Matrik – Sifat Determinan

Sifat 1:

$|kA| = k^2|A|$ untuk A matrik berordo 2x2 dan k bilangan skalar.

Cek:

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $|A| = ad - bc$, maka

$$kA = k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} |kA| &= k^2 ad - k^2 bc \\ &= k^2(ad - bc) \\ &= k^2|A| \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, tunjukkan bahwa,

$|kA| = k^3|A|$ untuk A matrik berordo 3x3

Sifat 2:

$|A| = |A^T|$, dengan A^T adalah transpose matrik A.

Cek:

<u>A matrik berordo 2x2</u>

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $|A| = ad - bc,$, maka

$$A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, \ |A^T| = ad - bc$$

<u>A matrik berordo 3x3</u>

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi,$, maka

$$A^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}, \ |A^T| = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}\begin{matrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{matrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

Sifat 3:

$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ untuk A dan B matrik persegi.

Cek:

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, |A| = ad - bc,\ B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}, |B| = ps - qr$, maka

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} |A \cdot B| &= (ap + br)(cq + ds) - (cp + dr)(aq + bs) \\ &= acpq + adps + bcqr + bdrs - acpq - bcps - adqr - bdrs \\ &= adps + bcqr - bcps - adqr \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1) \end{aligned}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap + cq & bp + dq \\ ar + cs & br + ds \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} |B \cdot A| &= (ap + cq)(br + ds) - (ar + cs)(bp + dq) \\ &= abpr + adps + bcqr + cdqs - abpr - adqr - bcps - cdqs \\ &= adps + bcqr - bcps - adqr \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A| \cdot |B| &= (ad - bc)(ps - qr) \\ &= adps + bcqr - bcps - adqr \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3) \end{aligned}$$

Dari (1) dan (3) diperoleh bahwa $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

Dan dari (1) dan (2) diperoleh bahwa $|A \cdot B| = |B \cdot A|$

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa $|A \cdot B \cdot C| = |A| \cdot |B| \cdot |C|$ dan $|A^n| = |A|^n$.
Bagaimana dengan matrik berordo 3x3? Kerjakan untuk latihan!

21/9 2015