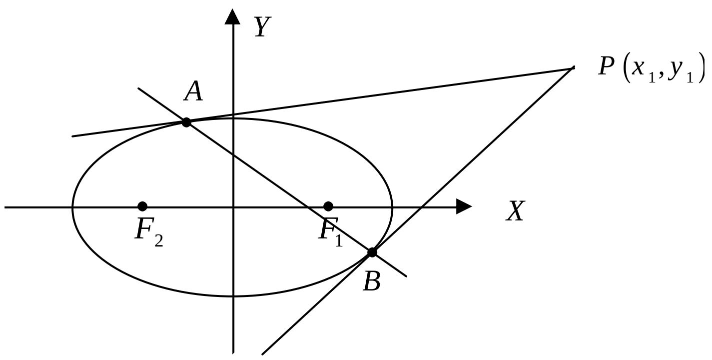
Elips – PGS Melalui Titik di Luar Elips



Gambar di atas menunjukkan sebuah elips yang berpusat di titik (0, 0). Dengan titik fokus $F1$ (c, 0) dan $F2$ ($-c$, 0).

AP dan BP adalah garis singgung yang ditarik melalui titik P yang berada di luar elips. Karena tidak ada rumus khusus dalam masalah ini, langkah-langkah menentukan persamaan garis singgung dapat dilakukan dengan:

1. Menentukan persamaan garis kutub AB dalam $y = mx + c$.
2. Mensubtitusikan persamaan garis kutub ke persamaan elips. Diperoleh persamaan kuadrat dalam variabel x.
3. Menentukan syarat garis menyinggung elips, yaitu diskriminan $D = 0$. Akan diperoleh 2 nilai x yang merupakan absis dari titik singgung.
4. Subtitusi nilai x ke persamaan garis kutub AB (bukan ke persamaan elips). Diperoleh 2 nilai y yang merupakan ordinat dari titik singgung.
5. Selanjutnya, menentukan persamaan garis singgung dengan menggunakan persamaan garis singgung melalui titik pada elips.

Mencari persamaan garis kutub:

Garis singgung AP (sebut GS_A)

GS_A melalui titik A pada elips, maka $\dfrac{x_A x}{a^2} + \dfrac{y_A y}{b^2} = 1$

GS_A melalui titik P, sehingga $\dfrac{x_A x_1}{a^2} + \dfrac{y_A y_1}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow b^2 x_A x_1 + a^2 y_A y_1 = a^2 b^2$ .... (1)

Garis singgung BP (sebut GS_B)

GS_B melalui titik B pada elips, maka $\dfrac{x_B x}{a^2} + \dfrac{y_B y}{b^2} = 1$

GS_B melalui titik P, sehingga $\dfrac{x_B x_1}{a^2} + \dfrac{y_B y_1}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow b^2 x_B x_1 + a^2 y_B y_1 = a^2 b^2$ .... (2)

Kurangkan (1) dengan (2), diperoleh:

$$b^2x_1\left(x_A - x_B\right) + a^2y_1\left(y_A - y_B\right) = 0 \quad \Rightarrow \frac{\left(y_A - y_B\right)}{\left(x_A - x_B\right)} = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1},$$ adalah gradien garis AB.

Persamaan garis AB adalah:

$$y - y_A = m\left(x - x_A\right) \quad \Rightarrow \quad y - y_A = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\left(x - x_A\right)$$

$$\Rightarrow \quad a^2y_1y - a^2y_1y_A = -b^2x_1x + b^2x_1x_A$$

$$\Rightarrow \quad a^2y_1y + b^2x_1x = b^2x_1x_A + a^2y_1y_A$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = \frac{x_1x_A}{a^2} + \frac{y_1y_A}{b^2} \qquad \text{(dibagi } a^2b^2\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1 \qquad \text{(persamaan (1))}$$

Jadi, persamaan garis kutub AB adalah: $\boxed{\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1}$

Demikian juga:

Persamaan garis kutub dari titik P pada elips yang berpusat di titik (0, 0) dengan titik fokus pada sumbu Y, F_1 (0, c) dan F_2 (0, – c) adalah:

$$\frac{x_1x}{b^2} + \frac{y_1y}{a^2} = 1$$

Persamaan garis kutub dari titik P pada elips yang berpusat di titik (h, k) dengan titik fokus pada sumbu mayor yang sejajar dengan sumbu X, F_1 ($h + c$, k) dan F_2 ($h – c$, k) adalah:

$$\frac{\left(x_1 - h\right)\left(x - h\right)}{a^2} + \frac{\left(y_1 - k\right)\left(y - k\right)}{b^2} = 1$$

Persamaan garis kutub dari titik P pada elips yang berpusat di titik (h, k) dengan titik fokus pada sumbu mayor yang sejajar dengan sumbu Y, F_1 (h, $k + c$) dan F_2 (h, $k – c$) adalah:

$$\frac{\left(x_1 - h\right)\left(x - h\right)}{b^2} + \frac{\left(y_1 - k\right)\left(y - k\right)}{a^2} = 1$$