

ALJABAR

BAGIAN I

- Diberikan $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 = 0$. Tentukan $a^{2000} + a^{2010} + 1$.
- Diberikan sistem persamaan
$$\begin{aligned}2010(x - y) + 2011(y - z) + 2012(z - x) &= 0 \\ 2010^2(x - y) + 2011^2(y - z) + 2012^2(z - x) &= 2011\end{aligned}$$
Tentukan $z - y$.
- Misalkan a dan b adalah dua bilangan real sehingga
$$a^2 + b^2 + 8a - 14b + 65 = 0.$$
Tentukan $a^2 + ab + b^2$.
- Diberikan $14(a^2 + b^2 + c^2) = (a + 2b + 3c)^2$, tentukan rasio $a : b : c$.
- Diberikan persamaan $2a(x + 6) = 4x + 1$ tidak memiliki solusi, dimana a sebuah parameter. Tentukan nilai a .
- Dua bilangan real x, y memenuhi $(x + \sqrt{1 + x^2})(y + \sqrt{1 + y^2}) = 1$. Berapakah nilai $x + y$?
- Jika $f(x) = \frac{9^x}{3 + 9^x}$, berapakah nilai $f\left(\frac{1}{9}\right) + f\left(\frac{2}{9}\right) + f\left(\frac{3}{9}\right) + \dots + f\left(\frac{8}{9}\right)$.
- Hitunglah nilai $\frac{(1 \times 2 \times 3) + (2 \times 3 \times 4) + (3 \times 4 \times 5) + \dots + (2010 \times 2011 \times 2012)}{1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \dots + 2010^2 - 2011^2}$.
- Tentukan himpunan penyelesaian $(x^2 - 3x + 3)^2 - 3(x^2 - 3x + 3) + 3 = x$.
- Jika $f(x + 1) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}$ dan $f(1) = 2$, hitung $f(2008)$.

BAGIAN II

- Misalkan a, b, c bilangan real. Buktikan
$$17a^2 + 5b^2 + 10c^2 \geq 4ab + 6bc + 8ac$$
- Tentukan solusi real dari persamaan
$$(x + y)^2 = (x + 1)(y - 1)$$

TEORI BILANGAN I

BAGIAN I

1. Tentukan jumlah dari semua pembagi positif dari 10000.
2. Kuadrat sebuah bilangan bulat bila dibagi dengan 19 memberikan suatu bilangan prima dan sisa pembagian 9. Berapakah bilangan prima yang dimaksud?
3. Bilangan n terbesar sehingga 8^n membagi 44^{44} adalah ...
4. Suatu bilangan tujuh digit sebut saja N semua digitnya berbeda. Maka N tidak mungkin mengandung digit ...
5. Tentukan semua bilangan bulat positif n sehingga $n^2 + 1$ habis dibagi $n + 1$.
6. Tentukan semua bilangan bulat $x \neq 3$ sehingga $x - 3 \mid x^3 - 3$.
7. Tentukan pembagi terbesar dari 1001001001 yang tidak melebihi 10000.
8. Hitung $\text{fpb}(2002 + 2, 2002^2 + 2, 2002^3 + 2, \dots)$.
9. Diberikan sebuah barisan enam bilangan bulat positif yang monoton naik dimana setiap bilangan (kecuali bilangan pertama) adalah kelipatan dari bilangan sebelumnya dan jumlah keenam bilangan tersebut adalah 79. Tentukan bilangan terbesar dalam barisan tersebut.
10. Tentukan nilai $a+b$ dimana $aabb$ adalah bilangan kuadrat sempurna.

BAGIAN II

1. Misalkan m dan n bilangan bulat positif sehingga
$$\text{fpb}(m, n) + \text{kpk}(m, n) = m + n.$$
Buktikan bahwa salah satu dari dua bilangan tersebut habis dibagi bilangan lainnya.
2. Buktikan jika $9 \mid a^3 + b^3 + c^3$ untuk suatu bilangan bulat a, b, c maka salah satu dari a, b, c habis dibagi 3.

TEORI BILANGAN II

BAGIAN I

1. Misalkan N adalah bilangan bulat terkecil yang bersifat : bersisa 2 jika dibagi 5, bersisa 3 jika dibagi 7, dan bersisa 4 jika dibagi 9. Berapakah hasil penjumlahan digit-digit N ?
2. Tentukan semua solusi dari persamaan $x^2 - 8[x] + 7 = 0$.
3. Tentukan semua bilangan bulat positif n dimana $n! + 5$ adalah bilangan pangkat tiga.
4. Tentukan semua solusi bulat positif dari persamaan $12x + 5y = 125$.
5. Tentukan semua solusi dari persamaan $2[x] = x + \{x\}$.
6. Tentukan solusi umum dari $3x \equiv 5 \pmod{7}$.
7. Tentukan semua bilangan bulat positif n dimana $3n - 4$, $4n - 5$, dan $5n - 3$ merupakan bilangan prima.
8. Misalkan $A = 2222^{5555} + 5555^{2222}$. Tentukan sisa pembagian A oleh 13.
9. Banyaknya bilangan bulat positif n kurang dari 2012 yang mempunyai tepat $n/2$ bilangan kurang dari n dan relatif prima terhadap n adalah ...
10. Tentukan bilangan bulat positif n terkecil sehingga $999999 \cdot n = 111 \dots 11$.

BAGIAN II

1. Misalkan p adalah bilangan prima lebih besar dari 5. Buktikan bahwa $p - 4$ bukan merupakan bilangan pangkat empat.
2. Misalkan $n > 1$ bilangan bulat ganjil. Buktikan bahwa n tidak membagi $3^n + 1$.

KOMBINATORIKA

BAGIAN I

1. Dalam sebuah kotak terdapat 5 bola merah dan 10 bola putih. Jika diambil dua bola bersamaan, berapa peluang memperoleh dua bola berwarna sama?
2. Sekelompok orang akan berjabat tangan. Setiap orang hanya dapat melakukan jabat tangan sekali. Tidak boleh melakukan jabat tangan dengan dirinya sendiri. Jika dalam sekelompok orang tersebut terdapat 190 jabat tangan, maka banyaknya orang dalam kelompok tersebut adalah ...
3. Seseorang mengambil sebuah kartu dari 4 kartu yang bernomor 1, 2, 3, 4 dari sebuah kotak kemudian mencatatnya dan meletakkannya kembali. Dia melakukan hal tersebut sebanyak 4 kali. Jika pada akhir didapatkan jumlah nomor-nomor kartu adalah 12, berapakah peluang bahwa kartu yang terambil selalu 3?
4. Tentukan banyaknya bilangan bulat positif yang tidak melebihi 2012 yang merupakan kelipatan 3 atau 4 tetapi bukan kelipatan 5.
5. Di dalam sebuah laci pada ruangan gelap terdapat 100 kaus kaki merah, 80 kaus kaki hijau, 60 kaus kaki biru, dan 40 kaus kaki hitam. Seseorang mengambil sejumlah kaus kaki tanpa dapat melihat warna kaus kaki. Berapa banyakkah kaus kaki minimal yang harus diambil agar dijamin terdapat 10 pasang kaus kaki? (sepasang kaus kaki adalah dua kaus kaki dengan warna sama)
6. Tentukan banyaknya cara memilih lima bilangan dari 18 bilangan bulat positif pertama sehingga setiap dua diantaranya berbeda paling sedikit 2.
7. Tentukan banyaknya solusi bulat positif ganjil dari $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 98$.
8. Sebuah nomor telepon 7-digit $d_1d_2d_3 - d_4d_5d_6d_7$ disebut *memorable* jika barisan $d_1d_2d_3$ sama dengan $d_4d_5d_6$ atau $d_4d_5d_6d_7$. Setiap d_i merupakan angka 0, 1, ..., 9. Tentukan banyaknya nomor telepon *memorable* yang dapat dibuat.
9. Berapa banyak cara menyusun angka 21, 31, 41, 51, 61, 71, dan 81 sehingga jumlah dari setiap empat bilangan berurutan habis dibagi 3?
10. Misalkan $x = 0,123456789101112...998999$, dimana digit-digitnya diperoleh dengan menulis bilangan bulat dari 0 hingga 999 secara berurutan. Tentukan digit ke-1983 di belakang koma.

BAGIAN II

1. Misalkan P_1, P_2, \dots, P_9 adalah titik letis pada sebuah bidang dan tidak terdapat tiga titik kolinear. Buktikan terdapat titik letis L pada suatu segmen P_iP_j , $i \neq j$.
2. Buktikan bahwa pada himpunan $\{1, 2, \dots, 3000\}$ tidak terdapat subhimpunan A yang memiliki 2000 anggota dimana $x \in A \Rightarrow 2x \notin A$.

GEOMETRI

BAGIAN I

1. Misalkan x adalah bilangan real sehingga $\sec x - \tan x = 2$. Tentukan $\sec x + \tan x$.
2. Tentukan banyaknya segitiga yang memiliki keliling 17.
3. Segitiga siku-siku ABC memiliki keliling 30 dan luas 30. Tentukan semua kemungkinan panjang ketiga sisi segitiga tersebut.
4. Pada segitiga sama-sisi ABC, titik D dan E terletak pada sisi AC dan BC berturut-turut sehingga BD dan CE berpotongan pada P, dan luas dari segiempat ADPE sama dengan luas segitiga BPC. Tentukan besar sudut BPE.
5. Pada segitiga ABC, $\angle ACB = 60^\circ$, $\angle BAC = 75^\circ$, AD tegak lurus BC di D, BE tegak lurus AC di E, AD berpotongan BE di H. Tentukan besar sudut CHD.
6. Pada segitiga ABCD, BE adalah garis bagi sudut $\angle ABC$, AD garis berat dan berpotongan dengan BE pada titik O. Panjang BE = AD = 3. Tentukan panjang ketiga sisi ABC.
7. ABCD adalah trapesium dengan AB sejajar CD dan $AB < DC$. AC dan BD berpotongan pada titik E, EF sejajar AB dan memotong BC pada F. Jika panjang AB = 20, CD = 80, BC = 100, tentukan panjang EF.
8. Pada segitiga ABC, AB = 8, BC = 7, CA = 6. Sisi BC diperpanjang hingga titik P sehingga segitiga PAB sebangun dengan segitiga PCA. Tentukan panjang sisi PC.
9. Pada persegi panjang ABCD, AD = 12, AB = 5. P adalah titik pada AD sehingga PE tegak lurus BD pada E dan PF tegak lurus AC pada F. Tentukan PE + PF.
10. Pada segitiga ABC, D, E, F pada sisi BC, CA, AB berturut-turut sehingga ketiganya berpotongan di titik G. Panjang BD = 2CD dan luas GEC = 3, luas GCD = 4. Tentukan luas ABC.

BAGIAN II

1. Pada segitiga ABC, titik D, E, F terletak pada sisi BC, AC, AB berturut-turut sehingga AD, BE, CF berpotongan di titik O. Buktikan

$$\frac{OD}{AD} + \frac{OE}{BE} + \frac{OF}{CF} = 1$$

2. Pada segitiga ABC besar sudut A sama dengan dua kali besar sudut B. Buktikan
 $AC^2 + AB \cdot AC = BC^2$