# Integral – Integral Subtitusi (2)

Diberikan integral dalam bentuk $\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx$ atau $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$ atau $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$.

Bentuk-bentuk tersebut dapat diubah dengan mensubtitusikan fungsi yang memuat trigonometri. Konsep dasarnya adalah mengubah bentuk akar menjadi bentuk fungsi trigonometri yang sederhana. Mari kita cari satu persatu,

Bentuk $\sqrt{x^2 + a^2}$

Misalkan

$$i).\ x = a \tan q,\ -\frac{p}{2} \le q \le \frac{p}{2},\ \frac{dx}{dq} = a \sec^2 q \Rightarrow dx = a \sec^2 q\, dq$$

$$ii).\ \tan q = \frac{x}{a} \Rightarrow q = \tan^{-1} \frac{x}{a}$$

Maka $\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{\left(a^2 \tan^2 q\right) + a^2} = \sqrt{a^2\left(1 + \tan^2 q\right)} = \sqrt{a^2 \sec^2 q} = a \sec q$

Bentuk $\sqrt{x^2 - a^2}$

Misalkan

$$i).\ x = a \sec q,\ -\frac{p}{2} \le q \le \frac{p}{2},\ \frac{dx}{dq} = -a \sec q \tan q \Rightarrow dx = -a \sec q \tan q\, dq$$

$$ii).\ \sec q = \frac{x}{a} \Rightarrow q = \sec^{-1} \frac{x}{a}$$

Maka $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\left(a^2 \sec^2 q\right) - a^2} = \sqrt{a^2\left(\sec^2 q - 1\right)} = \sqrt{a^2 \tan^2 q} = a \tan q$

Bentuk $\sqrt{a^2 - x^2}$

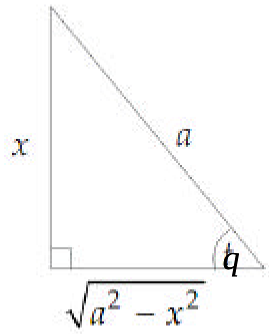
Misalkan

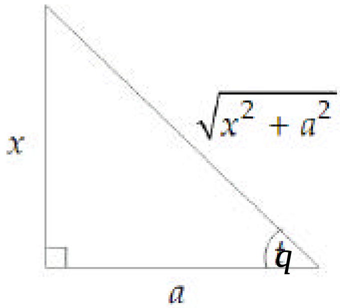
$$i).\ x = a \sin q,\ -\frac{p}{2} \le q \le \frac{p}{2},\ \frac{dx}{dq} = a \sin q \Rightarrow dx = a \sin q\, dq$$

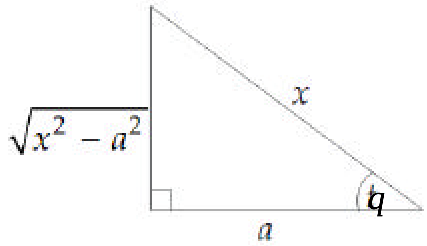
$$ii).\ \sin q = \frac{x}{a} \Rightarrow q = \sin^{-1} \frac{x}{a}$$

Maka $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - \left(a^2 \sin^2 q\right)} = \sqrt{a^2\left(1 - \sin^2 q\right)} = \sqrt{a^2 \cos^2 q} = a \cos q$

Untuk mengembalikan hasil pengitegralan dari bentuk fungsi trigonometri ke fungsi aljabar, kita gunakan perbandingan trigonometri berikut:




Contoh:

Hitunglah $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx$

Jawab:

Misalkan $x = 3\sin q \Rightarrow dx = 3\cos q\ dq$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx &= \int \frac{9\sin^2 q}{3\cos q}\cdot 3\cos q\ dq \\
&= \int 9\sin^2 q\ dq \\
&= 9\int \frac{1}{2}(1-\cos 2q)dq \\
&= \frac{9}{2}\left(q - \frac{1}{2}\sin 2q\right) + c \\
&= \frac{9}{2}q - \frac{9}{4}\sin 2q + c \\
&= \frac{9}{2}q - \frac{9}{2}\sin q\cos q + c \\
&= \frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3} - \frac{9}{2}\left(\frac{x}{3}\cdot\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\right) + c \\
&= \frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3} - \frac{x\sqrt{9-x^2}}{2} + c
\end{aligned}$$

$$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$$

$$\sin^2 A = \frac{1}{2}(1-\cos 2A)$$