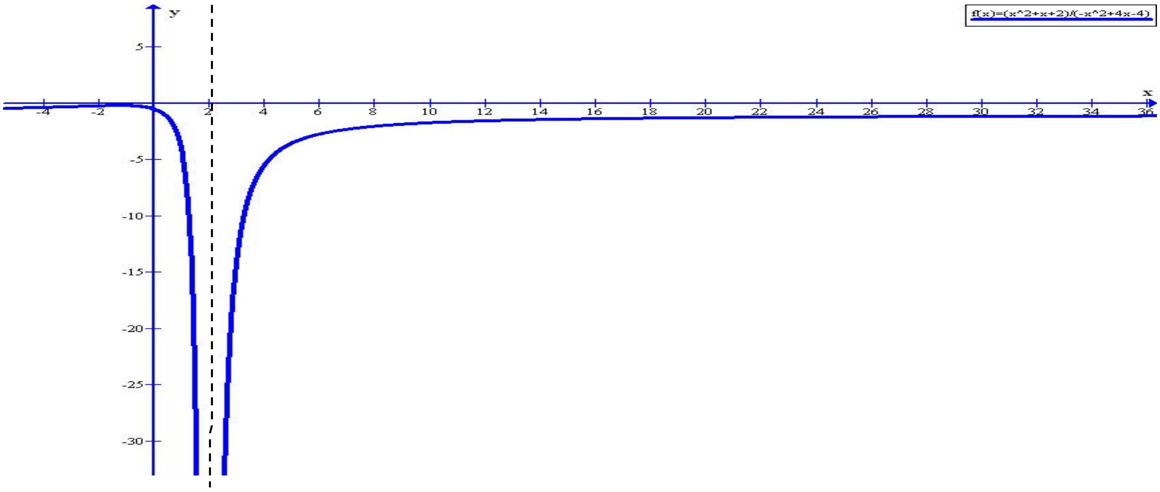


Dari grafik diketahui bahwa nilai limit kiri dan limit kanan adalah sama untuk x mendekati 1, sehingga sesuai definisi, limit $f(x)$ untuk x mendekati 1 adalah **Tak Hingga**.

Soal kelima:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x + 2}{-x^2 + 4x - 4} = \frac{8}{0} = \infty?$$

Perhatikan grafik!



Dari grafik di atas terlihat bahwa nilai limit kiri dan limit kanan adalah sama untuk x mendekati 2, sehingga sesuai definisi, limit $f(x)$ untuk x mendekati 2 adalah **Min Tak Hingga**.

Apabila kita tidak dapat membuat grafiknya, baik dengan komputer maupun manual, minimal kita bisa membuat tabel nilai-nilai fungsi di sekitar $x = a$, kemudian menganalisanya apakah jika x mendekati a dari kiri dan dari kanan menuju nilai yang sama atau tidak.

Misalnya soal pertama di atas:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+3}{x-2} = ...$$

Perhatikan tabel berikut!

x	0	0,2	0,5	0,8	1	1,2	1,5	1,8	**2**	2,2	2,5	2,8	3	3,2	3,5
F(x)	-1,5	-1,78	-2,33	-3,17	-4	-5,25	-9	-24	**?**	26	11	7,25	6	5,17	4,33

Turun Naik

Terlihat bahwa jika $x = 2$ didekati dari kiri maka nilai $F(x)$ semakin mengecil, dan didekati dari kanan maka nilai $F(x)$ semakin membesar. Artinya limit kiri TIDAK SAMA dengan limit kanan. Jadi, $F(x)$ tidak mempunyai limit untuk x mendekati 2.

Kesimpulannya adalah,

> Jika $f(a) = \frac{k}{0}$, belum tentu bahwa $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$,
>
> mungkin Tak Hingga, Min Tak Hingga atau mungkin juga Tak Ada, diperlukan analisa grafik untuk menentukannya.

B. Menentukan Nilai $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$

Untuk menyelesaikan $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, dimana $f(x) = \frac{ax^n + bx^{n-1} + \ldots}{px^m + qx^{n-1} + \ldots}$ adalah dengan membaginya dengan variable pangkat tertinggi dari penyebut (karena jika disubtitusi diperoleh bentuk tak tentu $\frac{\infty}{\infty}$). Dari penyelesaian soal-soal yang ada, diperoleh kesimpulan:

$$\text{Jika } f(x) = \frac{ax^n + bx^{n-1} + \ldots}{px^m + qx^{n-1} + \ldots} \text{ maka } \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{ax^n}{px^m} = \begin{cases} 0, \; jk \;\; n < m \\ \frac{a}{p}, \; jk \;\; n = m \\ \infty, \; jk \;\; n > m \end{cases}$$

n adalah pangkat tertinggi dari pembilang dan ***m*** adalah pangkat tertinggi dari penyebut.

Pertanyaannya adalah, apakah benar bahwa

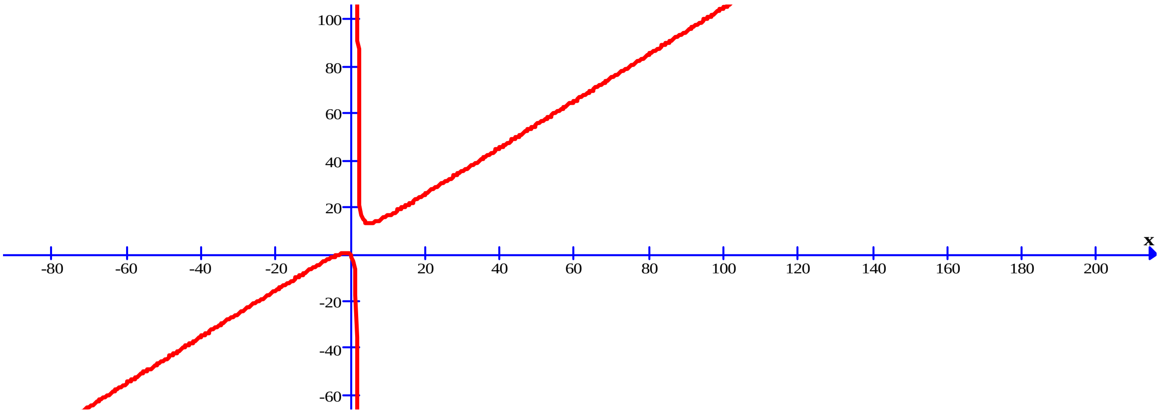
jika ***n*** > ***m***, maka nilai limitnya adalah **TAK HINGGA**?

Perhatikan Soal Berikut:

Soal Pertama:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 3x}{x - 2} = \infty \quad (\text{benarkah?})$$

Perhatikan grafik!

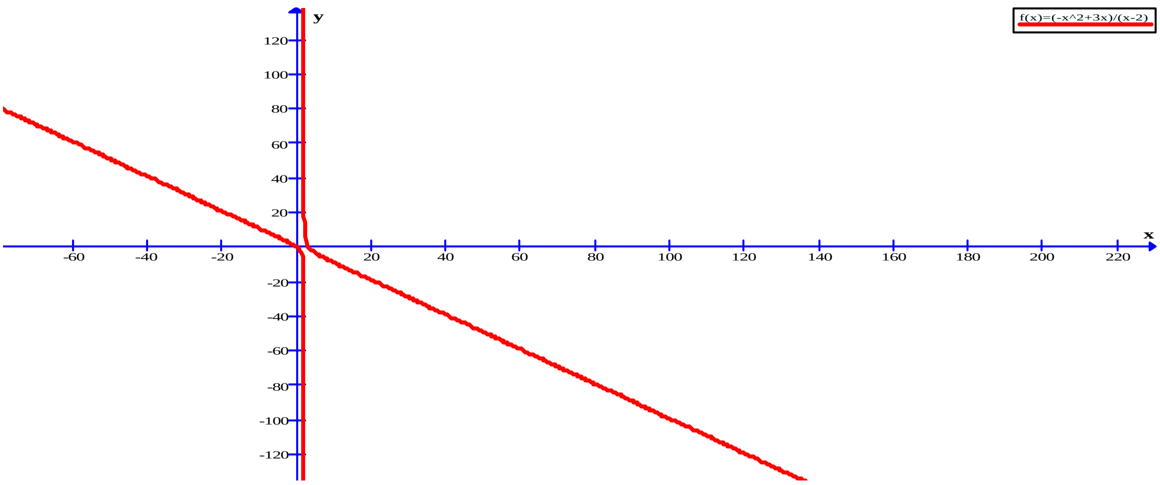


Dari grafik, benar bahwa nilai limit $\lim_{x \to \infty} f(x)$ adalah Tak Hingga.

Soal Kedua:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{-x^2 + 3x}{x - 2} = \infty \quad (\text{benarkah?})$$

Perhatikan grafik!

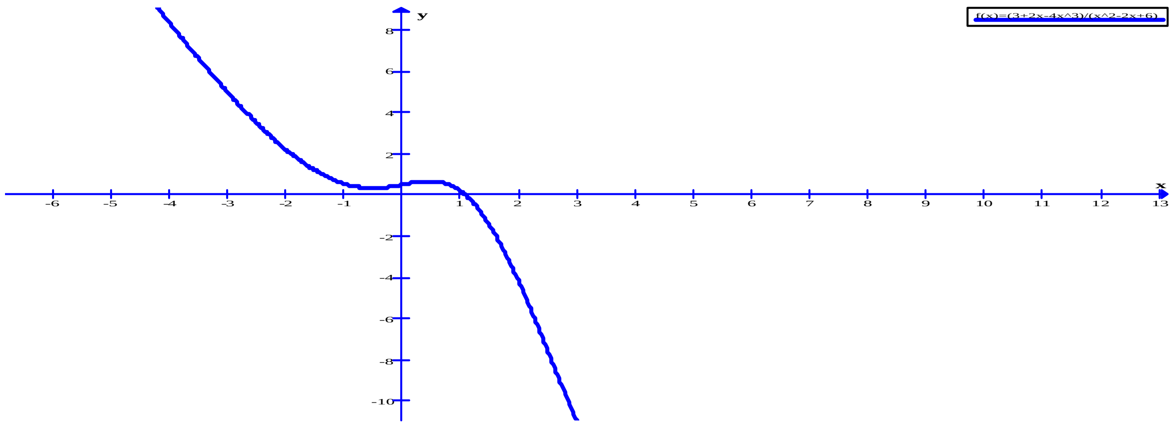


Ternyata ketika x mendekati Tak Hingga, nilai y mendekati Min Tak Hingga. Jadi $\lim_{x \to \infty} f(x)$ adalah **MIN TAK HINGGA**.

Soal Ketiga:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3 + 2x - 4x^3}{x^2 - 2x + 6} = \infty \quad (\text{benarkah?})$$

Perhatikan grafik!



Ternyata ketika x mendekati Tak Hingga, nilai y mendekati **Min Tak Hingga**. Jadi $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ adalah **MIN TAK HINGGA**.

Soal Keempat:

Telitilah kebenarannya dengan menggunakan grafik!

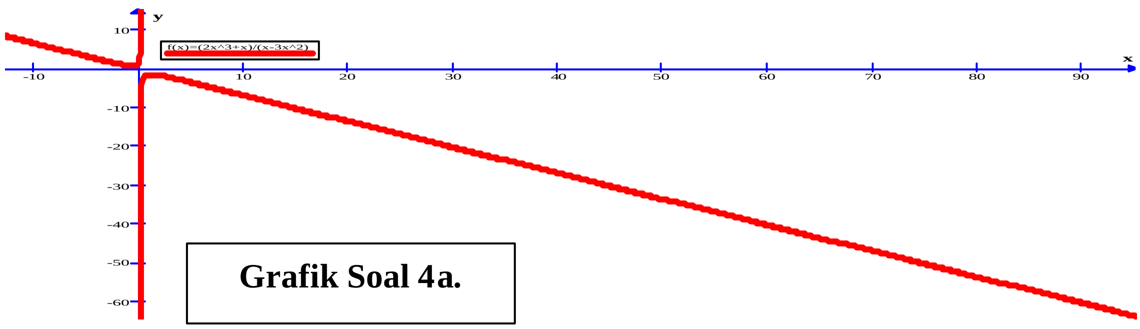
a. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3 + x}{x - 3x^2} = -\infty$

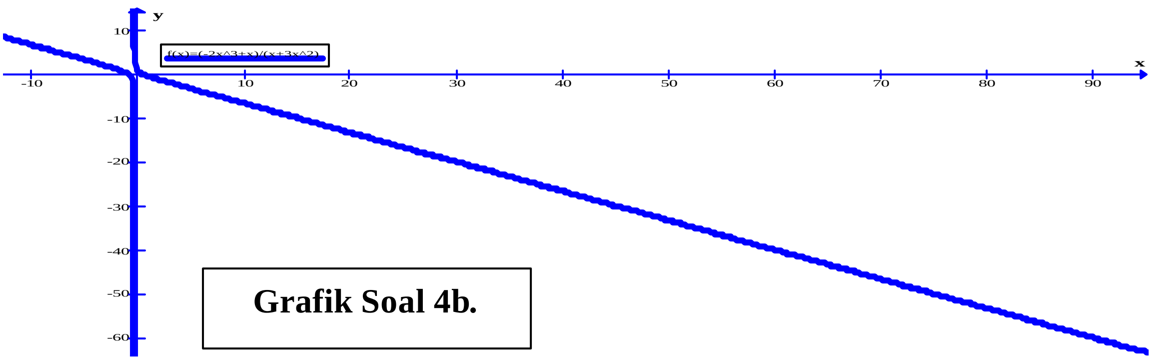
b. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-2x^3 + x}{x + 3x^2} = -\infty$

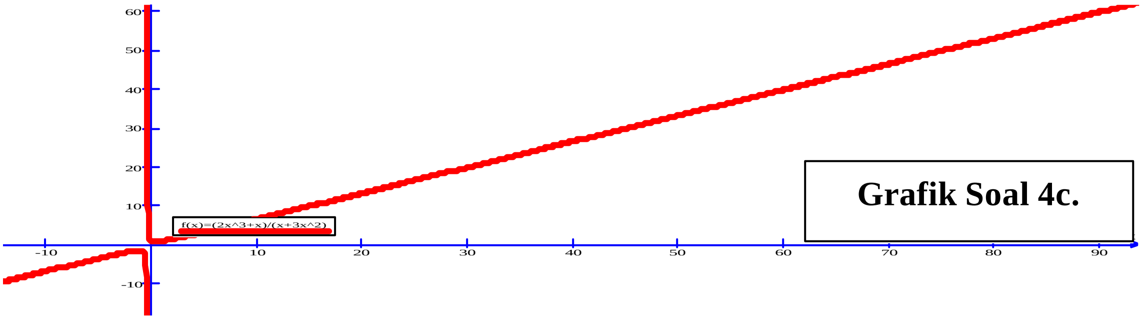
c. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3 + x}{x + 3x^2} = \infty$

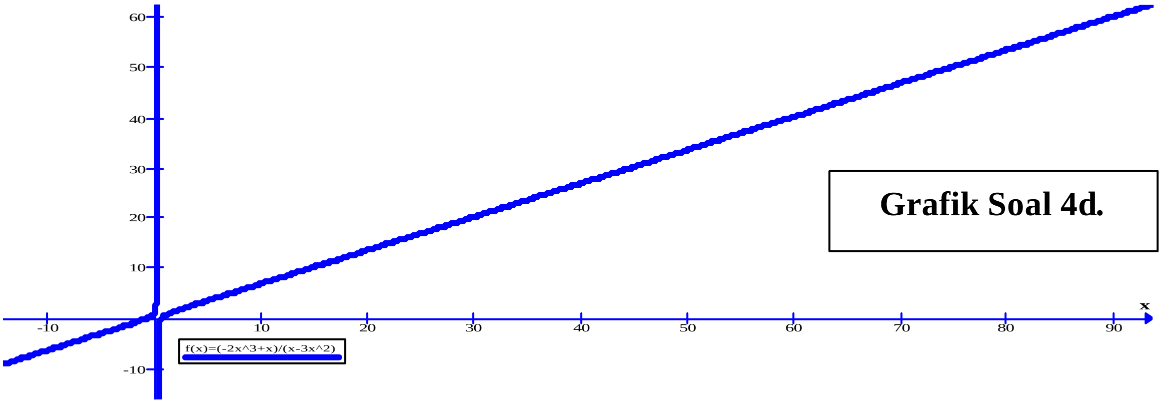
d. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-2x^3 + x}{x - 3x^2} = \infty$

Perhatikan Grafik!









Membagi dengan Variabel Pangkat Tertinggi

Variabel Pangkat Tertinggi	**Variabel Pangkat Tertinggi Penyebut**
Soal 1 $\begin{aligned} \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x}{x+3x^2} &= \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3/x^3+x/x^3}{x/x^3+3x^2/x^3} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{2+1/x^2}{1/x^2+3/x} \\ &= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}2+\lim\limits_{x\to\infty}1/x^2}{\lim\limits_{x\to\infty}1/x^2+\lim\limits_{x\to\infty}3/x} \\ &= \frac{2+0}{0+0}=\frac{2}{0}=\infty \end{aligned}$	$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x}{x+3x^2} &= \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3/x^2+x/x^2}{x/x^2+3x^2/x^2} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{2x+1/x}{1/x+3} \\ &= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}2x+\lim\limits_{x\to\infty}1/x}{\lim\limits_{x\to\infty}1/x+\lim\limits_{x\to\infty}3} \\ &= \frac{\infty+0}{0+3}=\frac{\infty}{3}=\infty \end{aligned}$

Soal 2 $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x}{x-3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3/x^3+x/x^3}{x/x^3-3x^2/x^3}$$ $$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+1/x^2}{1/x^2-3/x}$$ $$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}2+\lim\limits_{x\to\infty}1/x^2}{\lim\limits_{x\to\infty}1/x^2-\lim\limits_{x\to\infty}3/x}$$ $$=\frac{2+0}{0-0}=\frac{2}{0}=\infty$$	$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x}{x-3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3/x^2+x/x^2}{x/x^2-3x^2/x^2}$$ $$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1/x}{1/x-3}$$ $$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}2x+\lim\limits_{x\to\infty}1/x}{\lim\limits_{x\to\infty}1/x-\lim\limits_{x\to\infty}3}$$ $$=\frac{\infty+0}{0-3}=\frac{\infty}{-3}=-\infty$$ atau $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x}{x-3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{-3x^2}=\lim_{x\to\infty}-2x=-\infty$$

Sepertinya cara dengan pembagi variabel pangkat tertinggi dari penyebut lebih "aman" untuk kita gunakan. Hati-hati… bentuk $c/0$ atau $k/0$ bisa disimpulkan tak hingga atau min tak hingga HANYA untuk limit di tak hingga, tidak untuk kasus A.

Apakah yang dapat kita simpulkan?

Kesimpulannya adalah:

Jika $f(x)=\dfrac{ax^n+bx^{n-1}+\dots}{px^m+qx^{n-1}+\dots}$

maka $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^n}{px^m}=\begin{cases}0, & \text{jika } n<m\\ \frac{a}{p}, & \text{jika } n=m\\ \infty, & \text{jika } n>m, \text{dan } \frac{a}{p}>0\\ -\infty, & \text{jika } n>m, \text{dan } \frac{a}{p}<0\end{cases}$

dimana ***n*** adalah pangkat tertinggi dari pembilang dan ***m*** adalah pangkat tertinggi dari penyebut.

Ini adalah akhir dari rasa penasaran kami, berdasarkan pendekatan grafiknya, ternyata ada beberapa kesimpulan yang berbeda dari apa yang selama ini kita ketahui dan kita ajarkan kepada siswa di kelas. Ini merupakan sebuah wacana dari kami, silakan Anda mengkoreksi atau menambahnya demi kebenaran yang sesungguhnya mengenai masalah di atas. Kami tunggu di matikzone@gmail.com – www.matikzone.tk – www.etung2.wordpress.com

Semoga ada manfaatnya.

Ponorogo, Ahad 31 Maret 2013 Pukul 09.10 ditambah dan diedit pada Sabtu 21 Pebruari 2015

Beberapa kesimpulannya (cara cepat) dalam menentukan nilai limit tak hingga suatu fungsi adalah:

1). Jika $f(x) = \dfrac{ax^n + bx^{n-1} + \ldots}{px^m + qx^{n-1} + \ldots}$

maka $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax^n}{px^m} = \begin{cases} 0, & \text{jika } n < m \\ \frac{a}{p}, & \text{jika } n = m \\ \infty, & \text{jika } n > m, \text{dan } \frac{a}{p} > 0 \\ -\infty, & \text{jika } n > m, \text{dan } \frac{a}{p} < 0 \end{cases}$

dimana ***n*** adalah pangkat tertinggi dari pembilang dan ***m*** adalah pangkat tertinggi dari penyebut.

2). Jika $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{px^2 + qx + r}$ maka $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} \infty, & jk \ \ a > p \\ \dfrac{b-q}{2\sqrt{a}}, & jk \ \ a = p \\ -\infty, & jk \ \ a < p \end{cases}$

3). Jika $f(x) = \sqrt{ax + b} - \sqrt{px + q}$ maka $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} \infty, & jk \ \ a > p \\ 0, & jk \ \ a = p \\ -\infty, & jk \ \ a < p \end{cases}$