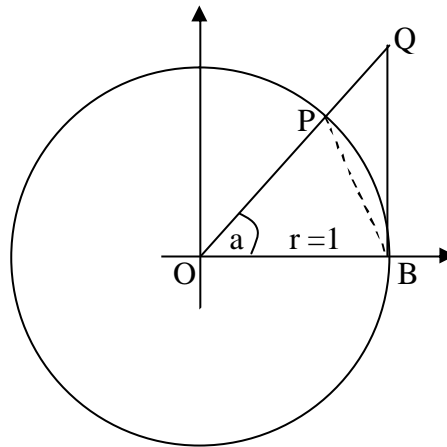


Limit Fungsi Trigonometri



Perhatikan gambar di atas. Misalkan α sebuah sudut lancip pada sebuah juring lingkaran dengan jari-jari 1 satuan. Titik $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$, $B(1,0)$, dan $Q(1, \tan \alpha)$. Dari gambar tersebut dapat diperoleh:

1. Luas segitiga $OBP = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \sin \alpha$
2. Luas juring $OBP = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{180^\circ}{360^\circ} \cdot \alpha = \frac{1}{2} \alpha$
3. Luas segitiga $OBQ = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan \alpha = \frac{1}{2} \tan \alpha$

Diketahui bahwa $0 < \text{luas segitiga } OBP < \text{luas juring } OBP < \text{luas segitiga } OBQ$, maka:

$$0 < \frac{1}{2} \sin \alpha < \frac{1}{2} \alpha < \frac{1}{2} \tan \alpha$$

Masing-masing ruas dikalikan $\frac{2}{\sin \alpha}$, diperoleh:

$$1 < \frac{\alpha}{\sin \alpha} < \frac{1}{\cos \alpha}$$

Oleh karena $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1$, maka $1 < \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} < 1$ atau $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} = 1$ 1)

Dari $1 < \frac{\alpha}{\sin \alpha} < \frac{1}{\cos \alpha}$, diperoleh : $1 > \frac{\sin \alpha}{\alpha} > \frac{\cos \alpha}{1}$ atau $\cos \alpha < \frac{\sin \alpha}{\alpha} < 1$

Oleh karena $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \cos \alpha = \cos 0 = 1$, maka $1 < \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} < 1$ atau $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ 2)

Dari persamaan 1) dan 2) dapat kita tuliskan sebagai berikut:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 \text{ atau } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} = 1$$

Dari $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ dapat kita cari nilai dari $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\tan \alpha}{\alpha}$, yaitu

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\tan \alpha}{\alpha} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\alpha} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha \cdot \cos \alpha} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\cos \alpha} \\ &= 1 \cdot \frac{1}{\cos 0} \\ &= 1 \cdot \frac{1}{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\tan \alpha} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} \cdot \cos \alpha \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow 0} \cos \alpha \\ &= 1 \cdot \cos 0 \\ &= 1 \cdot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\tan \alpha}{\alpha} = 1 \text{ atau } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\tan \alpha} = 1$$

Pekerjaan Rumah:

Diskusikan dengan temanmu darimana koordinat titik P, B dan Q diperoleh atau tanyakan pada guru kalian masing-masing.