LOGIKA MATEMATIKA

1. Pernyataan

Pernyataan adalah kalimat yang bernilai benar atau salah tetapi tidak sekaligus benar dan salah.

Pernyataan dilambangkan dengan huruf kecil, misalnya p, q, r dan seterusnya.
Pernyataan dibedakan menjadi:

1. Pernyataan Tunggal, yaitu penrnyataan yang mengandung satu gagasan.
2. Pernyataan Majemuk, yaitu pernyataan yang mengandung dua gagasan atau lebih. Dapat pula dikatakan bahwa pernyataan majemuk adalah gabungan dua atau lebih pernyataan tunggal yang dihubungkan dengan kata gabungan logika.

2. Pernyataan Berkuantor

2.1 Pernyataan Berkuantor Universal (umum)

Pernyataan berkuantor universal adalah pernyataan yang memuat kata semua atau setiap.
Notasi: $\forall_p$ dibaca semua/setiap.

Contoh:
1) Semua siswa ingin lulus ujian
2) Setiap bilangan genap habis dibagi 2

2.2 Pernyataan Berkuantor Eksistensial (Khusus)

Pernyataan berkontur eksistensial adalah pernyataan yang memuat kata ada atau beberapa.
Notasi: $\exists_p$ dibaca ada /beberapa p.

Contoh:
(1). Ada ikan bernafas dengan paru-paru
(2). Beberapa siswa hari ini tidak hadir

3. Pernyataan Majemuk

3.1 Konjungsi

Konjungsi dari dua pernyataan tunggal p dan q adalah "<u>p dan q</u>" yang dibaca "<u>p dan q</u>"
Tabel kebenaran Konjungsi:

p	q	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Dari tabel dapat disimpulkan bahwa $p \wedge q$ bernilai benar apabila p benar, q benar. Selain dari itu $p \wedge q$ bernilai salah.

3.2 Disjungsi

Disjungsi dari dua pernyataan tunggal p dan q adalah "$p \vee q$" yang dibaca "p atau q".

Tabel Kebenaran Disjungsi:

p	q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Dari tabel dapat disimpulkan bahwa: $p \vee q$ bernilai benar apabila salah satu pernyataan tunggalnya benar. Selain dari itu $p \vee q$ bernilai salah.

3.3 Implikasi (Pernyataan Bersyarat)

Implikasi dari dua pernyataan tunggal p dan q adalah "$p \rightarrow q$" yang dibaca:

1) jika p maka q
2) q hanya jika p
3) p syarat cukup bagi q
4) q syarat perlu bagi p

Tabel Kebenaran Implikasi:

p	q	$p \rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Dari tabel dapat disimpulkan bahwa: $p \rightarrow q$ bernilai benar untuk semua keadaan, kecuali apabila p benar dan q salah.

3.4 Ekivalensi (Biimplikasi)

Ekivalensi dari dua pernyataan tunggal p dan q adalah "$p \leftrightarrow q$" yang dibaca:

1) p jika dan hanya jika q
2) p syarat cukup dan perlu dibagi q
3) q syarat cukup dan perlu dibagi p

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

Tabel Kebenaran Ekivalensi:

p	q	$p \leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Dari tabel dapat disimpulkan bahwa: $p \rightarrow q$ bernilai benar apabila nilai kebenaran pernyataan tunggalnya sama selain dari itu salah.

4. Negasi

4.1 Negasi dari Pernyataan Tunggal

Negasi dari pernyataan p ditulis ~p dan dibaca:

1) Tidak p
2) Bukan p
3) Tidak benar p

Tabel kebenaran:

p	~p
B	S
S	B

4.2 Negasi dari Pernyataan Berkuantor

p : semua x adalah y
~p : ada x tidak y

p : ada x adalah y
~p : semua x tidak y

Contoh:

1) p : Semua siswa hadir di kelas ini
   ~p : Ada siswa tidak hadir di kelas ini
2) p : Semua bilangan prima adalah ganjil
   ~p : Ada bilangan prima yang tidak ganjil
3) p : Ada bilangan prima yang negatif
   ~p : Semua bilangan prima tidak negatif
4) p : Ada harga x sehingga $x < 7$
   ~p : semua x berlaku $x \geq 7$

4.3 Negasi dari Pernyataan Majemuk

4.3.1 Negasi dari Konjugasi

$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

4.3.2 Negasi dari Diskonjugasi

$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

4.3.3 Negasi dai Implikasi

$\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

4.3.4 Negasi dari Ekivalensi

$\sim(p \leftrightarrow q) \equiv \sim[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$
$\equiv \sim(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$
$\equiv p \wedge \sim q \vee q \wedge \sim p$

5. Variasi Pernyataan Bersyarat

Dari implikasi $p \rightarrow q$ dapat dibuat tiga buah pernyataan bersyarat lainnya yaitu invers, konvers, dan kontraposisi.

Implikasi : $p \rightarrow q$

Konvers : $q \rightarrow p$

Invers : $\sim p \rightarrow \sim q$ Kontraposisi : $\sim q \rightarrow \sim p$

Tabel kebenaran

p	q	~p	~q	$p \rightarrow q$	$\sim p \rightarrow \sim q$	$q \rightarrow p$	$\sim q \rightarrow \sim p$
B	B	S	S	B	B	B	B
B	S	S	B	S	B	B	S
S	B	B	S	B	S	S	B
S	S	B	B	B	B	B	B

Dari tabel terlihat bahwa:

1) Implikasi ekivalen dengan kontraposisi:
   $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$
2) Invers ekivalen dengan konvers
   $\sim p \rightarrow \sim q \equiv q \rightarrow p$

Contoh:
Implikasi : Jika kamu rajin belajar, maka kamu sukses
Invers : Jika kamu tidak rajin, maka kamu tidak sukses
Konvers : Jika kamu sukses, maka kamu rajin
Kontraposisi: Jika kamu tidak sukses, maka kamu tidak rajin

6. Tautologi dan Kontradiksi

Tautologi adalah pernyataan yang selalu benar
Contoh : $p \vee \sim p$

p	~p	$p \vee \sim p$
B	S	B
S	B	B

Kontradiksi adalah pernyataan yang selalu salah
Contoh : $p \wedge \sim p$

p	~p	$p \wedge \sim p$
B	S	S
S	B	S

7. Sifat operasi Logika

7.1 Sifat Idempoten

(1). $p \vee p \equiv p$
(2). $p \wedge p \equiv p$

7.2 Sifat Komutatif

(1). $p \vee q \equiv q \vee p$
(2). $p \wedge q \equiv q \wedge p$

7.3 Sifat Assosiatif

(1). $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
(2). $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

7.4 Sifat Distributif

(1). $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge r$
(2). $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge r$

7.5 Sifat Identitas

(1). $p \vee t \equiv t$ (3). $p \wedge t \equiv p$
(2). $p \wedge k \equiv p$ (4). $p \wedge k \equiv k$
t : tautologi
k : kontradiksi

7.6 Sifat Komplemen

(1). $p \vee \sim p \equiv t$ (4). $\sim t = k$
(2). $p \wedge \sim p \equiv k$ (5). $\sim k = t$
(3). $\sim(\sim p) \equiv p$

7.7 Sifat Idempoten

(1). $p\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
(2). $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

7.8 Sifat Implikasi

$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow p \equiv p \vee q$

8. Penarikan Kesimpulan

8.1 Modus Ponens

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \ldots \text{ premis 1} \\ \underline{p \qquad \ldots \text{ premis 2}} \\ \therefore q \ldots \text{ kesimpulan} \end{array}$$

8.2 Modus Tollens

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \ldots \text{ premis 1} \\ \underline{\sim q \qquad \ldots \text{ premis 2}} \\ \therefore \sim p \ldots \text{ kesimpulan} \end{array}$$

8.3 Silogisme

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \ldots \text{ premis 1} \\ \underline{q \rightarrow r \qquad \ldots \text{ premis 2}} \\ \therefore p \rightarrow r \ldots \text{ kesimpulan} \end{array}$$