Barisan dan Deret – Deret Ganjil Unik

Diketahui:

$$\begin{aligned}
&1 &&= 1\\
&3+5 &&= 8\\
&7+9+11 &&= 27\\
&13+15+17+19 &&= 64\\
&21+23+25+27+29 &&= 125 \quad dst...
\end{aligned}$$

Dari jumlah deretnya kita bisa menuliskannya kembali sebagai:

$$\begin{aligned}
&\text{Baris ke}-1:\ 1 &&= 1 = 1^3\\
&\text{Baris ke}-2:\ 3+5 &&= 8 = 2^3\\
&\text{Baris ke}-3:\ 7+9+11 &&= 27 = 3^3\\
&\text{Baris ke}-4:\ 13+15+17+19 &&= 64 = 4^3\\
&\text{Baris ke}-5:\ 21+23+25+27+29 &&= 125 = 5^3\\
&dst...\\
&\text{Baris ke}-k:\ (k^2-k+1)+(k^2-k+3)+...+(k^2+k-1) = k^3
\end{aligned}$$

Perhatikan barisan dari suku pertama masing-masing baris:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1, & & 3, & & 7, & & 13, & & 21, & & 31, & & \dots\\
 & 2 & & 4 & & 6 & & 8 & & 10 & & \dots & \\
 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & \dots & &
\end{array}$$

Merupakan barisan bertingkat 2, sehingga bisa kita misalkan $a_k = pk^2 + qk + r$, diperoleh SPLTV (Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel):

$$a_1 = p + q + r = 1$$
$$a_2 = 4p + 2q + r = 3$$
$$a_3 = 9p + 3q + r = 7$$

Setelah kita selesaikan SPLTV tersebut, dengan Subtitusi/Eliminasi ataupun bantuan IT, diperoleh: $p = 1, q = -1, \text{dan } r = 1$

Dengan a_k adalah suku pertama baris ke – *k*, kita dapatkan

$$a_k = k^2 - k + 1$$

Dengan cara yang sama, dengan mengambil suku-suku terakhir dari masing-masing baris, kita akan mendapatkan nilai dari suku terakhir baris ke-*k* adalah

$$U_k = k^2 + k - 1$$

Untuk suku kedua hingga suku sebelum suku terakhir, kita tinggal menambahkan suku pertama dengan 2, dan seterusnya. Karena jelas deret bilangan ganjil punya beda 2.

Contoh:

Tentukan deret pada baris ke 20 dan jumlahnya jika diketahui,

$$\begin{array}{lcl} 1 & = & 1 \\ 3+5 & = & 8 \\ 7+9+11 & = & 27 \\ 13+15+17+19 & = & 64 \\ 21+23+25+27+29 & = & 125 \quad dst... \end{array}$$

Jawab:

$$a_{20} + \ldots + U_{20} = 20^3 \Rightarrow (20^2 - 20 + 1) + (20^2 - 20 + 3) + \ldots + (20^2 + 20 - 1) = 20^3$$
$$\Rightarrow \underbrace{381 + 383 + \ldots + 419}_{20\ SUKU} = 20^3$$