Matrik – Sifat Invers

Sifat 1:

$\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$ untuk A matrik berordo 2x2 dan $|A| \neq 0$.

Cek:

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $|A| = ad - bc$, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{|A|} & \dfrac{-b}{|A|} \\ \dfrac{-c}{|A|} & \dfrac{a}{|A|} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left|A^{-1}\right| &= \frac{ad}{(|A|)^2} - \frac{bc}{(|A|)^2} \\ &= \frac{1}{(|A|)^2}(ad-bc) \\ &= \frac{|A|}{|A|^2} \\ &= \frac{1}{|A|} \end{aligned}$$

> $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$ berlaku untuk A matrik berordo mxm

Sifat 2:

$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$ dengan $|A| \neq 0$ dan A matrik persegi.

Cek:

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, , maka

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{|A|} & \dfrac{-b}{|A|} \\ \dfrac{-c}{|A|} & \dfrac{a}{|A|} \end{bmatrix}$$

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = \frac{1}{1/|A|}\begin{bmatrix} \dfrac{a}{|A|} & \dfrac{b}{|A|} \\ \dfrac{c}{|A|} & \dfrac{d}{|A|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A \qquad \text{(diketahui } \left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}\text{)}$$

Sifat 3:

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, dengan $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$ dan A, B matrik persegi.

Cek:

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$, maka

$$\begin{aligned}
(AB)^{-1} &= \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \right)^{-1} \\
&= \left(\begin{bmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{bmatrix} \right)^{-1} \\
&= \frac{1}{adps+bcqr-bcps-adqr} \begin{bmatrix} cq+ds & -aq-bs \\ -cp-dr & ap+br \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A^{-1}B^{-1} &= \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ps-qr} \begin{bmatrix} s & -q \\ -r & p \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{ad-bc} \cdot \frac{1}{ps-qr} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s & -q \\ -r & p \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{adps+bcqr-bcps-adqr} \cdot \begin{bmatrix} ds+br & -dq-bp \\ -cs-ar & cq+ap \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B^{-1}A^{-1} &= \frac{1}{ps-qr} \begin{bmatrix} s & -q \\ -r & p \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{ad-bc} \cdot \frac{1}{ps-qr} \cdot \begin{bmatrix} s & -q \\ -r & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{adps+bcqr-bcps-adqr} \cdot \begin{bmatrix} cq+ds & -aq-bs \\ -cp-dr & ap+br \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Diperoleh

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dan $(AB)^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$

Sifat 4:

$\left(A^{T}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{T}$, dengan $|A| \neq 0$, A^{T} adalah transpose matrik A dan A matrik persegi.

Cek:

Misalkan $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka

$$\left(A^{T}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{T} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1}=\left(\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\right)^{T}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Terbukti.