Problems

1. Tentukanbilanganbulatpositifterbesar$n$ sehingga n^3+100 habis dibagi $n+10$
2. Diberikan$p$ adalah bilangan prima yang berbentuk $3k+2$ yang membagi a^2+ab+b^2 untuk bilangan bulat a,b. Buktikan bahwa a dan b masing-masing habis dibagi p
3. Buktikanadatakhinggabilangan prima berbentuk$4k-1$ yang kongruen 3 mod 4.
4. Cariseluruhbilangan prima p,q sehingga $p+q=(p-q)^3$
5. Buktikanadatakhinggabanyaknyabilangan prima
6. Tunjukkanbahwauntuksetiapbilanganbulatpositif$n$ maka $121^n-25^n+1900^n-(-4)^n$habisdibagi 2000.
7. Misalkan$n$ adalahbilanganbulat lebih dari 6. Buktikan bahwa jika $n-1$ dan $n+1$ keduanya prima maka $n^2(n^2+16)$ habis dibagi 720
8. Tunjukkantidakadabilanganbulata,b,c yang memenuhi $a^2+b^2-8c=6$
9. Untuk$n$ bilangan bulat, tunjukkan bahwa $n^2+2n+12$ bukan merupakan kelipatan 121
10. Buktikanjika$p$ dan $p+2$ keduanya bilangan prima lebih besardari 3, maka 6 merupakan factor dari$p+1$
11. $n$adalah bilangan bulat. Jika angka puluhan n^2 adalah 7, apakah angka satuan dari n^2

Solutions

1. Perhatikan, $n^3+1000=(n+10)(n^2-10n+100)$, sehingga $(n+10)|(n^3+1000)$ $(n+10)|((n^3+100)+900)$, karena $(n+10)|(n^3+100)$, maka haruslah $(n+10)|900$, sehingga nilai paling besar yang memenuhi adalah $n+10=900,\ n=890$
2. Aaa
3. $4k-1\equiv -1\ mod\ 4\equiv 3\ mod\ 4$. Jadikitatinggalmembuktikanadatakhinggabanyaknyabilangan prima yang berbentuk$4k-1$
4. Dsd
5. Akan kitabuktikandengankontradiksi, andaibilangan prima jumlahnyaberhingga, misalbilangan prima paling besar= p_k. Misal= $p_1.p_2 \dots p_k+1$, yaituperkalianseluruhbilangan prima dari prima pertamasampai$p_k$ditambahsatu. Perhatikan, A tidak habis dibagi oleh bilangan prima apapun dari $p_1$sampai$p_k$makaharuslah$A$ merupakan bilangan prima yang lebih besar dari $p_k$atau$A$ habis dibagi bilangan prima yang lebih besar dari p_k, kontradiksidenganpernyataanawalkitatadi. Jadibilangan prima adatakhinggabanyaknya

6. Kita punya$(a-b)$ habis membagi $(a^n - b^n)$,sehingga$125|(121^n - (-4)^n)$dan$1875|(1900^n - 25^n)$, karena $125|1875$,maka$125|(1900^n - 25^n)$, jadi$125|121^n - 25^n + 1900^n - (-4)^n$.
   $96|(121^n - 25^n)$, dan$1904|(1900^n - (-4)^n)$, karena 16 habis membagi 96 dan 1904, maka $16|121^n - 25^n + 1900^n - (-4)^n$.
   Karena 125 dan 16 relatif prima maka$121^n - 25^n + 1900^n - (-4)^n$habisdibagi$125 \times 16 = 2000$
7. $720 = 5.3^2.2^4$. Akan dibuktikan$n^2(n^2+16)$habisdibagi 5, 9 dan 16
   Sebuahbilanganakantermasukdalambentuk$5k-2, 5k-1$,$5k$, $5k+1$, $5k+2$. $n$tidak mungkin berbentuk $5k-1$, atau $5k+1$ karena akan menyebabkan $n+1$ atau $n-1$ habis dibagi 5
   Jika$n = 5k \pm 2$ maka $n^2(n^2+16) \equiv (\pm 2)^2((\pm 2)^2 + 16) mod\ 5 \equiv 4(20) mod\ 5\ \equiv 0\ mod\ 5$
   Jika$n = 5k$, jelas$5|n^2(n^2+16)$.
   Jadi$n^2(n^2+16)$habisdibagi 5
   Sebuahbilanganjugaakantermasukdalam$3r-1, 3r, 3r+1$
   nCumadipenuhiuntuk$n$ =3r, karena bentuk lain akan menyebabkan $n-1$ atau $n+1$habisdibagi 3. Karena$n = 3r$, maka jelas $9|n^2 \rightarrow 9|n^2(n^2+16)$
   Karena$n-1$ dan $n+1$ bilangan prima lebih dari 6, maka haruslah kedua-duanya ganjil yang menyebabkan $n$genap, misal$n = 2p$. $n^2(n^2+16) = 4p^2(4p^2+16) = 16p^2(p^2+4)$jadi$n^2(n^2+16)$habisdibagi 16
   Karena$n^2(n^2+16)$habisdibagi 5, 9 dan 16, danketigabilangantersebutsaling relative prima maka$n^2(n^2+16)$habisdibagi (5x9x16)=720
8. Bilanganbulatakantermasukdalambentuk$4k-1, 4k, 4k+1, 4k+2$
   Untuk$N = 4k$, maka $N^2 = 16k^2 \equiv 0\ mod\ 8$
   Untuk$N = 4k \pm 1$, maka $N^2 = 8(2k^2 + k) + 1 \equiv 1\ mod\ 8$
   Untuk$N = 4k + 2$, maka $N^2 = 8(2k^2 + 2k) + 4 \equiv 4\ mod\ 8$
   Jadikuadratsuatubilanganbersisa 0,1, 4 jikadibagidelapan
   Maka$a^2 + b^2 - 8c$ jika dibagi 8 akan bersisa 0,1,2,4,atau 5 jikadibagi 8. Sedangkanruaskananbersisa 6, kontradiksi.Jaditidakadabilanganbulata, b, c yang memenuhi

9. $n^2 + 2n + 12 = n^2 + 13n + 12 - 11n = (n+12)(n+1) - 11n$ .Misalkan $n^2 + 2n + 12$ kelipatan 121 maka $(n+12)(n+1) - 11n$ harus habis dibagi 121, karena$11|11n$ maka $(n+12)(n+1)$ habis dibagi 11, maka n yang memenuhi hanya ketika$n = 11k - 1\ \ \forall\ k\ \epsilon\ \mathbb{N}$, jika $n = 11k - 1$ maka $(n+12)(n+1) = (11k+11)(11k) \equiv 0\ mod\ 121$. Tapi ketika n=11k-1 maka $11n = 11(11k-1) \neq 0\ mod\ 121$. Sehinggatidakadabilanganbulat$n$ yang memenuhi

10. Karenamerupakantigabilanganberurutan, makasalahsatudari$p, p+1, p+2$habisdibagi 3. Karenasemuanyalebihdari 3, dan$p$ serta $p+2$ adalah bilangan prima, maka haruslah $p+1$habisdibagi 3. Karena$p$ dan $p+2$ merupakan bilangan prima yang lebih dari 3, maka haruslah keduanya merupakan bilangan ganjil, yang menyebabkan $p+1$ genap, $p+1$habisdibagi 2. Karena 2 dan 3 relatif prima maka$p+1$habisdibagi 6
11. Angkasatuandaribilangankuadratadalah 0,1,4,5,6,9. Dari soal no 8 kitadapatjikakuadratsuatubilanganharushabisdibagi 4 ataubersisa 1. Untukmengujisuatubilangandibagi 4 kitacukupmenguji 2 digit terakhirsaja. Perhatikan, 70 dan 74 bersisa 2 jikadibagi 4, makabukanlahbilangankuadrat. 71, 75, dan 79 bersisa 3 jikadibagi 4, makajugabukanbilangankuadrat. Jadidipenuhiuntuk 2 digit terakhirnya 76. Jadiangkasatuannya 76, contohnya$576=24^2$