Barisan dan Deret – Jumlah Bilangan Kubik

Berapakah jumlah dari $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 33^3$?

Jawab:

$$
\begin{aligned}
&1^3 &&= 1 = 1^2 \\
&1^3 + 2^3 &&= 9 = 3^2 \\
&1^3 + 2^3 + 3^3 &&= 36 = 6^2 \\
&1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 &&= 100 = 10^2 \\
&1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 &&= 225 = 15^2
\end{aligned}
$$

dst...

Perhatikan barisan bilangan:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
1, & & 3, & & 6, & & 10, & & 15, & & 21, & & \dots \\
 & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & \dots & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \dots & &
\end{array}
$$

Merupakan barisan bertingkat 2, sehingga bisa kita misalkan $U_n = an^2 + bn + c$, diperoleh SPLTV (Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel):

$$
\begin{aligned}
U_1 &= a + b + c = 1 \\
U_2 &= 4a + 2b + c = 3 \\
U_3 &= 9a + 3b + c = 6
\end{aligned}
$$

Setelah kita selesaikan SPLTV tersebut, dengan Subtitusi/Eliminasi ataupun bantuan IT, diperoleh: $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, \text{dan } c = 0$

Sehingga:

$$U_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

Dengan demikian kita akan dapatkan:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Dan

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + 33^3 = \left[\frac{33(34)}{2}\right]^2 = (33 \times 17)^2 = 561^2 = 314.721$$