

Barisan dan Deret – Jumlah Bilangan Kuadrat

Berapakah jumlah dari $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2$?

Jawab:

$$1^2 = 1$$

$$1^2 + 2^2 = 5$$

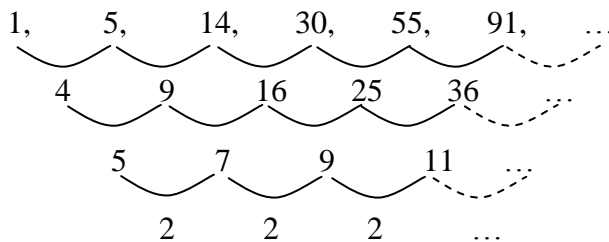
$$1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

dst...

Perhatikan bilangan:



Merupakan barisan bertingkat 3, sehingga bisa kita misalkan $U_n = an^3 + bn^2 + cn + d$, diperoleh SPLEV (Sistem Persamaan Linear Empat Variabel):

$$U_1 = a + b + c + d = 1$$

$$U_2 = 8a + 4b + 2c + d = 5$$

$$U_3 = 27a + 9b + 3c + d = 14$$

$$U_4 = 64a + 16b + 4c + d = 30$$

Setelah kita selesaikan SPLEV tersebut, dengan Substitusi/Eliminasi ataupun bantuan IT,

diperoleh: $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{6},$ dan $d = 0$

Sehingga:

$$\begin{aligned}U_n &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \\&= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \\&= \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} \\&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

Dengan demikian kita akan dapatkan:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Dan

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 100^2 = \frac{100(101)(201)}{6} = 50 \times 101 \times 67 = 338.350$$

