

Matrik – Sifat Invers

Sifat 1:

$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ untuk A matrik berordo 2×2 dan $|A| \neq 0$.

Cek:

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $|A| = ad - bc$, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{|A|} & \frac{-b}{|A|} \\ \frac{-c}{|A|} & \frac{a}{|A|} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A^{-1}| &= \frac{ad}{(|A|)^2} - \frac{bc}{(|A|)^2} \\ &= \frac{1}{(|A|)^2} (ad - bc) \\ &= \frac{|A|}{|A|^2} \\ &= \frac{1}{|A|} \end{aligned}$$

$ A^{-1} = \frac{1}{ A }$ berlaku untuk A matrik berordo $m \times m$
--

Sifat 2:

$(A^{-1})^{-1} = A$ dengan $|A| \neq 0$ dan A matrik persegi.

Cek:

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{|A|} & \frac{-b}{|A|} \\ \frac{-c}{|A|} & \frac{a}{|A|} \end{bmatrix}$$

$$(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{\cancel{|A|}} \begin{bmatrix} \frac{a}{|A|} & \frac{b}{|A|} \\ \frac{c}{|A|} & \frac{d}{|A|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A \quad (\text{diketahui } |A^{-1}| = \frac{1}{|A|})$$

Sifat 3:

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, dengan $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$ dan A, B matrik persegi.

Cek:

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$, maka

$$\begin{aligned} (AB)^{-1} &= \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \left(\begin{bmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{adps+bcqr-bcps-adqr} \begin{bmatrix} cq+ds & -aq-bs \\ -cp-dr & ap+br \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{-1}B^{-1} &= \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ps-qr} \begin{bmatrix} s & -q \\ -r & p \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc} \cdot \frac{1}{ps-qr} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s & -q \\ -r & p \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{adps+bcqr-bcps-adqr} \cdot \begin{bmatrix} ds+br & -dq-bp \\ -cs-ar & cq+ap \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^{-1}A^{-1} &= \frac{1}{ps-qr} \begin{bmatrix} s & -q \\ -r & p \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc} \cdot \frac{1}{ps-qr} \cdot \begin{bmatrix} s & -q \\ -r & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{adps+bcqr-bcps-adqr} \cdot \begin{bmatrix} cq+ds & -aq-bs \\ -cp-dr & ap+br \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Diperoleh

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad \text{dan} \quad (AB)^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$$

Sifat 4:

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, dengan $|A| \neq 0$, A^T adalah transpose matrik A dan A matrik persegi.

Cek:

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka

$$\begin{aligned} (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T &\Rightarrow \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \left(\frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \right)^T \\ &\Rightarrow \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Terbukti.

21/9 2015

©MatikZone.wordpress.com

Hak cipta dilindungi Allah. tak Dilarang menyebarkan tulisan ini dlm bentuk apapun selama ada manfaatnya, dan jangan lupa sisipkan DOA untuk kami...
Doa seorang muslim untuk saudaranya sesama muslim dari kejauhan tanpa diketahui olehnya akan Dikabulkan. Di atas kepalanya ada malaikat yg telah diutus, & tiap kali ia berdo'a untuk Kebaikan, maka malaikat yang diutus tsb akan mengucapkan Amin & kamu Juga akan mendapatkan seperti itu. (HR. Muslim 8/86)