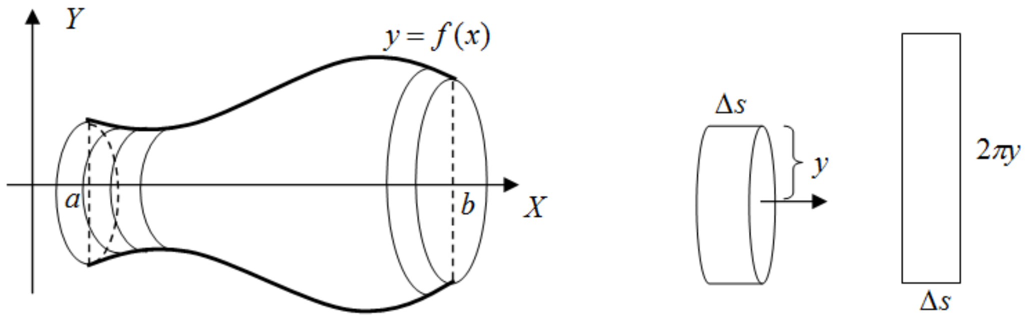
Integral – Luas Selimut Benda Putar

Perhatikan gambar.

Diketahui suatu kurva $y = f(x)$ pada interval $[a, b]$. Fungsi tersebut kontinu di setiap titik dan turunannya $f'(x)$ juga kontinu.



Kurva diputar mengelilingi sumbu X. Misalkan panjang kurva satu partisi adalah Δs dan luas selimut benda putarnya adalah ΔL , maka

$$\Delta L = 2pr \cdot \Delta s = 2py \cdot \Delta s$$

Luas selimut pada selang $[a, b]$ adalah

$$L = \sum_{i=1}^{n} 2py_i \Delta s_i = 2p \sum_{i=1}^{n} y_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i$$

Bila Δx sangat kecil sehingga mendekati 0 (n mendekati tak hingga), maka luasnya menjadi,

$$L = 2p \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} y_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i = 2p \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2p \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx$$

Jadi, luas selimut benda putar kurva $y = f(x)$ pada interval $[a, b]$ adalah:

$$\boxed{L = 2p \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2p \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx}$$

Dengan cara sama, tunjukkan luas selimut benda putar dari kurva yang diputar mengelilingi sumbu Y pada selang $[c, d]$ adalah $L = 2p \int_c^d x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = 2p \int_c^d g(y) \sqrt{1 + \left(g'(y)\right)^2} dy$