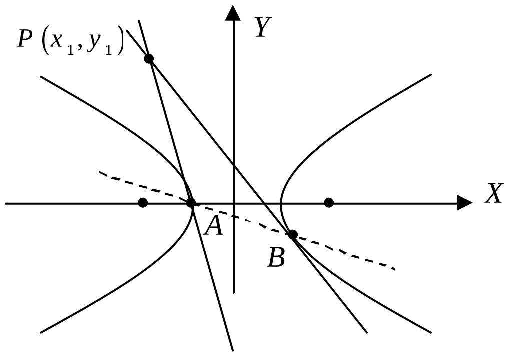
Hiperbola – PGS Melalui Titik di Luar Hiperbola



Gambar di atas menunjukkan sebuah hiperbola yang berpusat di titik (0, 0). Dengan titik fokus $F1$ (c, 0) dan $F2$ (– c, 0).

AP dan BP adalah garis singgung yang ditarik melalui titik P yang berada di luar hiperbola. Karena tidak ada rumus khusus dalam masalah ini, langkah-langkah menentukan persamaan garis singgung dapat dilakukan dengan:

1. Menentukan persamaan garis kutub AB dalam $y = mx + c$.
2. Mensubtitusikan persamaan garis kutub ke persamaan hiperbola. Diperoleh persamaan kuadrat dalam variabel x.
3. Menentukan syarat garis menyinggung hiperbola, yaitu diskriminan $D = 0$. Akan diperoleh 2 nilai x yang merupakan absis dari titik singgung.
4. Subtitusi nilai x ke persamaan garis kutub AB (bukan ke persamaan elips). Diperoleh 2 nilai y yang merupakan ordinat dari titik singgung.
5. Selanjutnya, menentukan persamaan garis singgung dengan menggunakan persamaan garis singgung melalui titik pada hiperbola.

Mencari persamaan garis kutub:

Garis singgung AP (sebut GS_A)

GS_A melalui titik A pada hiperbola, maka $\frac{x_A x}{a^2} - \frac{y_A y}{b^2} = 1$

GS_A melalui titik P, sehingga $\frac{x_A x_1}{a^2} - \frac{y_A y_1}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow b^2 x_A x_1 - a^2 y_A y_1 = a^2 b^2$ .... (1)

Garis singgung BP (sebut GS_B)

GS_B melalui titik B pada hiperbola, maka $\frac{x_B x}{a^2} - \frac{y_B y}{b^2} = 1$

GS_B melalui titik P, sehingga $\frac{x_B x_1}{a^2} - \frac{y_B y_1}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow b^2 x_B x_1 - a^2 y_B y_1 = a^2 b^2$ .... (2)

Kurangkan (1) dengan (2), diperoleh:

$$b^2x_1(x_A - x_B) - a^2y_1(y_A - y_B) = 0 \quad \Rightarrow \frac{(y_A - y_B)}{(x_A - x_B)} = \frac{b^2x_1}{a^2y_1},$$ adalah gradien garis AB.

Persamaan garis AB adalah:

$$y - y_A = m(x - x_A) \quad \Rightarrow \quad y - y_A = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_A)$$

$$\Rightarrow a^2y_1y - a^2y_1y_A = b^2x_1x - b^2x_1x_A$$

$$\Rightarrow a^2y_1y - b^2x_1x = -b^2x_1x_A + a^2y_1y_A$$

$$\Rightarrow b^2x_1x - a^2y_1y = b^2x_1x_A - a^2y_1y_A$$

$$\Rightarrow \frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = \frac{x_1x_A}{a^2} - \frac{y_1y_A}{b^2} \qquad \text{(dibagi } a^2b^2\text{)}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1 \qquad \text{(persamaan (1))}$$

Jadi, persamaan garis kutub AB adalah: $\boxed{\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1}$

Demikian juga:

Persamaan garis kutub dari titik P pada hiperbola yang berpusat di titik (0, 0) dengan titik fokus pada sumbu Y, $F1$ (0, c) dan $F2$ (0, – c) adalah:

$$\frac{x_1x}{b^2} - \frac{y_1y}{a^2} = -1$$

Persamaan garis kutub dari titik P pada hiperbola yang berpusat di titik (h, k) dengan titik fokus pada sumbu utama yang sejajar dengan sumbu X, $F1$ ($h + c$, k) dan $F2$ ($h - c$, k) adalah:

$$\frac{(x_1 - h)(x - h)}{a^2} - \frac{(y_1 - k)(y - k)}{b^2} = 1$$

Persamaan garis kutub dari titik P pada hiperbola yang berpusat di titik (h, k) dengan titik fokus pada sumbu utama yang sejajar dengan sumbu Y, $F1$ (h, $k + c$) dan $F2$ (h, $k - c$) adalah:

$$\frac{(x_1 - h)(x - h)}{b^2} - \frac{(y_1 - k)(y - k)}{a^2} = -1$$