



PERSAMAAN LINGKARAN

Suatu lingkaran melalui titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$, dimana AB adalah diameter Lingkaran. Maka:

$$L \equiv (x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

Asal usul:

- Titik pusat lingkaran adalah $P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
- Panjang diameter adalah $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, sehingga jari-jari $r = \frac{1}{2}\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
- Persamaan lingkaran dengan pusat $P(a, b)$ dan jari-jari r adalah $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, maka persamaan lingkaran tersebut adalah:

$$\begin{aligned} & \left(x - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right)^2 + \left(y - \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\right)^2 \\ \Rightarrow & x^2 - (x_1 + x_2)x + \frac{(x_1 + x_2)^2}{4} + y^2 - (y_1 + y_2)y + \frac{(y_1 + y_2)^2}{4} = \frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{4}(y_1 - y_2)^2 \\ \Rightarrow & x^2 - (x_1 + x_2)x + \frac{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2}{4} + y^2 - (y_1 + y_2)y + \frac{y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2}{4} = \frac{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2}{4} + \frac{y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2}{4} \\ \Rightarrow & x^2 - (x_1 + x_2)x + \frac{4x_1x_2}{4} + y^2 - (y_1 + y_2)y + \frac{4y_1y_2}{4} = 0 \\ \Rightarrow & x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 + y^2 - (y_1 + y_2)y + y_1y_2 = 0 \\ \Rightarrow & (x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0 \end{aligned}$$

Contoh :

Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik A (4, 3) dan titik B (1, - 1) dimana AB adalah diameter lingkaran tersebut.

Jawab :

Cara 1: a). Pusat lingkaran adalah $P\left(\frac{4+1}{2}, \frac{3-1}{2}\right) = P\left(\frac{5}{2}, 1\right)$

b). Jari-jari lingkaran adalah $r = \frac{1}{2}\sqrt{(4-1)^2 + (3+1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{9+16} = \frac{1}{2}\sqrt{25} = \frac{5}{2}$

c). Jadi persamaan lingkaran adalah

$$\begin{aligned}(x-a)^2 + (y-b)^2 &= r^2 \\ \Rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y-1)^2 &= \left(\frac{5}{2}\right)^2 \\ \Rightarrow x^2 - 5x + \frac{25}{4} + y^2 - 2y + 1 &= \frac{25}{4} \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - 5x - 2y + 1 &= 0\end{aligned}$$

Cara 2: Persamaan lingkaran yang melalui titik A (4, 3) dan titik B (1, - 1) adalah

$$\begin{aligned}(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) &= 0 \\ \Rightarrow (x-4)(x-1) + (y-3)(y+1) &= 0 \\ \Rightarrow x^2 - 5x + 4 + y^2 - 2y - 3 &= 0 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - 5x - 2y + 1 &= 0\end{aligned}$$