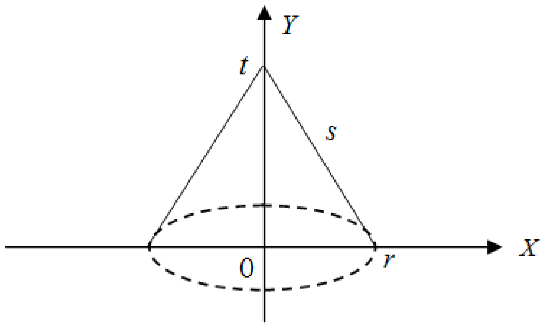
Integral – Luas Selimut Kerucut

Perhatikan gambar.
Diketahui garis s melalui titik (r, 0) dan (0, t), maka persamaan garis s adalah

$$tx + ry = tr \Rightarrow y = t - \frac{tx}{r}$$

$$\Rightarrow x = r - \frac{ry}{t}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{r}{t}$$



Jika garis s diputar mengelilingi sumbu Y, maka akan terbentuk sebuah kerucut dengan jari-jari alas r dan tinggi t. Luas selimut kerucut tersebut adalah,

$$
\begin{aligned}
L = 2p \int_c^d x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy &= 2p\int_0^t \left(r - \frac{ry}{t}\right)\sqrt{1+\frac{r^2}{t^2}}\,dy \\
&= 2pr\int_0^t \left(1-\frac{y}{t}\right)\sqrt{\frac{t^2+r^2}{t^2}}\,dy \\
&= 2pr\int_0^t \left(1-\frac{y}{t}\right)\sqrt{\frac{s^2}{t^2}}\,dy \\
&= 2pr\int_0^t \left(1-\frac{y}{t}\right)\frac{s}{t}\,dy \\
&= 2pr\int_0^t \left(\frac{s}{t}-\frac{s}{t^2}y\right)dy \\
&= 2pr\left[\frac{s}{t}y - \frac{s}{2t^2}y^2\right]_0^t \\
&= 2pr\left[s - \frac{1}{2}s\right] \\
&= 2pr\left[\frac{1}{2}s\right] \\
&= prs
\end{aligned}
$$