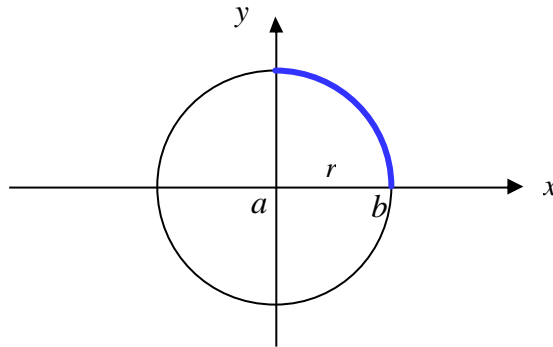


Integral – Keliling Lingkaran

Perhatikan gambar.

Diketahui persamaan suatu lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ atau $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ untuk y positif.



Keliling lingkaran adalah 4 kali panjang kurva pada interval $[0, r]$ yaitu yang berwarna biru. Sehingga kita peroleh,

$$K = 4 \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 4 \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = 4 \int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx = 4r \int_0^r \sqrt{\frac{1}{r^2 - x^2}} dx = 4r \int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx$$

Diketahui bahwa $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$

Maka keliling lingkaran menjadi,

$$\begin{aligned} K &= 4r \int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx \\ &= 4r \left[\arcsin \frac{x}{r} \right]_0^r \\ &= 4r \left[\arcsin \frac{r}{r} - \arcsin \frac{0}{r} \right] \\ &= 4r [\arcsin 1 - \arcsin 0] \\ &= 4r \left[\frac{\pi}{2} \right] \\ &= 2\pi r \end{aligned}$$