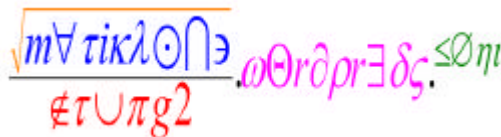


## Galeri Soal



82 Soal dengan Pembahasan, 250 Soal Latihan

Dirangkum Oleh:  
**Anang Wibowo, S.Pd**



Nopember 2012

MatikZone's Series

---

---

Email : [matikzone@gmail.com](mailto:matikzone@gmail.com) Blog : [www.matikzone.wordpress.com](http://www.matikzone.wordpress.com) HP : 085 233 897 897

© Hak Cipta Dilindungi Undang-undang. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh isi galeri ini tanpa mendo'akan kebaikan untuk kami dan umat islam seluruhnya. Dan jangan lupa mencantumkan sumbernya ya...

# Soal-soal Lingkaran dan Penyelesaiannya

1. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di  $P(0,0)$  dengan jari-jari  $r = 5$ .

**Jawab:**

Persamaan lingkaran dengan pusat  $P(0,0)$  dan jari-jari  $r$  adalah  $x^2 + y^2 = r^2$ ,  
(Bentuk Baku)

maka persamaan lingkaran yang berpusat di  $P(0,0)$  dengan jari-jari  $r = 5$  adalah:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= r^2 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 &= 5^2 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 &= 25\end{aligned}$$

2. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di  $P(3,5)$  dengan jari-jari  $r = 9$ .

**Jawab:**

Persamaan lingkaran dengan pusat  $P(a, b)$  dan jari-jari  $r$  adalah

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2, \\ \text{(Bentuk Baku)}$$

maka persamaan lingkaran yang berpusat di  $P(3,5)$  dengan jari-jari  $r = 9$  adalah:

$$\begin{aligned}(x-a)^2 + (y-b)^2 &= r^2 & \Rightarrow (x-3)^2 + (y-5)^2 &= 81 \\ \Rightarrow (x-3)^2 + (y-5)^2 &= 9^2 & \text{atau} & \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 - 81 = 0 \\ \Rightarrow (x-3)^2 + (y-5)^2 &= 81 & \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 10y - 47 &= 0\end{aligned}$$

(Bentuk Umum)

3. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran  $x^2 + y^2 = 10$

**Jawab:**

$$x^2 + y^2 = 10 \Rightarrow x^2 + y^2 = (\sqrt{10})^2, \text{ sehingga } P(0,0) \text{ dan } r = \sqrt{10}$$

4. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran  $(x+5)^2 + (y-4)^2 = 49$

**Jawab:**

$$(x+5)^2 + (y-4)^2 = 49 \Rightarrow (x-(-5))^2 + (y-4)^2 = 7^2, \text{ sehingga } P(-5, 4) \text{ dan } r = 7$$

5. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran  $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$

**Jawab:**

**Cara 1:**

Persamaan lingkaran dalam bentuk umum  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$  dapat diubah dalam bentuk baku (dengan melengkapkan bentuk kuadrat) sebagai berikut:

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0 &\Rightarrow x^2 - 2x + (-1)^2 + y^2 - 6y + (-3)^2 = -6 + (-1)^2 + (-3)^2 \\ &\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 4 \\ &\Rightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh  $P(1, 3)$  dan  $r = 2$

**Cara 2:**

Persamaan lingkaran dalam bentuk umum  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$  mempunyai titik

$$\text{pusat } P\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right) \text{ dan jari-jari } r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C},$$

maka lingkaran  $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$  mempunyai  $P\left(-\frac{1}{2}(-2), -\frac{1}{2}(-6)\right) = P(1, 3)$

$$\text{dan } r = \sqrt{\frac{1}{4}(-2)^2 + \frac{1}{4}(-6)^2 - 6} = \sqrt{1 + 9 - 6} = \sqrt{4} = 2$$

6. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran  $2x^2 + 2y^2 + 3x - 7y - 1 = 0$

**Jawab:**

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2y^2 + 3x - 7y - 1 = 0 &\Rightarrow x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}y - \frac{1}{2} = 0 \\ &\Rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + y^2 - \frac{7}{2}y + \left(-\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(-\frac{7}{4}\right)^2 \\ &\Rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + y^2 - \frac{7}{2}y + \left(-\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{33}{8} \\ &\Rightarrow \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{33}{8} \end{aligned}$$

$$\text{sehingga diperoleh } P\left(-\frac{3}{4}, \frac{7}{4}\right) \text{ dan } r = \sqrt{\frac{33}{8}}$$

7. Diketahui lingkaran dengan persamaan  $x^2 + y^2 + ax + by + 19 = 0$  melalui titik  $A(-2, 9)$  dan  $B(4, 3)$ , maka nilai  $a + b = \dots$

**Jawab:**

Titik  $A(-2, 9)$  dan  $B(4, 3)$  dilalui  $L \equiv x^2 + y^2 + ax + by + 19 = 0$ , maka

$$A(-2, 9): (-2)^2 + 9^2 + a(-2) + b(9) + 19 = 0 \Rightarrow 4 + 81 - 2a + 9b + 19 = 0 \Rightarrow -2a + 9b = -104 \dots(1)$$

$$B(4, 3): 4^2 + 3^2 + a \cdot 4 + b \cdot 3 + 19 = 0 \Rightarrow 16 + 9 + 4a + 3b + 19 = 0 \Rightarrow 4a + 3b = -44 \dots (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2)

$$\begin{array}{r|l} -2a + 9b = -104 & \times 2 \\ 4a + 3b = -44 & \times 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} -4a + 18b = -208 \\ 4a + 3b = -44 \\ \hline 21b = -252 \end{array} \Rightarrow b = -12$$

Substitusi  $b = -12$  ke (2) diperoleh:

$$4a + 3(-12) = -44 \Rightarrow 4a - 36 = -44 \Rightarrow 4a = -8 \Rightarrow a = -2$$

$$\text{sehingga } a + b = -2 + (-12) = -14$$

8. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran  $L \equiv x^2 + y^2 - 6x + py + 9 = 0$  yang melalui titik T (5, 1).

**Jawab:**

Lingkaran melalui T (5, 1) maka

$$5^2 + 1^2 - 6 \cdot 5 + p \cdot 1 + 9 = 0 \Rightarrow 25 + 1 - 30 + p + 9 = 0 \Rightarrow p = -5$$

sehingga persamaan lingkaran menjadi  $L \equiv x^2 + y^2 - 6x - 5y + 9 = 0$ , diperoleh

$$P\left(-\frac{1}{2}(-6), -\frac{1}{2}(-5)\right) = P\left(3, \frac{5}{2}\right) \text{ dan}$$

$$r = \sqrt{\frac{1}{4}(-6)^2 + \frac{1}{4}(-5)^2 - 9} = \sqrt{\frac{36}{4} + \frac{25}{4} - \frac{36}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$\text{Jadi, } P\left(3, \frac{5}{2}\right) \text{ dan } r = \frac{5}{2}$$

9. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik A(-5, 6) dan B(3, 2) dimana AB adalah diameter lingkaran tersebut.

**Jawab:**

**Cara 1:**

Misalkan P adalah titik tengah garis AB dimana  $A(x_1, y_1)$  dan  $B(x_2, y_2)$ , maka

$$\text{koordinat titik } P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Misalkan titik pusat lingkaran adalah  $P(x_0, y_0)$  maka:

$$x_0 = \frac{1}{2}(x_A + x_B) = \frac{1}{2}(-5 + 3) = -1 \text{ dan } y_0 = \frac{1}{2}(y_A + y_B) = \frac{1}{2}(6 + 2) = 4$$

$$\text{Jadi } P(-1, 4)$$

Jari-jari  $r = |AP| = \sqrt{(-5+1)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$  Atau

$$r = \frac{1}{2} \cdot |AB| = \frac{1}{2} \sqrt{(-5-3)^2 + (6-2)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{64+16} = \frac{1}{2} \sqrt{80} = \sqrt{20}$$

Persamaan lingkaran dengan pusat  $P(-1, 4)$  dan jari-jari  $r = \sqrt{20}$  adalah:

$$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 20 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 - 20 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 8y - 3 = 0$$

**Cara 2:**

Persamaan lingkaran melalui titik  $A(x_1, y_1)$  dan  $B(x_2, y_2)$ , dimana AB adalah diameter lingkaran adalah:  $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$

Jadi persamaan lingkaran melalui titik  $A(-5, 6)$  dan  $B(3, 2)$  dimana AB diameter lingkaran adalah:

$$(x+5)(x-3) + (y-6)(y-2) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 15 + y^2 - 8y + 12 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 8y - 3 = 0$$

10. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik-titik  $A(2, -4)$ ,  $B(5, -1)$  dan  $C(2, 2)$ .

**Jawab:**

**Cara 1:**

Misalkan persamaan lingkaran:  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

.....(1)

Titik A, B, C pada lingkaran sehingga memenuhi persamaan (1)

$$A(2,-4): (2 - a)^2 + (-4 - b)^2 = r^2$$

.....(2)

$$B(5,-1): (5 - a)^2 + (-1 - b)^2 = r^2$$

.....(3)

$$C(2,2): (2 - a)^2 + (2 - b)^2 = r^2$$

.....(4)

Dari (2) dan (4)

$$(2 - a)^2 + (-4 - b)^2 = r^2$$

$$(2 - a)^2 + (2 - b)^2 = r^2$$

$$\frac{(-4 - b)^2 - (2 - b)^2}{(-4 - b)^2 - (2 - b)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-4 - b - 2 + b)(-4 - b + 2 - b) = 0$$

$$\Leftrightarrow -6(-2 - 2b) = 0$$

$$\Leftrightarrow 12 + 12b = 0$$

$$\Leftrightarrow b = -1$$

Substitusi  $b = -1$  ke (2) dan (3) diperoleh:

$$(2-a)^2 + (-4+1)^2 = r^2 \Leftrightarrow (2-a)^2 + 9 = r^2$$

$$(5-a)^2 + (-1+1)^2 = r^2 \Leftrightarrow (5-a)^2 + 0 = r^2$$

$$\frac{(2-a)^2 - (5-a)^2 + 9 = 0}{(2-a)^2 - (5-a)^2 + 9 = 0}$$

$$\Leftrightarrow (4 - 4a + a^2) - (25 - 10a + a^2) + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6a - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 2$$

Substitusi  $a = 2$  dan  $b = -1$  ke persamaan (2)

$$(2-2)^2 + (-4+1)^2 = r^2 \Leftrightarrow 9 = r^2$$

$$\Leftrightarrow r = 3$$

Jadi persamaan lingkaran yang melalui titik-titik A(2, -4), B(5, -1) dan C(2, 2) adalah:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9 \text{ dengan } P(2, -1) \text{ dan } r = 3$$

### Cara 2:

Misalkan persamaan lingkaran:  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

.....(1)

Titik A, B, C pada lingkaran sehingga memenuhi persamaan (1)

$$A(2,-4): 2^2 + (-4)^2 + 2A - 4B + C = 0 \Leftrightarrow 2A - 4B + C = -20$$

.....(2)

$$B(5,-1): 5^2 + (-1)^2 + 5A - B + C = 0 \Leftrightarrow 5A - B + C = -26$$

.....(3)

$$C(2,2): (2)^2 + (2)^2 + 2A + 2B + C = 0 \Leftrightarrow 2A + 2B + C = -8 \quad \dots\dots\dots$$

.....(4)

Dari (2) dan (4)

$$2A - 4B + C = -20$$

$$\frac{2A + 2B + C = -8}{-6B = -12} \Rightarrow B = 2$$

Substitusi  $B = 2$  ke (2) dan (3) diperoleh:

$$2A - 8 + C = -20 \Leftrightarrow 2A + C = -12$$

$$5A - 2 + C = -26 \Leftrightarrow \frac{5A + C = -24}{-3A = 12} \Rightarrow A = -4$$

Substitusi  $A = -4$  dan  $B = 2$  ke persamaan (4)

$$2(-4) + 2(2) + C = -8 \Leftrightarrow C = -8 + 8 - 4 = -4$$

Jadi persamaan lingkaran yang melalui titik-titik A(2, -4), B(5, -1) dan C(2, 2) adalah:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$$

11. Tentukan persamaan lingkaran dengan pusat  $P(4, 2)$  dan menyinggung garis  $g \equiv 2x + y = 4$ .

**Jawab:**

Jarak titik  $T(x_1, y_1)$  terhadap garis  $ax + by + c = 0$  adalah  $d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Jarak titik  $P(4, 2)$  terhadap garis  $2x + y = 4 \Leftrightarrow 2x + y - 4 = 0$  adalah jari-jari lingkaran, sehingga:

$$r = \frac{|2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

Persamaan lingkaran adalah:

$$\begin{aligned} (x-4)^2 + (y-2)^2 &= \left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2 \Rightarrow (x^2 - 8x + 16) + (y^2 - 4y + 4) = \frac{36}{5} \\ &\Rightarrow 5(x^2 - 8x + 16) + 5(y^2 - 4y + 4) = 36 \\ &\Rightarrow 5x^2 + 5y^2 - 40x - 20y + 64 = 0 \end{aligned}$$

12. Tentukan persamaan lingkaran dengan pusat  $P(4, 2)$  melalui titik  $T(3, -1)$ .

**Jawab:**

Jarak titik  $A(x_1, y_1)$  dan  $B(x_2, y_2)$  adalah  $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Jari-jari lingkaran adalah jarak titik  $P(4, 2)$  dan  $T(3, -1)$ , sehingga

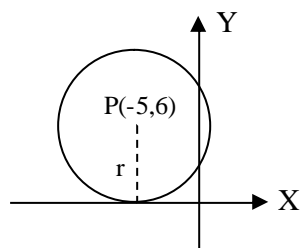
$$r = \sqrt{(4-3)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

Persamaan lingkaran dengan pusat  $P(4, 2)$  dan jari-jari  $r = \sqrt{10}$  adalah:

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{10})^2 \Rightarrow (x-4)^2 + (y-2)^2 = 10$$

13. Tentukan persamaan lingkaran dengan pusat  $P(-5, 6)$  dan garis tangen sumbu X.

**Jawab:**



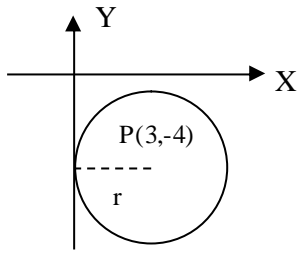
Jari-jari lingkaran  $r = 6$

Persamaan lingkaran:

$$(x+5)^2 + (y-6)^2 = 6^2 \Rightarrow (x+5)^2 + (y-6)^2 = 36$$

14. Tentukan persamaan lingkaran dengan pusat  $P(3, -4)$  dan garis tangen sumbu Y.

**Jawab:**



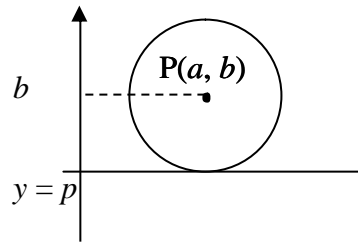
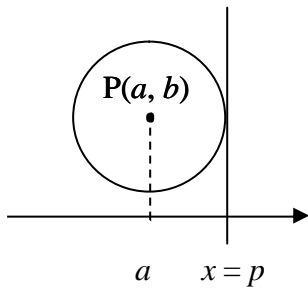
Jari-jari lingkaran  $r = 3$

Persamaan lingkaran:

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 3^2 \Rightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 = 9$$

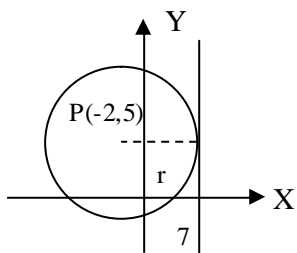
15. Tentukan persamaan lingkaran dengan pusat  $P(-2, 5)$  dan garis tangen  $x = 7$ .

**Jawab:**



Lingkaran dengan pusat  $P(a, b)$  dan garis tangen  $x = p$  maka  $r = |a - p|$

Lingkaran dengan pusat  $P(a, b)$  dan garis tangen  $y = p$  maka  $r = |b - p|$

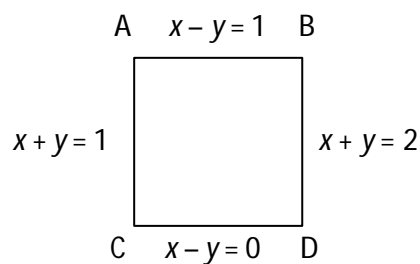


Jari-jari lingkaran  $r = |-2 - 7| = 9$

Persamaan lingkaran:

$$(x+2)^2 + (y-5)^2 = 9^2 \Rightarrow (x+2)^2 + (y-5)^2 = 81$$

16. Sisi-sisi persegi mempunyai persamaan sebagai berikut:



Tentukan persamaan:

- Lingkaran dalam
- Lingkaran luar



**Jawab:**

$$AB: x - y = 1 \dots\dots\dots(1)$$

$$CD: x - y = 0 \dots\dots\dots(2)$$

$$AC: x + y = 1 \dots\dots\dots(3)$$

$$BD: x + y = 2 \dots\dots\dots(4)$$

Dari (1) dan (3)

$$x - y = 1$$

$$\frac{x + y = 1}{2x = 2} +$$

$$x = 1$$

$$y = 0$$

$$A(1,0)$$

Dari (1) dan (4)

$$x - y = 1$$

$$\frac{x + y = 2}{2x = 3} +$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}$$

$$B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Dari (2) dan (4)

$$x - y = 0$$

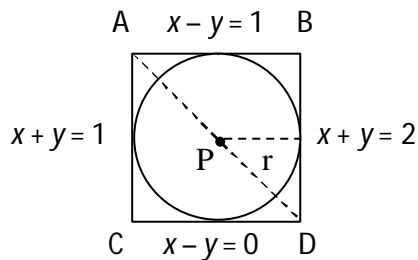
$$\frac{x + y = 2}{2x = 2} +$$

$$x = 1$$

$$y = 1$$

$$D(1,1)$$

**a). Lingkaran dalam**



Titik pusat adalah titik tengah garis AD,  $P\left(\frac{1+1}{2}, \frac{0+1}{2}\right) = P\left(1, \frac{1}{2}\right)$

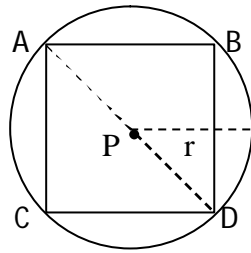
Jari-jari

$$r = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-0\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{8}}$$

Persamaan lingkaran:

$$(x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{1}{8}}\right)^2 \Rightarrow (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$$

**b). Lingkaran Luar**



Titik pusat adalah titik tengah garis AD,

$$P\left(\frac{1+1}{2}, \frac{0+1}{2}\right) = P\left(1, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Jari-jari } r = \frac{1}{2}|AD| = \frac{1}{2}\sqrt{(1-1)^2 + (1-0)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{0+1} = \frac{1}{2}$$

Persamaan lingkaran:

$$(x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

17. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik T (-3, 4) dan sepusat dengan lingkaran  $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 1 = 0$ .

**Jawab:**

Lingkaran  $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 1 = 0$  mempunyai pusat

$$P\left(-\frac{1}{2}(8), -\frac{1}{2}(-4)\right) = P(-4, 2).$$

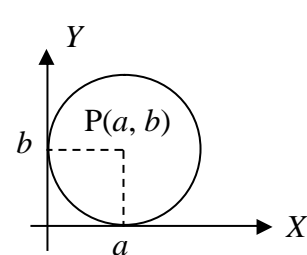
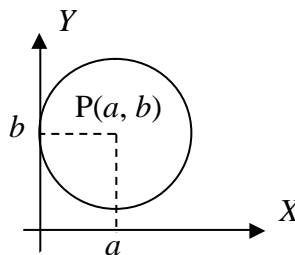
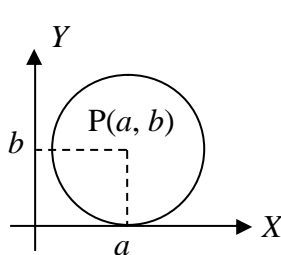
Jarak titik T (-3, 4) dan P (-4, 2) adalah  $r = \sqrt{(-3+4)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

Persamaan lingkaran dengan P (-4, 2) dan  $r = \sqrt{5}$  adalah:

$$(x+4)^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{5})^2 \Rightarrow (x+4)^2 + (y-2)^2 = 5$$

18. Tentukan persamaan lingkaran yang menyinggung sumbu X dan sumbu Y, jika pusatnya terletak pada garis  $5x - 4y = 3$ .

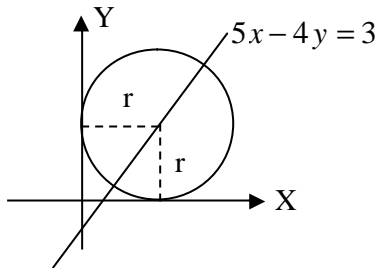
**Jawab:**



Lingkaran dengan pusat  $P(a, b)$  menyinggung sumbu  $X$ , maka jari-jari  $r = |b|$

Lingkaran dengan pusat  $P(a, b)$  menyinggung sumbu  $Y$ , maka jari-jari  $r = |a|$

Lingkaran dengan pusat  $P(a, b)$  menyinggung sumbu  $X$  dan sumbu  $Y$ , maka jari-jari  $r = |b| = |a|$



Misalkan lingkaran menyinggung sumbu  $Y$  di titik  $(0, b)$  dan menyinggung sumbu  $X$  di titik  $(a, 0)$ . Titik pusat lingkaran adalah  $P(a, b)$ .

Karena lingkaran menyinggung kedua sumbu koordinat, maka  $a = b = r$

Titik  $P(r, r)$  pada  $5x - 4y = 3$  maka:

$$(r, r): 5r - 4r = 3 \Rightarrow r = 3$$

$$\Rightarrow P(3, 3)$$

Persamaan lingkaran dengan  $P(3, 3)$  dan jari-jari  $r = 3$  adalah:

$$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$$

19. Selidikilah apakah persamaan-persamaan berikut merupakan persamaan lingkaran atau bukan, jika bukan sebutkan alasannya.

a).  $(x - 1)^2 + (y - 7)^2 - 36 = 0$

b).  $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 25 = 0$

**Jawab:**

a).  $(x - 1)^2 + (y - 7)^2 - 36 = 0$

$$(x - 1)^2 + (y - 7)^2 - 36 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 7)^2 = 36$$

Adalah persamaan lingkaran dengan  $P(1, 7)$  dan  $r = 6$

b).  $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 25 = 0$

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y + 25 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = -25 + 4 + 16$$

$$\Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = -5$$

Bukan persamaan lingkaran, karena tidak mungkin  $r^2 = -5$

20. Tentukan batas nilai  $p$  agar persamaan  $x^2 + y^2 + px + 2y + 26 = 0$  menunjukkan sebuah lingkaran.

**Jawab:**

Persamaan  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$  menunjukkan lingkaran jika

$$\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C > 0$$

Untuk persamaan  $x^2 + y^2 + px + 2y + 26 = 0$

$$\frac{p^2}{4} + \frac{2^2}{4} - 26 > 0 \Rightarrow \frac{p^2}{4} - 25 > 0 \Rightarrow p^2 - 100 > 0 \Rightarrow (p-10)(p+10) > 0$$

Pembuat nol:

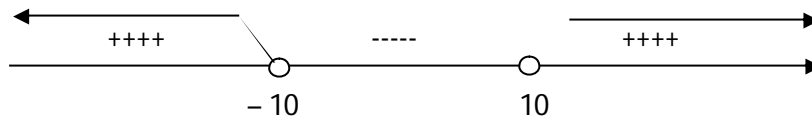
$$(p-10)(p+10) = 0 \Rightarrow p = 10 \text{ atau } p = -10$$

Cek nilai  $p$  yang memenuhi:

Jika  $p = -11$  maka  $(-11 - 10)(-11 + 10) = -21(-1) = 21 > 0$  (memenuhi)

Jika  $p = 0$  maka  $(0 - 10)(0 + 10) = -10(10) = -100 < 0$  (tidak memenuhi)

Jika  $p = 11$  maka  $(11 - 10)(11 + 10) = 1(21) = 21 > 0$  (memenuhi)



Nilai  $p$  yang memenuhi adalah  $p < -10$  atau  $p > 10$

Sehingga  $x^2 + y^2 + px + 2y + 26 = 0$  merupakan persamaan lingkaran jika  $p < -10$  atau  $p > 10$ .

21. Diketahui lingkaran  $L_1 \equiv x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0$ . Akan dibuat lingkaran baru  $L_2$  dengan titik pusat adalah titik pusat lingkaran  $L_1$  dicerminkan terhadap sumbu  $X$  dan jari-jarinya diperbesar menjadi 2 kali jari-jari  $L_1$ . Tentukan persamaan lingkaran tersebut!

**Jawab:**

$L_1 \equiv x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0$  mempunyai pusat

$$P_1\left(-\frac{1}{2}(6), -\frac{1}{2}(-10)\right) = P_1(-3, 5)$$

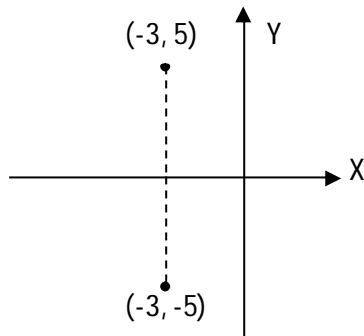
$$\text{Jari-jari } r_1 = \sqrt{\frac{1}{4}(6)^2 + \frac{1}{4}(-10)^2 - 18} = \sqrt{\frac{36}{4} + \frac{100}{4} - \frac{72}{4}} = \sqrt{\frac{64}{4}} = \sqrt{16} = 4$$

$P_1(-3, 5)$  dicerminkan terhadap sumbu  $X$ , diperoleh  $P_2(-3, -5)$ .

$$r_1 = 4 \Rightarrow r_2 = 2r_1 = 2 \cdot 4 = 8$$

Persamaan lingkaran dengan  $P(-3, -5)$  dan jari-jari  $r = 8$  adalah:

$$(x+3)^2 + (y+5)^2 = 64$$



22. Diketahui koordinat titik A(3, -1) dan B(6, 2) jika didefinisikan kedudukan titik P(x, y) sedemikian sehingga  $|PA| = 2|PB|$ . Tentukanlah tempat kedudukan titik P.

**Jawab:**

P(x, y), A(3, -1) dan B(6, 2)

$$|PA| = \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2}$$

$$|PB| = \sqrt{(x-6)^2 + (y-2)^2}$$

Diperoleh:

$$|PA| = 2|PB|$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2} = 2\sqrt{(x-6)^2 + (y-2)^2}$$

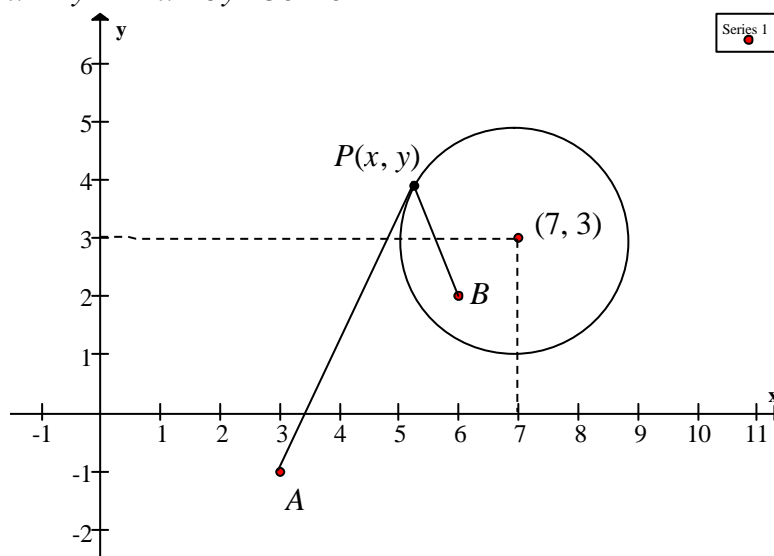
$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4(x-6)^2 + 4(y-2)^2$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 4x^2 + 4y^2 - 48x - 16y + 160$$

$$3x^2 + 3y^2 - 42x - 18y + 150 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 14x - 6y + 50 = 0$$

Tempat kedudukan titik P adalah lingkaran dengan persamaan  $x^2 + y^2 - 14x - 6y + 50 = 0$ .



23. Diketahui koordinat titik  $A(3, -4)$  dan  $B(-1, 2)$ .  $P(x, y)$  sedemikian sehingga besar sudut  $APB$   $90^\circ$ . tentukan tempat kedudukan titik  $P$ .

**Jawab:**

$$\angle APB = 90^\circ$$

$\Delta APB$  siku-sikudi  $P$

Dalil Phytagoras:

$$|AP|^2 + |BP|^2 = |AB|^2$$

$$[(x-3)^2 + (y+4)^2] + [(x+1)^2 + (y-2)^2] = (-1-3)^2 + (2+4)^2$$

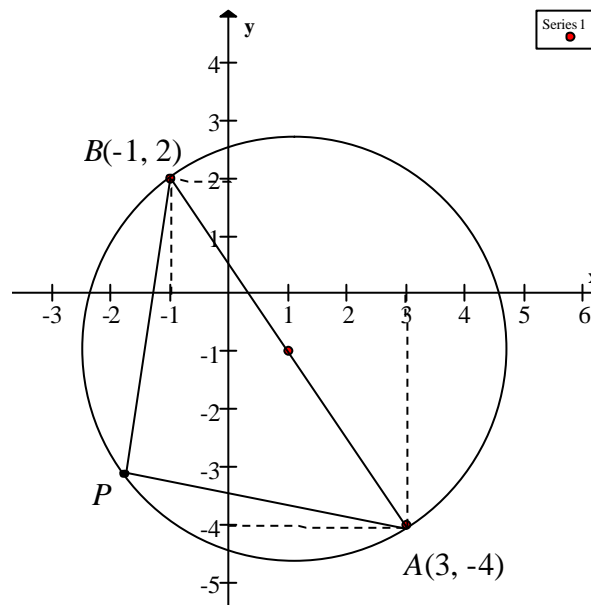
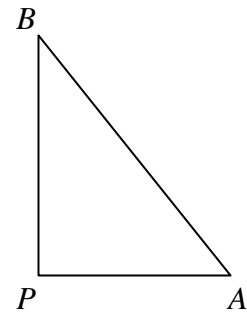
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 + x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 16 + 36$$

$$2x^2 + 2y^2 - 4x + 4y - 22 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 11 = 0$$

Tempat kedudukan titik  $P$  adalah lingkaran dengan persamaan

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 11 = 0.$$



24. Tentukan kedudukan titik-titik berikut terhadap lingkaran yang diberikan.
- $T(1, 3)$  terhadap lingkaran  $x^2 + y^2 = 15$
  - $T(3, 5)$  terhadap lingkaran  $(x+3)^2 + (y-5)^2 = 36$
  - $T(4, 2)$  terhadap lingkaran  $x^2 + y^2 + 6x - 10y - 2 = 0$

**Jawab:**

Kedudukan titik  $T(x_1, y_1)$  terhadap lingkaran  $x^2 + y^2 = r^2$  adalah:

$T(x_1, y_1)$  di dalam lingkaran jika  $x_1^2 + y_1^2 < r^2$

$T(x_1, y_1)$  pada lingkaran jika  $x_1^2 + y_1^2 = r^2$

$T(x_1, y_1)$  di luar lingkaran jika  $x_1^2 + y_1^2 > r^2$

Kedudukan titik  $T(x_1, y_1)$  terhadap lingkaran  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  adalah:

$T(x_1, y_1)$  di dalam lingkaran jika  $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 < r^2$

$T(x_1, y_1)$  pada lingkaran jika  $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$

$T(x_1, y_1)$  di luar lingkaran jika  $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 > r^2$

Kedudukan titik  $T(x_1, y_1)$  terhadap lingkaran  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$  adalah:

$T(x_1, y_1)$  di dalam lingkaran jika  $x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C < 0$

$T(x_1, y_1)$  pada lingkaran jika  $x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C = 0$

$T(x_1, y_1)$  di luar lingkaran jika  $x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C > 0$

**Sehingga:**

$$T(1, 3) : 1^2 + 3^2 = 1 + 9 = 10 < 15$$

$T(1, 3)$  terletak di dalam lingkaran  $x^2 + y^2 = 15$

$$T(3, 5) : (3 + 3)^2 + (5 - 5)^2 = 6^2 + 0 = 36$$

$T(3, 5)$  terletak pada lingkaran  $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 36$

$$T(4, 2) : 4^2 + 2^2 + 6 \cdot 4 - 10 \cdot 2 - 2 = 16 + 4 + 24 - 20 - 2 = 22 > 0$$

$T(4, 2)$  terletak di luar lingkaran  $x^2 + y^2 + 6x - 10y - 2 = 0$

25. Titik  $T(p, 5)$  terletak pada lingkaran  $2x^2 + 2y^2 = 82$ , maka nilai  $p$  adalah....

**Jawab:**

$$2x^2 + 2y^2 = 82 \Rightarrow x^2 + y^2 = 41$$

$T(p, 5)$  terletak pada lingkaran, maka:

$$T(p, 5) : p^2 + 5^2 = 41 \Rightarrow p^2 = 41 - 25 \Rightarrow p^2 = 16 \Rightarrow p = \pm 4$$

26. Lingkaran  $x^2 + y^2 - 4x + 2y + c = 0$  mempunyai jari-jari 3, maka nilai  $c$  adalah ...

**Jawab:**

Jari-jari  $x^2 + y^2 - 4x + 2y + c = 0$  lingkaran adalah:

$$r = \sqrt{\frac{1}{4}(-4)^2 + \frac{1}{4}(2)^2 - c}$$

$$3 = \sqrt{4 + 1 - c}$$

$$9 = 5 - c$$

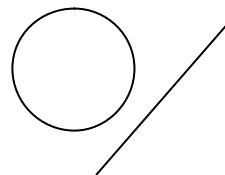
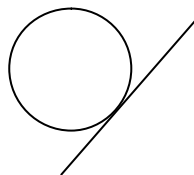
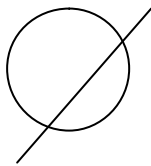
$$c = -4$$

27. Tentukan kedudukan garis  $-6x + 2y + 4 = 0$  terhadap lingkaran  $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 2 = 0$ .

**Jawab:**

**Cara 1:**

Kedudukan garis  $y = mx + c$  terhadap lingkaran L adalah:



- Memotong Lingkaran di 2 titik jika  $D > 0$
- Menyinggung Lingkaran jika  $D = 0$  (memotong L di 1 titik)
- Tidak memotong Lingkaran jika  $D < 0$

$$\text{Garis } -6x + 2y + 4 = 0 \Rightarrow y = 3x - 2$$

Substitusi  $y = 3x - 2$  ke lingkaran  $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 2 = 0$ .

$$x^2 + (3x - 2)^2 - 4x + 2(3x - 2) + 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 9x^2 - 12x + 4 - 4x + 6x - 4 + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 10x^2 - 10x + 2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 10 \cdot 2$$

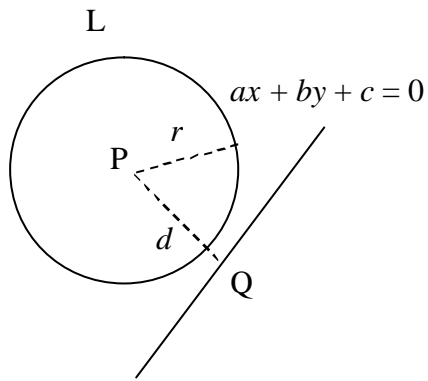
$$= 100 - 80$$

$$= 20 > 0$$

Jadi garis  $y = 3x - 2$  memotong lingkaran  $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 2 = 0$  di 2 titik.

**Cara 2:**





Misalkan pusat L adalah  $P(x_1, y_1)$  maka

$$|PQ| = d = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

- a). Garis memotong lingkaran jika  $d < r$
- b). Garis menyinggung lingkaran jika  $d = r$
- c). Garis tidak memotong lingkaran jika  $d > r$

Pusat lingkaran  $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 2 = 0$  adalah  $P(2, -1)$  dan jari-jarinya  $r = \sqrt{3}$   
 Jarak P ke garis  $-6x + 2y + 4 = 0 \Rightarrow -3x + y + 2 = 0$  adalah:

$$d = \left| \frac{-3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 2}{\sqrt{(-3)^2 + 1^2}} \right| = \left| \frac{-6 - 1 + 2}{\sqrt{10}} \right| = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{1}{2} \sqrt{10} < \sqrt{3}$$

Jadi garis  $y = 3x - 2$  memotong lingkaran  $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 2 = 0$  di 2 titik.

28. Tentukan nilai  $c$  agar garis  $y = -2x + c$  menyinggung lingkaran  $x^2 + y^2 - 4x - y + 3 = 0$ .

**Jawab:**

Substitusi  $y = -2x + c$  ke lingkaran  $x^2 + y^2 - 4x - y + 3 = 0$ .

$$x^2 + (-2x + c)^2 - 4x - (-2x + c) + 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x^2 - 4cx + c^2 - 4x + 2x - c + 3 = 0$$

$$\Rightarrow 5x^2 + (-4c - 2)x + (c^2 - c + 3) = 0$$

Garis menyinggung lingkaran jika  $D = 0$

$$D = b^2 - 4ac = (-4c - 2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (c^2 - c + 3)$$

$$0 = 16c^2 + 16c + 4 - 20c^2 + 20c - 60$$

$$0 = -4c^2 + 36c - 56$$

$$0 = c^2 - 9c + 14$$

$$0 = (c - 7)(c - 2)$$

Jadi,  $c = 7$  atau  $c = 2$

29. Lingkaran yang persamaannya  $x^2 + y^2 - Ax - 10y + 4 = 0$  menyinggung sumbu X. Nilai A yang memenuhi adalah....

**Jawab:**

Persamaannya lingkaran  $x^2 + y^2 - Ax - 10y + 4 = 0$  menyinggung sumbu X berarti

melalui titik  $(x, 0)$ , maka:

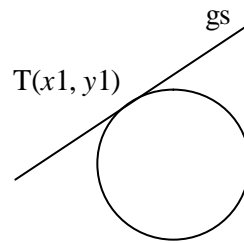
$$(x,0) \Rightarrow x^2 + y^2 - Ax - 10y + 4 = 0 \Rightarrow x^2 + 0^2 - Ax - 10 \cdot 0 + 4 = 0 \\ \Rightarrow x^2 - Ax + 4 = 0$$

Lingkaran menyinggung sumbu X berarti:

$$D = 0 \\ \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \\ \Rightarrow (-A)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0 \\ \Rightarrow A^2 - 16 = 0 \\ \Rightarrow A^2 = 16 \\ \Rightarrow A = \pm 4$$

30. Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran  $x^2 + y^2 = 13$  di titik  $T(2, -3)$ .

**Jawab:**



Persamaan garis singgung di titik  $T(x_1, y_1)$  pada lingkaran  $x^2 + y^2 = r^2$  adalah  $x_1x + y_1y = r^2$

Persamaan garis singgung di titik  $(2, -3)$  pada lingkaran  $x^2 + y^2 = 13$  adalah:

$$2x + (-3)y = 13 \Rightarrow 2x - 3y - 13 = 0$$

Jadi persamaan garis singgungnya  $2x - 3y - 13 = 0$

31. Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran  $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$  di titik  $T(1, -2)$ .

**Jawab:**

Persamaan garis singgung di titik  $T(x_1, y_1)$  pada lingkaran  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$  adalah  $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$

Titik  $(1, -2)$  pada lingkaran  $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$  karena  $(1-1)^2 + (-2-3)^2 = 0 + 25 = 25$

Persamaan garis singgung di titik  $(1, -2)$  pada lingkaran  $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$  adalah:

$$\begin{aligned}(1-1)(x-1) + (-2-3)(y-3) &= 25 \\ -5y + 15 &= 25 \\ y &= -2\end{aligned}$$

Jadi persamaan garis singgungnya  $y = -2$

32. Tentukan persamaan garis singgung di titik  $(4, -1)$  pada lingkaran  $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 45 = 0$ .



**Jawab:**

Persamaan garis singgung di titik  $T(x_1, y_1)$  pada lingkaran

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \text{ adalah } x_1x + y_1y + \frac{A}{2}(x_1 + x) + \frac{B}{2}(y_1 + y) + C = 0$$

Titik  $(4, -1)$  pada lingkaran  $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 45 = 0$  karena

$$4^2 + (-1)^2 + 6 \cdot 4 - 4(-1) - 45 = 16 + 1 + 24 + 4 - 45 = 45 - 45 = 0$$

Persamaan garis singgung di titik  $(4, -1)$  pada lingkaran  $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 45 = 0$  adalah:

$$\begin{aligned}4x + (-1)y + \frac{6}{2}(4 + x) + \frac{-4}{2}(-1 + y) - 45 &= 0 \\ 4x - y + 12 + 3x + 2 - 2y - 45 &= 0\end{aligned}$$

$$7x - 3y - 31 = 0$$

Jadi persamaan garis singgungnya  $7x - 3y - 31 = 0$

33. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 7 = 0$  di titik yang berabsis 2.

**Jawab:**

Titik singgung berabsis 2 maka  $x = 2$ , substitusi ke  $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 7 = 0$

$$2^2 + y^2 + 4 \cdot 2 - 6y - 7 = 0 \Rightarrow y^2 - 6y + 5 = 0$$

$$\Rightarrow (y - 5)(y - 1) = 0$$

$$\Rightarrow y = 5 \text{ atau } y = 1$$

Terdapat 2 titik singgung yaitu  $T_1(2, 1)$  dan  $T_2(2, 5)$

Untuk  $T_1(2, 1)$  persamaan garis singgung:

$$2x + y + \frac{4}{2}(2 + x) - \frac{6}{2}(1 + y) - 7 = 0 \Rightarrow 2x + y + 4 + 2x - 3 - 3y - 7 = 0$$

$$\Rightarrow 4x - 2y - 6 = 0$$

Untuk  $T_2(2, 5)$  persamaan garis singgung:

$$2x + 5y + \frac{4}{2}(2+x) - \frac{6}{2}(5+y) - 7 = 0 \Rightarrow 2x + 5y + 4 + 2x - 15 - 3y - 7 = 0$$

$$\Rightarrow 4x + 2y - 18 = 0$$

34. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran  $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 34$  di titik yang berordinat 4.

**Jawab:**

Titik singgung berordinat 4 maka  $y = 4$ , substitusi ke  $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 34$

$$(x+4)^2 + (4-1)^2 = 34 \Rightarrow x^2 + 8x + 16 + 9 - 34 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$\Rightarrow (x+9)(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x = -9 \text{ atau } x = 1$$

Terdapat 2 titik singgung yaitu  $T_1(-9, 4)$  dan  $T_2(1, 4)$

Untuk  $T_1(-9, 4)$  persamaan garis singgung:

$$(-9+4)(x+4) + (4-1)(y-1) = 34 \Rightarrow -5x - 20 + 3y - 3 - 34 = 0$$

$$\Rightarrow -5x + 3y - 57 = 0$$

Untuk  $T_2(1, 4)$  persamaan garis singgung:

$$(1+4)(x+4) + (4-1)(y-1) = 34 \Rightarrow 5x + 20 + 3y - 3 - 34 = 0$$

$$\Rightarrow 5x + 3y - 17 = 0$$

35. Lingkaran  $x^2 + y^2 - 2px + q = 0$  berjari-jari 2 menyinggung garis  $x - y = 0$ . Tentukan nilai  $p$ .

**Jawab:**

Jari-jari lingkaran  $x^2 + y^2 - 2px + q = 0$  adalah:

$$r = \sqrt{\frac{(-2p)^2}{4} + \frac{0^2}{4} - q} = \sqrt{\frac{4p^2}{4} - q} = \sqrt{p^2 - q}$$

$$2 = \sqrt{p^2 - q}$$

$$4 = p^2 - q$$

$$q = p^2 - 4$$

Lingkaran menyinggung garis  $x - y = 0$  atau  $y = x$ . Substitusi  $y = x$  dan  $q = p^2 - 4$  ke lingkaran:

$$x^2 + x^2 - 2px + q = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2px + (p^2 - 4) = 0$$

$$D = 0 \Rightarrow (-2p)^2 - 4 \cdot 2(p^2 - 4) = 0$$

$$\Rightarrow 4p^2 - 8p^2 + 32 = 0$$

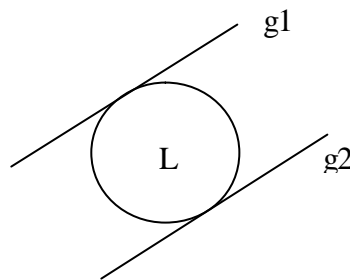
$$\Rightarrow -4p^2 + 32 = 0$$

$$\Rightarrow p^2 = 8$$

$$\Rightarrow p = \pm\sqrt{8}$$

36. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 = 25$  dengan gradient 2.

**Jawab:**



Persamaan garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 = r^2$  dengan gradien  $m$  adalah:

$$y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$$

Persamaan garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 = 25$  dengan gradien  $m = 2$  adalah:

$$y = 2x \pm 5\sqrt{1+2^2}$$

$$= 2x \pm 5\sqrt{5}$$

Diperoleh 2 persamaan garis singgung, yaitu:  $y = 2x + 5\sqrt{5}$  dan  $y = 2x - 5\sqrt{5}$

37. Tentukan persamaan garis singgung yang tegak lurus garis  $x + 2y - 4 = 0$  pada lingkaran  $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 5$ .

**Jawab:**

Persamaan garis singgung lingkaran  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$  dengan gradien  $m$  adalah:

$$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1+m^2}$$

**Cara 1:**

Misalkan gradient garis singgung adalah  $m_1$  dan gradient garis  $x + 2y - 4 = 0$  adalah  $m_2$ .

$$\text{Garis } x + 2y - 4 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 4 \quad \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{2}$$

Garis dengan gradient  $m_1$  dan tegak lurus dengan  $x + 2y - 4 = 0$  mempunyai hubungan:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$m_1 \cdot -\frac{1}{2} = -1$$

$$m_1 = 2$$

Jadi persamaan garis singgung:

$$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1 + m^2} \Rightarrow y - 2 = 2(x - 4) \pm \sqrt{5}\sqrt{1 + 2^2}$$

$$\Rightarrow y - 2 = 2x - 8 \pm \sqrt{5}\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow y = 2x - 6 \pm 5$$

Diperoleh 2 persamaan garis singgung, yaitu:  $y = 2x - 1$  dan  $y = 2x - 11$

### Cara 2:

Lingkaran  $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 5$  mempunyai pusat  $P(4, 2)$  dan jari-jari  $r = \sqrt{5}$ . Seperti cara pertama, diperoleh gradient garis singgung  $m_1 = 2$ .

Persamaan garis dengan  $m_1 = 2$  adalah  $y = 2x + c \Rightarrow 2x - y + c = 0$

Jarak garis singgung ke pusat  $P(4, 2)$  adalah  $r = \sqrt{5}$

$$d = \left| \frac{2 \cdot 4 - 1 \cdot 2 + c}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} \right| \Rightarrow \sqrt{5} = \left| \frac{6 + c}{\sqrt{5}} \right|$$

$$\Rightarrow \pm \sqrt{5} = \frac{6 + c}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \pm \sqrt{5}\sqrt{5} = 6 + c$$

$$\Rightarrow c = -6 \pm 5$$

Jadi persamaan garis singgung yang bergradient 2 adalah  $y = 2x + c \Rightarrow y = 2x - 6 \pm 5$  yaitu:  $y = 2x - 1$  dan  $y = 2x - 11$

38. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 + 4x + 10y + 21 = 0$  yang sejajar dengan garis  $-6x + 2y - 17 = 0$ .

### Jawab:

Persamaan garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$  dengan gradient  $m$  adalah:

$$y + \frac{1}{2}B = m\left(x + \frac{1}{2}A\right) \pm r\sqrt{1 + m^2} \text{ atau}$$

$$y + \frac{1}{2}B = m \left( x + \frac{1}{2}A \right) \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C} \cdot \sqrt{1+m^2}$$

Misalkan gradient garis singgung adalah  $m_1$  dan gradient garis  $-6x + 2y - 17 = 0$  adalah  $m_2$ .

$$\text{Garis } -6x + 2y - 17 = 0 \Rightarrow y = 3x + \frac{17}{2} \Rightarrow m_2 = 3$$

Garis dengan gradient  $m_1$  dan sejajar dengan  $-6x + 2y - 17 = 0$  mempunyai hubungan:

$$m_1 = m_2 = 3$$

Jadi persamaan garis singgung:

$$\begin{aligned} y + \frac{1}{2}B &= m \left( x + \frac{1}{2}A \right) \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C} \cdot \sqrt{1+m^2} \Rightarrow y + 5 = 3(x + 2) \pm \sqrt{4 + 25 - 21} \sqrt{1+3^2} \\ &\Rightarrow y = -5 + 3x + 6 \pm \sqrt{8} \cdot \sqrt{10} \\ &\Rightarrow y = 3x + 1 \pm 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

Diperoleh persamaan garis singgung  $y = 3x + 1 \pm 4\sqrt{5}$

39. Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran  $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$  yang membentuk sudut 60 derajat dengan sumbu  $X$  positif.

**Jawab:**

Garis singgung membentuk sudut 60 derajat dengan sumbu  $X$  positif, maka

$$m_{gs} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

Lingkaran berpusat di  $P(-1, -2)$  dengan  $r = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 4} = \sqrt{9} = 3$

Persamaan garis singgung:

$$\begin{aligned} y - b &= m(x - a) \pm r\sqrt{1+m^2} \Rightarrow y + 2 = \sqrt{3}(x + 1) \pm 3\sqrt{1+3} \\ &\Rightarrow y = \sqrt{3}x + (\sqrt{3} - 2) \pm 6 \end{aligned}$$

Jadi persamaan garis singgung:  $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3} - 8$  dan  $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3} + 4$

40. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 15 = 0$  yang sejajar garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 = 5$  di titik  $(2, 1)$ .

**Jawab:**

Persamaan garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 = 5$  di titik  $(2, 1)$  adalah:

$$x_1x + y_1y = r^2 \Rightarrow 2x + y = 5 \Rightarrow y = -2x + 5 \text{ mempunyai gradient } m = -2$$

Garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 15 = 0$  sejajar dengan  $y = -2x + 5$  maka  $m_{gs} = -2$ .

Lingkaran berpusat di  $P(2, -1)$  dengan  $r = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + 15} = \sqrt{20}$

Persamaan garis singgung:

$$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1 + m^2} \Rightarrow y + 1 = -2(x - 2) \pm \sqrt{20}\sqrt{1 + 4}$$

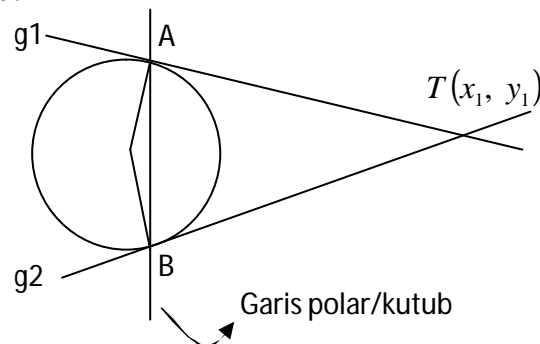
$$\Rightarrow y = -2x + 3 \pm \sqrt{100}$$

$$\Rightarrow y = -2x + 3 \pm 10$$

Diperoleh 2 persamaan garis singgung, yaitu:  $y = -2x + 13$  dan  $y = -2x - 7$

41. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 = 4$  yang melalui titik  $T(3, 2)$ .

**Jawab:**



A dan B adalah titik singgung, juga titik potong garis polar dengan lingkaran.

**Cara 1:**

Persamaan garis polar yang melalui titik  $T(x_1, y_1)$  di luar lingkaran adalah:

Lingkaran	Persamaan Garis Polar
$x^2 + y^2 = r^2$	$x_1x + y_1y = r^2$
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$	$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$
$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$	$x_1x + y_1y + \frac{A}{2}(x_1 + x) + \frac{B}{2}(y_1 + y) + C = 0$

Persamaan garis polar lingkaran  $x^2 + y^2 = 4$  yang melalui titik  $T(3, 2)$  adalah

$$3x + 2y = 4 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 2$$

Substitusi ke persamaan lingkaran



$$\begin{aligned}
x^2 + \left(-\frac{3}{2}x + 2\right)^2 = 4 &\Rightarrow x^2 + \frac{9}{4}x^2 - 6x + 4 - 4 = 0 \\
&\Rightarrow \frac{13}{4}x^2 - 6x = 0 \\
&\Rightarrow x\left(\frac{13}{4}x - 6\right) = 0 \\
&\Rightarrow x = 0 \text{ atau } x = \frac{24}{13}
\end{aligned}$$

Substitusi nilai  $x$  yang diperoleh ke persamaan garis (bukan ke persamaan lingkaran):

$$\text{Untuk } x = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \cdot 0 + 2 = 2 \quad \Rightarrow T_1(0, 2)$$

$$\text{Untuk } x = \frac{24}{13} \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \cdot \frac{24}{13} + 2 = -\frac{36}{13} + \frac{26}{13} = -\frac{10}{13} \quad \Rightarrow T_2\left(\frac{24}{13}, -\frac{10}{13}\right)$$

Titik-titik tersebut adalah titik singgung lingkaran, gunakan persamaan garis singgung lingkaran melalui titik PADA lingkaran.

**PGS 1:**

$$\begin{aligned}
0x + 2y = 4 &\Rightarrow 2y = 4 \\
&\Rightarrow y = 2
\end{aligned}$$

**PGS 2:**

$$\begin{aligned}
\frac{24}{13}x - \frac{10}{13}y = 4 &\Rightarrow 24x - 10y = 52 \\
&\Rightarrow 12x - 5y - 26 = 0
\end{aligned}$$

Jadi persamaan garis singgungnya  $y = 2$  dan  $12x - 5y - 26 = 0$

**Cara 2:**

Persamaan garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 = r^2$  dengan gradien  $m$  adalah

$$y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$$

Persamaan garis dengan gradien  $m$  melalui  $T(3, 2)$  adalah  $y - 2 = m(x - 3)$  atau  $y = m(x - 3) + 2$

Maka

$$\begin{aligned}
m(x-3)+2 &= mx \pm r\sqrt{1+m^2} \\
mx-3m+2 &= mx \pm 2\sqrt{1+m^2} \\
-3m+2 &= \pm 2\sqrt{1+m^2} \\
9m^2-12m+4 &= 4(1+m^2) \\
9m^2-12m+4 &= 4+4m^2 \\
5m^2-12m &= 0 \\
m(5m-12) &= 0 \\
m=0 &\quad \text{atau} \quad m=\frac{12}{5}
\end{aligned}$$

Substitusi  $m$  yang diperoleh ke persamaan garis  $y = m(x-3) + 2$  (bukan ke  $y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$ ):

$$\begin{aligned}
\text{Untuk } m=0 &\Rightarrow y=0(x-3)+2=0+2=2 && \Rightarrow y=2 \\
\text{Untuk } m=\frac{12}{5} &\Rightarrow y=\frac{12}{5}(x-3)+2 \Rightarrow y=\frac{12}{5}x-\frac{26}{5} && \Rightarrow 12x-5y-26=0
\end{aligned}$$

Jadi persamaan garis singgungnya  $y = 2$  dan  $12x - 5y - 26 = 0$

### Cara 3:

Misalkan persamaan garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 = r^2$  dengan gradien  $m$  adalah  $y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$

Garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 = 4$  melalui titik T(3, 2) maka:

$$\begin{aligned}
y = mx \pm r\sqrt{1+m^2} &\Rightarrow 2 = 3m \pm 2\sqrt{1+m^2} \\
&\Rightarrow 2 - 3m = \pm 2\sqrt{1+m^2} \\
&\Rightarrow 4 - 12m + 9m^2 = 4 + 4m^2 \\
&\Rightarrow 5m^2 - 12m = 0 \\
&\Rightarrow m(5m - 12) = 0 \\
&\Rightarrow m = 0 \quad \text{atau} \quad m = \frac{12}{5}
\end{aligned}$$

Persamaan garis dengan gradien  $m$  melalui T(3, 2) adalah

$$y - 2 = m(x - 3) \text{ atau } y = m(x - 3) + 2$$

Substitusi  $m$  yang diperoleh ke persamaan  $y = m(x - 3) + 2$

$$\begin{aligned}
\text{Untuk } m=0 &\Rightarrow y=0(x-3)+2=0+2=2 && \Rightarrow y=2 \\
\text{Untuk } m=\frac{12}{5} &\Rightarrow y=\frac{12}{5}(x-3)+2 \Rightarrow y=\frac{12}{5}x-\frac{26}{5} && \Rightarrow 12x-5y-26=0
\end{aligned}$$

Jadi persamaan garis singgungnya  $y = 2$  dan  $12x - 5y - 26 = 0$

#### Cara 4:

Persamaan garis singgung lingkaran dengan pusat  $(a, b)$ , jari-jari  $r$  dan melalui titik  $(x_1, y_1)$  adalah

$y - y_1 = m(x - x_1)$ , dengan:

$$m = \frac{(y_1 - b)(x_1 - a) \pm r \sqrt{(y_1 - b)^2 + (x_1 - a)^2 - r^2}}{(x_1 - a)^2 - r^2}$$

Lingkaran  $x^2 + y^2 = 4$  mempunyai pusat  $P(0, 0)$  dan berjari-jari 2 melalui titik  $T(3, 2)$  mempunyai PGSL  $y - 2 = m(x - 3)$ , dengan:

$$m = \frac{(2 - 0)(3 - 0) \pm 2 \sqrt{(2 - 0)^2 + (3 - 0)^2 - 2^2}}{(3 - 0)^2 - 2^2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{9}}{9 - 4} = \frac{6 \pm 6}{5}$$

Jadi persamaan garis singgungnya  $y - 2 = \frac{6 \pm 6}{5}(x - 3)$ , yaitu

$$y - 2 = 0 \cdot (x - 3) \Rightarrow y = 2 \quad \text{dan} \quad y - 2 = \frac{12}{5}(x - 3) \Rightarrow 12x - 5y - 26 = 0$$

#### Cara 5:

Misalkan persamaan garis singgung yang melalui  $T(3, 2)$  adalah

$$y - 2 = m(x - 3) \Rightarrow y = 2 + m(x - 3)$$

Substitusi  $y$  ke dalam persamaan lingkaran  $x^2 + y^2 = 4$

$$\begin{aligned} x^2 + (2 + m(x - 3))^2 &= 4 \Rightarrow x^2 + 4 + 4m(x - 3) + m^2(x^2 - 6x + 9) - 4 = 0 \\ &\Rightarrow x^2 + 4 + 4mx - 12m + m^2x^2 - 6m^2x + 9m^2 - 4 = 0 \\ &\Rightarrow (1 + m^2)x^2 + (4m - 6m^2)x + (-12m + 9m^2) = 0 \end{aligned}$$

Syarat menyinggung adalah  $D = 0$

$$\begin{aligned} D = 0 &\Rightarrow (4m - 6m^2)^2 - 4(1 + m^2)(-12m + 9m^2) = 0 \\ &\Rightarrow 16m^2 - 48m^3 + 36m^4 + 48m - 36m^2 + 48m^3 - 36m^4 = 0 \\ &\Rightarrow -20m^2 + 48m = 0 \\ &\Rightarrow -5m^2 + 12m = 0 \\ &\Rightarrow m(-5m + 12) = 0 \\ &\Rightarrow m = 0 \quad \text{atau} \quad m = \frac{12}{5} \end{aligned}$$

$$\text{Untuk } m = 0 \Rightarrow y = 2 + 0 \cdot (x - 3) \Rightarrow y = 2$$

$$\text{Untuk } m = \frac{12}{5} \Rightarrow y = 2 + \frac{12}{5}(x-3) \Rightarrow 12x - 5y - 26 = 0$$

Jadi persamaan garis singgungnya  $y = 2$  dan  $12x - 5y - 26 = 0$

### Cara 6:

Lingkaran  $x^2 + y^2 = 4$  berpusat di  $P(0, 0)$  dan berjari-jari  $r = 2$

Persamaan garis singgung yang melalui titik  $T(3, 2)$  dan bergradien  $m$  adalah:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \Rightarrow y - 2 = m(x - 3) \\ &\Rightarrow y = mx + 2 - 3m \\ &\Rightarrow mx - y + (2 - 3m) = 0 \end{aligned}$$

Jari-jari  $r$  adalah jarak  $P(0, 0)$  dengan garis  $mx - y + (2 - 3m) = 0$

$$\begin{aligned} r &= \left| \frac{m \cdot 0 - 1 \cdot 0 + (2 - 3m)}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} \right| \Rightarrow 2 = \left| \frac{2 - 3m}{\sqrt{m^2 + 1}} \right| \\ &\Rightarrow 4 = \frac{4 - 12m + 9m^2}{m^2 + 1} \\ &\Rightarrow 4m^2 + 4 = 4 - 12m + 9m^2 \\ &\Rightarrow 5m^2 - 12m = 0 \\ &\Rightarrow m(5m - 12) = 0 \\ &\Rightarrow m = 0 \quad \text{atau} \quad m = \frac{12}{5} \end{aligned}$$

Diperoleh

$$\text{PGS 1: } 0 \cdot x - y + (2 - 3 \cdot 0) = 0 \Rightarrow -y + 2 = 0 \Rightarrow y = 2$$

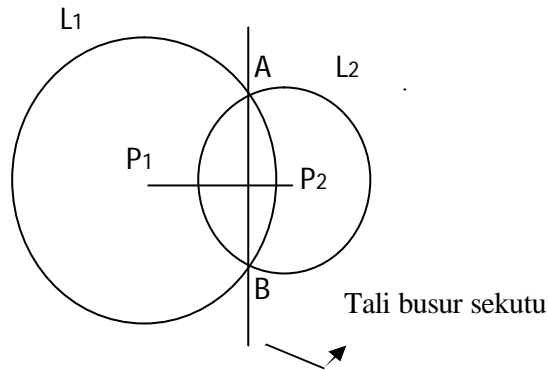
$$\text{PGS 2: } \frac{12}{5} \cdot x - y + \left(2 - 3 \cdot \frac{12}{5}\right) = 0 \Rightarrow \frac{12}{5} \cdot x - y + \left(-\frac{26}{5}\right) = 0 \Rightarrow 12x - 5y - 26 = 0$$

**Catatan:** cara 1 adalah yang paling “aman”, karena cara 2, 3, 4, 5 dan 6 kadang akan menemui masalah di tengah jalan. Silakan untuk mencoba soal berikut:

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$  yang melalui titik  $T(5, 4)$ . (diambil dari beberapa referensi)

42. Diketahui  $L_1 \equiv x^2 + y^2 + 2x + 6y - 26 = 0$  dan  $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$ . Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik potong kedua lingkaran serta melalui titik asal  $O$ .

**Jawab:**



Persamaan tali busur sekutu AB adalah:  $L_1 - L_2 = 0$

Persamaan lingkaran yang melalui titik A dan titik B adalah:

$L_3: L_1 + p L_2 = 0$  atau  $L_3: L_1 + p (L_1 - L_2) = 0$

dimana  $p$  adalah parameter.

$$\begin{array}{r} L_1 \equiv x^2 + y^2 + 2x + 6y - 26 = 0 \\ L_2 \equiv x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0 \\ \hline 6x + 6y - 14 = 0 \end{array} \Rightarrow 3x + 3y - 7 = 0$$

Sehingga persamaan tali busur sekutu AB adalah  $3x + 3y - 7 = 0$

$$L_3 \equiv L_1 + p(L_1 - L_2) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x + 6y - 26 + p(3x + 3y - 7) = 0$$

$L_3$  melalui  $(0, 0)$

$$\Rightarrow -26 + p(-7) = 0 \Rightarrow p = -\frac{26}{7}$$

Jadi persamaan  $L_3$  adalah:

$$L_3 \equiv x^2 + y^2 + 2x + 6y - 26 - \frac{26}{7}(3x + 3y - 7) = 0$$

$$L_3 \equiv 7x^2 + 7y^2 - 64x - 66y = 0$$

43. Persamaan garis singgung pada lingkaran  $x^2 + y^2 = 100$  di titik  $(8, -6)$  menyinggung lingkaran dengan pusat  $(4, -8)$  dan jari-jari  $r$ . Nilai  $r = \dots$

**Jawab:**

Titik  $(8, -6)$  terletak pada lingkaran  $x^2 + y^2 = 100$ . Persamaan garis  $g$  yang menyinggung lingkaran  $x^2 + y^2 = 100$  di titik  $(8, -6)$  adalah:

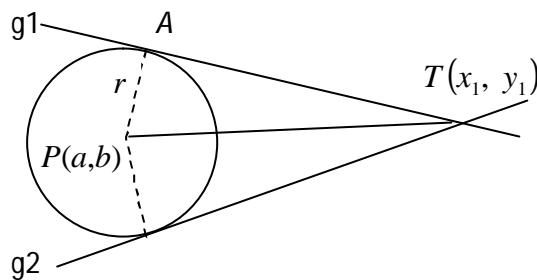
$$8x - 6y = 100 \Rightarrow 4x - 3y - 50 = 0$$

Panjang jari-jari lingkaran yang menyinggung garis  $g$  sama dengan jarak pusat lingkaran  $(4, -8)$  ke garis  $4x - 3y - 50 = 0$ , yaitu:

$$r = \left| \frac{4 \cdot 4 - 3(-8) - 50}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} \right| = \left| \frac{16 + 24 - 50}{\sqrt{16 + 9}} \right| = \left| \frac{-10}{\sqrt{25}} \right| = \frac{10}{5} = 2$$

44. Garis singgung yang ditarik dari titik  $T(1, -2)$  menyinggung lingkaran  $x^2 + y^2 + 3x - 4y = 0$  di titik A. Panjang garis AT adalah...

**Jawab:**



Panjang garis singgung AT adalah:

$$AT = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C}$$

Lingkaran  $x^2 + y^2 + 3x - 4y = 0$

Panjang garis AT adalah

$$\begin{aligned} AT &= \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3 + 8} \\ &= \sqrt{16} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Untuk  $L \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$  maka  $AT = \sqrt{(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - r^2}$

45. Garis singgung lingkaran  $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$  di titik  $T(6, 2)$  menyinggung lingkaran  $L_1$  di titik A dan B. Persamaan lingkaran  $L_2$  yang berpusat di T dan melalui titik A dan B adalah...

**Jawab:**

Lingkaran  $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$

Mempunyai titik pusat  $P(1, 2)$  dan jari-jari  $r = \sqrt{1^2 + 2^2 + 4} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$

Titik  $T(6, 2)$  di luar lingkaran  $L_1$ .

Garis singgung dari titik T menyinggung  $L_1$  di titik A dan B.

Lingkaran  $L_2$  berpusat di T dan berjari-jari  $r_2 = AT = BT$

Jarak kedua titik pusat:

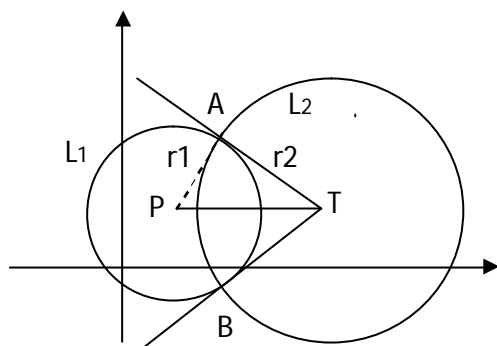
$$PT = \sqrt{(x_p - x_T)^2 + (y_p - y_T)^2} = \sqrt{(1 - 6)^2 + (2 - 2)^2} = \sqrt{25 + 0} = 5$$

$$\text{Jari-jari } L_2: r_2 = \sqrt{PT^2 - r_1^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

Persamaan lingkaran L2:

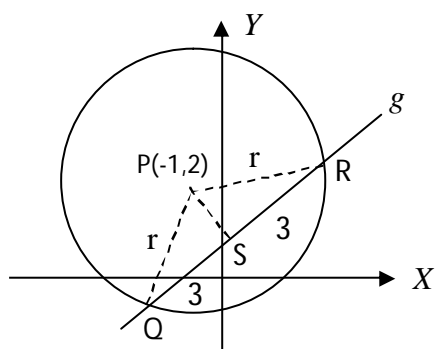
$$(x - x_T)^2 + (y - y_T)^2 = r_2^2 \Rightarrow (x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 4^2$$

$$\Rightarrow (x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 16$$



46. Garis  $3x - 4y + 1 = 0$  memotong lingkaran yang berpusat di titik  $P(-1, 2)$  di titik R dan Q. Jika panjang  $RQ = 6$  maka persamaan lingkaran tersebut adalah....

**Jawab:**



Garis  $g \equiv 3x - 4y + 1 = 0$  memotong lingkaran di titik R dan Q.

Panjang tali busur  $RQ = 6$ .

Panjang apotema (PS) sama dengan jarak titik  $P(-1, 2)$  ke garis  $g$ .

$$PS = \frac{|3(-1) - 4 \cdot 2 + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-3 - 8 + 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-10|}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$$

Panjang jari-jari lingkaran:

$$r = \sqrt{RS^2 + PS^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

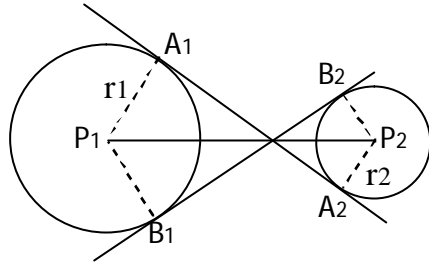
Persamaan lingkaran adalah:

$$(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 = r_2^2 \Rightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = (\sqrt{13})^2$$

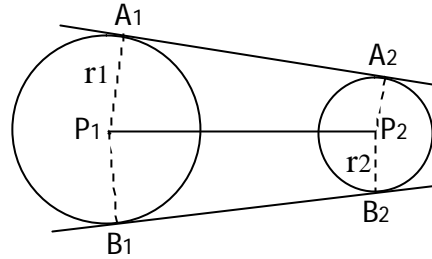
$$\Rightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 13$$

47. Panjang garis singgung persekutuan dalam lingkaran  $L_1 \equiv x^2 + y^2 + 2x + 8y + 1 = 0$  dan  $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 10x - 12y + 57 = 0$  adalah...

**Jawab:**



Garis singgung Persekutuan Dalam



Garis singgung Persekutuan Luar

Panjang garis singgung persekutuan dalam

$gs = A_1A_2 = \sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2}$ , dengan  $d$  = jarak P1 dan P2 (jarak dua titik pusat lingkaran)

Panjang garis singgung persekutuan luar

$gs = A_1A_2 = \sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2}$ , dengan  $d$  = jarak P1 dan P2 (jarak dua titik pusat lingkaran)

Lingkaran  $L_1 \equiv x^2 + y^2 + 2x + 8y + 1 = 0$

Mempunyai titik pusat P1(-1, -4) dan jari-jari

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2 - 1} = \sqrt{1+16-1} = \sqrt{16} = 4$$

Lingkaran  $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 10x - 12y + 57 = 0$

Mempunyai titik pusat P2(5, 6) dan jari-jari

$$r = \sqrt{5^2 + 6^2 - 57} = \sqrt{25+36-57} = \sqrt{4} = 2$$

Jarak P1 dan P2 adalah:

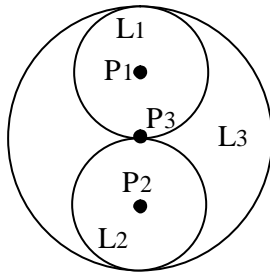
$$d = \sqrt{(5+1)^2 + (6+4)^2} = \sqrt{36+100} = \sqrt{136}$$

Panjang garis singgung persekutuan dalam adalah:

$$gs = \sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2} = \sqrt{136 - (4+2)^2} = \sqrt{136 - 36} = \sqrt{100} = 10$$



48.



Diketahui persamaan lingkaran:

$$L_1 \equiv x^2 + y^2 + 8y + 3 = 0 \text{ dan}$$

$$L_2 \equiv x^2 + y^2 - 8x - 4y + 7 = 0$$

Tentukan persamaan  $L_3$  (kedudukan ketiga lingkaran seperti gambar di samping)

**Jawab:**

Lingkaran  $L_1 \equiv x^2 + y^2 + 8y + 3 = 0$

Mempunyai titik pusat  $P_1(0, -4)$  dan jari-jari  $r = \sqrt{0^2 + (-4)^2 - 3} = \sqrt{16 - 3} = \sqrt{13}$

Lingkaran  $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 8x - 4y + 7 = 0$

Mempunyai titik pusat  $P_2(4, 2)$  dan jari-jari  $r = \sqrt{4^2 + 2^2 - 7} = \sqrt{16 + 4 - 7} = \sqrt{13}$

Oleh karena jari-jari  $r_1 = r_2$  maka titik  $P_3$  merupakan titik tengah garis  $P_1P_2$ .

Koordinat titik pusat:  $P_3\left(\frac{0+4}{2}, \frac{-4+2}{2}\right) = P_3(2, -1)$

Jari-jari:  $L_3 : r_3 = 2r_1 = 2\sqrt{13}$

Persamaan lingkaran adalah:

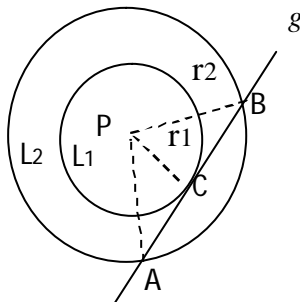
$$L_3 \equiv (x - x_{P_3})^2 + (y - y_{P_3})^2 = r_3^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = (2\sqrt{13})^2$$

$$\Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 52$$

Jadi  $L_3 \equiv (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 52$

49. Diketahui lingkaran  $L_1$  dan  $L_2$  konsentris (sepusat) dengan  $r_2 > r_1$ . Titik pusat lingkaran  $P(2, -2)$ . Garis  $g$  memotong  $L_2$  di titik  $A(5, -6)$  dan  $B(6, 1)$ . Jika garis menyinggung  $L_1$ , tentukan persamaan  $L_1$ .

**Jawab:**



Titik pusat  $L_1$  adalah  $P(2, -2)$

Persamaan garis  $g$  yang melalui titik  $A(5, -6)$  dan  $B(6, 1)$  adalah

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \Rightarrow \frac{y + 6}{1 + 6} = \frac{x - 5}{6 - 5} \Rightarrow y + 6 = 7x - 35 \Rightarrow 7x - y - 41 = 0$$

Jari-jari lingkaran  $L_1$  sama dengan jarak titik P ke garis  $g$ , yaitu

$$r_1 = \frac{|7 \cdot 2 - (-2) - 41|}{\sqrt{7^2 + (-1)^2}} = \frac{|14 + 2 - 41|}{\sqrt{49 + 1}} = \frac{|-25|}{\sqrt{50}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

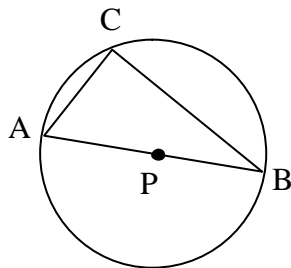
Persamaan lingkaran adalah:

$$\begin{aligned} L_1 &\equiv (x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 = r_1^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ &\Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = \frac{25}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } L_1 \equiv (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = \frac{25}{2}$$

50. Diketahui segitiga ABC dengan koordinat titik A(-6, 2), B(2, -4) dan C(-2, 4). Segitiga ABC siku-siku di C. tentukan persamaan lingkaran luar segitiga ABC.

**Jawab:**



Segitiga ABC siku-siku di C berarti sudut C menghadap diameter lingkaran AB sehingga titik pusat lingkaran terletak di tengah-tengah AB.

$$\text{Koordinat titik pusat lingkaran: } P\left(\frac{-6 + 2}{2}, \frac{2 - 4}{2}\right) = P(-2, -1)$$

Jari-jari lingkaran sama dengan jarak titik P ke A atau ke B:

$$r = \sqrt{(x_p - x_A)^2 + (y_p - y_A)^2} = \sqrt{(-2 + 6)^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

Persamaan lingkaran luar segitiga ABC adalah:

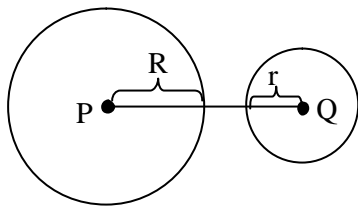
$$\begin{aligned} (x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 &= r_1^2 \Rightarrow (x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 5^2 \\ &\Rightarrow (x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 25 \end{aligned}$$

51. Jika  $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$  dan  $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 4x - 4y - 17 = 0$  adalah persamaan-persamaan lingkaran, tentukan kedudukan kedua lingkaran itu.

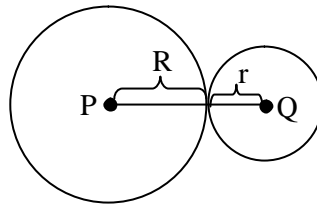
**Jawab:**

Kedudukan 2 lingkaran adalah:

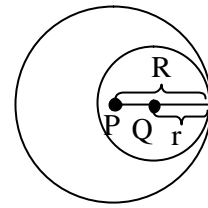
- Saling asing / tidak berpotongan luar, jika  $R + r < PQ$
- Bersinggungan luar, jika  $R + r = PQ$
- Bersinggungan dalam, jika  $R - r = PQ$
- $L_1$  di dalam  $L_2$  / tidak berpotongan dalam, jika  $R - r > PQ$
- Berpotongan, jika  $R - r < PQ < R + r$



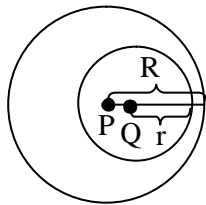
Tidak Berpotongan Luar



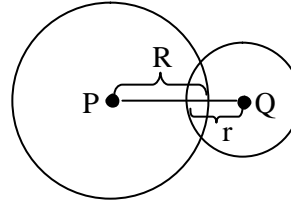
Bersinggungan Luar



Bersinggungan Dalam



Tidak Berpotongan Dalam



Berpotongan

Lingkaran  $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

Mempunyai pusat  $P(1, -2)$  dan jari-jari  $R = \sqrt{1^2 + (-2)^2 - 1} = \sqrt{1+4-1} = \sqrt{4} = 2$

Lingkaran  $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 4x - 4y - 17 = 0$

Mempunyai pusat  $Q(2, 2)$  dan jari-jari  $r = \sqrt{2^2 + 2^2 + 17} = \sqrt{4+4+17} = \sqrt{25} = 5$

Jarak PQ:

$$PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} = \sqrt{(2-1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$\left. \begin{array}{l} R+r=7 \\ R-r=3 \\ PQ=\sqrt{17} \end{array} \right\} \Rightarrow 3 < \sqrt{17} < 7 \Rightarrow R-r < PQ < R+r$$

Jadi  $L_1$  berpotongan dengan  $L_2$

52. Jika lingkaran yang berpusat di  $(3, 4)$  dan menyinggung sumbu  $X$  dicerminkan pada  $y = -x$ , maka persamaan lingkaran yang terjadi adalah...

**Jawab:**

Dari lingkaran yang diketahui:

- Pusat lingkaran  $(3, 4)$
- Lingkaran menyinggung sumbu  $X$

Maka jari-jarinya adalah  $r = 4$

Lingkaran dicerminkan pada garis  $y = -x$ , maka matrik transformasinya adalah:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Misalkan pusat lingkaran  $(3, 4)$  ditransformasikan ke  $(x, y)$ , maka:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

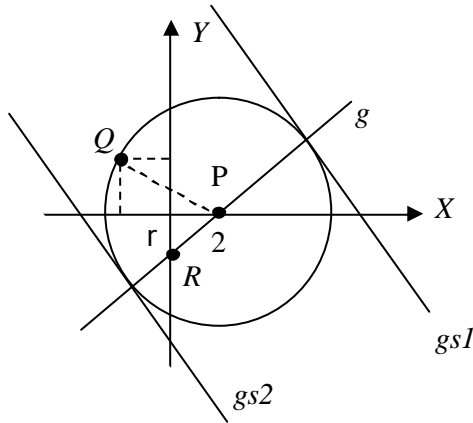
Jadi titik  $(3, 4)$  ditransformasikan ke titik  $(-4, -3)$ .

Hasil transformasi lingkaran semula adalah lingkaran dengan pusat  $(-4, -3)$  dan jari-jari 4, yaitu:

$$(x - (-4))^2 + (y - (-3))^2 = 4^2 \quad \Rightarrow \quad (x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

53. Lingkaran  $L$  berpusat di titik  $P(2, 0)$  dan melalui titik  $Q(-2, 2)$ . Garis  $g$  melalui titik pusat dan memotong sumbu  $Y$  di titik  $R(0, -2)$ . Tentukan persamaan garis singgung lingkaran yang tegak lurus garis  $g$ .

**Jawab:**



Jari-jari lingkaran sama dengan jarak  $P$  ke  $Q$

$$r = \sqrt{(2 + 2)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Gradien garis  $g$  yang melalui titik  $P$  dan  $R$  adalah:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 0}{0 - 2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Garis  $gs1$  dan  $gs2$  adalah garis singgung lingkaran yang tegak lurus garis  $g$ .

Misalkan gradien garis  $gs1$  dan  $gs2$  adalah  $m_1$  maka

$$m_1 m = -1 \quad \Rightarrow \quad m_1 \cdot 1 = -1 \quad \Rightarrow \quad m_1 = -1$$

Persamaan garis  $gs1$  dan  $gs2$  adalah

$$y - y_p = m_1(x - x_p) \pm r\sqrt{1 + m^2} \quad \Rightarrow \quad y - 0 = -1(x - 2) \pm 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{1 + (-1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad y = -x + 2 \pm 2\sqrt{10}$$

Diperoleh persamaan:

$$gs1 \equiv y = -x + 2 + 2\sqrt{10} \quad \Rightarrow \quad y + x - 2 - 2\sqrt{10}$$

$$gs2 \equiv y = -x + 2 - 2\sqrt{10} \quad \Rightarrow \quad y + x - 2 + 2\sqrt{10}$$

54. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik (2, 3) dan (1, 6) dan pusatnya terletak pada garis  $2x + 5y + 2 = 0$

**Jawab:**

Misal pusat lingkaran adalah  $P(a, b)$  dan persamaan lingkaran adalah

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

Lingkaran melalui titik (2, 3) dan (1, 6), maka

$$(2, 3): 2^2 + 3^2 - 2a \cdot 2 - 2b \cdot 3 + c = 0 \Rightarrow -4a - 6b + c = -13 \dots\dots\dots (1)$$

$$(1, 6): 1^2 + 6^2 - 2a \cdot 1 - 2b \cdot 6 + c = 0 \Rightarrow -2a - 12b + c = -37 \dots\dots\dots (2)$$

Dari (1) dan (2)

$$-4a - 6b + c = -13$$

$$-2a - 12b + c = -73$$

$$\hline -2a + 6b = 24$$

$$-a + 3b = 12 \dots\dots\dots (3)$$

$P(a, b)$  pada garis  $2x + 5y + 2 = 0$

$$2a + 5b + 2 = 0 \Rightarrow 2a + 5b = -2 \dots\dots\dots (4)$$

Dari 2.(3) dan (4)

$$-2a + 6b = 24$$

$$\frac{2a + 5b = -2}{11b = 22} +$$

$$11b = 22$$

$$b = 2$$

Substitusi  $b = 2$  ke (4)

$$2a + 5 \cdot 2 = -2 \Rightarrow 2a = -12 \Rightarrow a = -6$$

Substitusi  $a = -6$  dan  $b = 2$  ke (1)

$$-4(-6) - 6 \cdot 2 + c = -13 \Rightarrow 24 - 12 + c = -13 \Rightarrow c = -13 - 12 = -25$$

Jadi persamaan lingkaran itu ialah

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2(-6)x - 2 \cdot 2y + (-25) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 12x - 4y - 25 = 0$$

55. Tentukan persamaan lingkaran yang berjari-jari  $r = \sqrt{13}$  dan menyinggung garis  $2x - 3y + 1 = 0$  pada (1, 1).

**Jawab:**

Misalkan pusat lingkaran  $P(a, b)$  maka persamaan lingkaran adalah

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Jarak titik  $P(a, b)$  ke garis  $2x - 3y + 1 = 0$  adalah jari-jari lingkaran

$$r = \left| \frac{2a - 3b + 1}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} \right| \Rightarrow \sqrt{13} = \left| \frac{2a - 3b + 1}{\sqrt{13}} \right| \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{13} = \frac{2a - 3b + 1}{\sqrt{13}} \\ \sqrt{13} = -\left( \frac{2a - 3b + 1}{\sqrt{13}} \right) \end{cases}$$

Diperoleh  $13 = 2a - 3b + 1 \Rightarrow a = \frac{12 + 3b}{2}$  atau .....(1)

$$13 = -2a + 3b - 1 \Rightarrow a = \frac{3b - 14}{2} \dots\dots\dots(2)$$

Titik  $(1, 1)$  pada lingkaran  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  yang berjari-jari  $r = \sqrt{13}$  maka

$$(1 - a)^2 + (1 - b)^2 = 13 \Rightarrow 1 - 2a + a^2 + 1 - 2b + b^2 - 13 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 - 2a - 2b - 11 = 0 \dots\dots\dots(3)$$

Substitusi (1) ke (3)

$$a^2 + b^2 - 2a - 2b - 11 = 0 \Rightarrow \left( \frac{12 + 3b}{2} \right)^2 + b^2 - 2 \left( \frac{12 + 3b}{2} \right) - 2b - 11 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{144 + 72b + 9b^2}{4} + b^2 - 12 - 3b - 2b - 11 = 0$$

$$\Rightarrow 144 + 72b + 9b^2 + 4b^2 - 48 - 12b - 8b - 44 = 0$$

$$\Rightarrow 13b^2 + 52b + 52 = 0$$

$$\Rightarrow b^2 + 4b + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (b + 2)(b + 2) = 0 \Rightarrow b = -2$$

Substitusi  $b = -2$  ke (1):  $a = \frac{12 + 3(-2)}{2} = \frac{12 - 6}{2} = 3 \Rightarrow P_1(3, -2)$

Substitusi (2) ke (3)

$$a^2 + b^2 - 2a - 2b - 11 = 0 \Rightarrow \left( \frac{3b - 14}{2} \right)^2 + b^2 - 2 \left( \frac{3b - 14}{2} \right) - 2b - 11 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{9b^2 - 84b + 196}{4} + b^2 - 3b + 14 - 2b - 11 = 0$$

$$\Rightarrow 9b^2 - 84b + 196 + 4b^2 - 12b + 56 - 8b - 44 = 0$$

$$\Rightarrow 13b^2 - 104b + 208 = 0$$

$$\Rightarrow b^2 - 8b + 16 = 0$$

$$\Rightarrow (b - 4)(b - 4) = 0 \Rightarrow b = 4$$

Substitusi  $b = 4$  ke (2) :  $a = \frac{3(4)-14}{2} = \frac{12-14}{2} = -1 \Rightarrow P_2(-1, 4)$

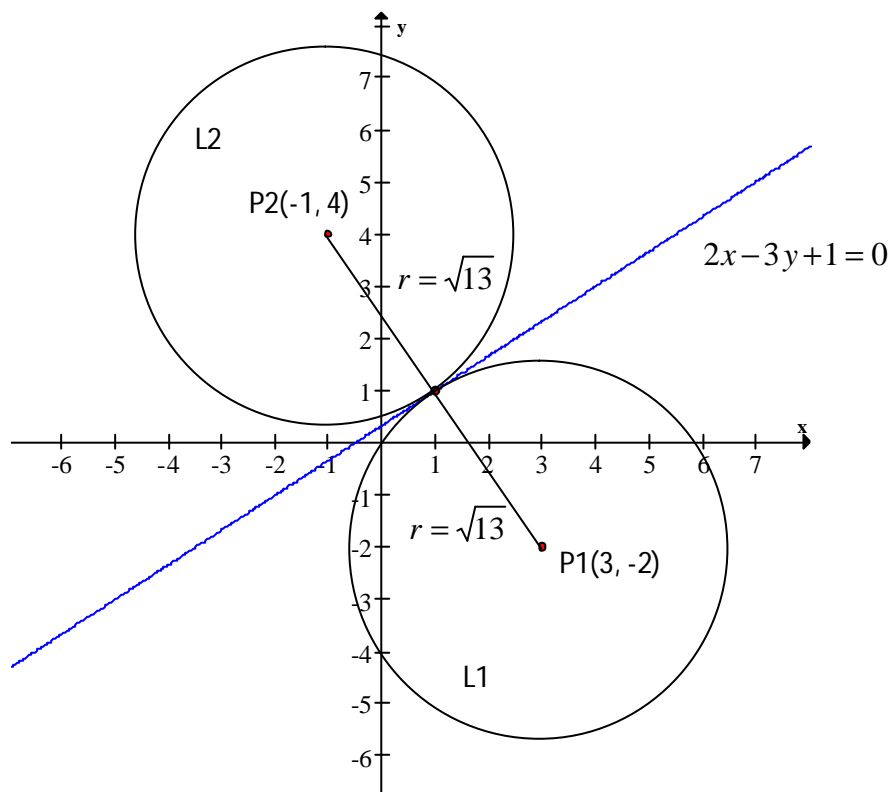
Persamaan lingkaran dengan  $P_1(3, -2)$  dan  $r = \sqrt{13}$  adalah:

$$L_1 \equiv (x-3)^2 + (y+2)^2 = \sqrt{13}^2$$
$$\Rightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 = 13$$

Persamaan lingkaran dengan  $P_2(-1, 4)$  dan  $r = \sqrt{13}$  adalah:

$$L_2 \equiv (x+1)^2 + (y-4)^2 = \sqrt{13}^2$$
$$\Rightarrow (x+1)^2 + (y-4)^2 = 13$$

Perhatikan gambar di bawah:



56. Persamaan garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$  yang sejajar sumbu Y adalah ...

**Jawab:**

Dari persamaan lingkaran  $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$ , diperoleh:

Titik pusat  $P(-1, 3)$  dan jari-jari  $r = 2$

Garis yang sejajar sumbu Y mempunyai persamaan  $x = a$  atau  $x - a = 0$ .

Jari-jari lingkaran sama dengan jarak titik  $P(-1, 3)$  ke garis  $x - a = 0$ .

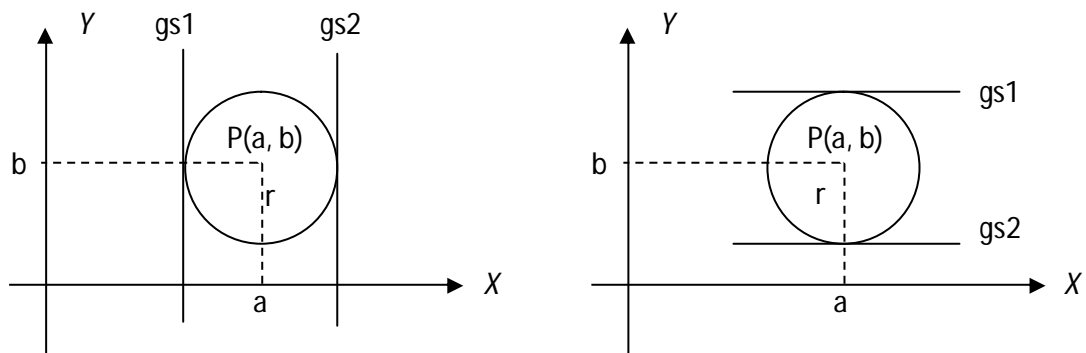
$$r = \left| \frac{1 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 - a}{\sqrt{1^2 + 0^2}} \right| = \left| \frac{-1 - a}{\sqrt{1}} \right| = |-1 - a|$$

$$\begin{aligned} r^2 = |-1 - a|^2 &\Rightarrow 2^2 = 1 + 2a + a^2 \\ &\Rightarrow a^2 + 2a - 3 = 0 \\ &\Rightarrow (a + 3)(a - 1) = 0 \\ &\Rightarrow a = -3 \quad \text{atau} \quad a = 1 \end{aligned}$$

Jadi, persamaan garis singgungnya  $x = -3$  atau  $x = 1$ .

57. Persamaan garis singgung lingkaran dengan pusat  $P(-3, 2)$  dengan jari-jari 4 yang sejajar sumbu X adalah ...

**Jawab:**



Persamaan garis singgung lingkaran dengan pusat  $P(a, b)$  dan jari-jari  $r$  yang sejajar sumbu Y adalah:  $x = a \pm r$

Persamaan garis singgung lingkaran dengan pusat  $P(a, b)$  dan jari-jari  $r$  yang sejajar sumbu X adalah:  $y = b \pm r$

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran dengan pusat  $P(-3, 2)$  dan jari-jari 4 yang sejajar sumbu X adalah:

$$y = 2 \pm 4 \Rightarrow y = 6 \quad \text{atau} \quad y = -2$$



58. Lingkaran yang menyinggung garis  $x + y = 2$  di titik T (1, 1) dan melalui titik S (3, 3) mempunyai jari-jari = ...

**Jawab:**

**Cara 1:**

Misalkan pusat lingkaran P(a, b), persamaan lingkaran adalah

$$L \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

L melalui (3, 3) :

$$(3 - a)^2 + (3 - b)^2 = r^2 \Rightarrow a^2 + b^2 - 6a - 6b + 18 = r^2 \dots\dots\dots(1)$$

L menyinggung garis  $x + y = 2$  di (1, 1) :

$$(1 - a)^2 + (1 - b)^2 = r^2 \Rightarrow a^2 + b^2 - 2a - 2b + 2 = r^2 \dots\dots\dots(2)$$

Jari-jari L sama dengan jarak P ke garis  $x + y = 2$

$$r = \frac{|a + b - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|a + b - 2|}{\sqrt{2}} \dots\dots\dots(3)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow r^2 &= \left| \frac{a + b - 2}{\sqrt{2}} \right|^2 \Rightarrow r^2 = \frac{(a + b - 2)^2}{2} \\ &= \frac{a^2 + b^2 + 2ab - 4a - 4b + 4}{2} \dots\dots\dots(4) \end{aligned}$$

Dari (1) dan (2):

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - 6a - 6b + 18 &= r^2 \\ a^2 + b^2 - 2a - 2b + 2 &= r^2 \\ \hline -4a - 4b + 16 &= 0 \\ a + b &= 4 \\ a &= 4 - b \dots\dots\dots(5) \end{aligned}$$

Substitusi (5) ke (3)

$$r = \frac{|a + b - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|(4 - b) + b - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|4 - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Jadi jari-jari lingkaran =  $\sqrt{2}$

**Cara 2:**

Dari (2) dan (4)

$$a^2 + b^2 - 2a - 2b + 2 = \frac{a^2 + b^2 + 2ab - 4a - 4b + 4}{2}$$

$$\Rightarrow 2a^2 + 2b^2 - 4a - 4b + 4 = a^2 + b^2 + 2ab - 4a - 4b + 4$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab = 0$$

$$\Rightarrow (a - b)(a - b) = 0$$

$$\Rightarrow a = b \dots\dots\dots(6)$$

Substitusi (6) ke (5)

$$b = 4 - b \Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = 2$$

$$a = 2$$

Jadi titik pusatnya  $P(2, 2)$

Jari-jari lingkaran adalah jarak P dengan T atau jarak P dengan S.

$$r = \sqrt{(x_T - a)^2 + (y_T - b)^2} = \sqrt{(1 - 2)^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

Jadi jari-jari lingkaran =  $\sqrt{2}$

**Cara 3:**

Persamaan garis melalui T (1, 1) dan S (3, 3) adalah:

$$\frac{y - y_T}{y_S - y_T} = \frac{x - x_T}{x_S - x_T} \Rightarrow \frac{y - 1}{3 - 1} = \frac{x - 1}{3 - 1} \Rightarrow \frac{y - 1}{2} = \frac{x - 1}{2} \Rightarrow y - 1 = x - 1 \Rightarrow y = x$$

Garis  $y = x$  bergradien 1 dan garis  $x + y = 2$  bergradien  $-1$ , artinya kedua garis saling tegak lurus di T(1, 1). Maka  $y = x$  berhimpit dengan diameter lingkaran.

Titik P terletak pada  $y = x$  atau pada diameter ST.

$$P\left(\frac{3+1}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = P(2, 2)$$

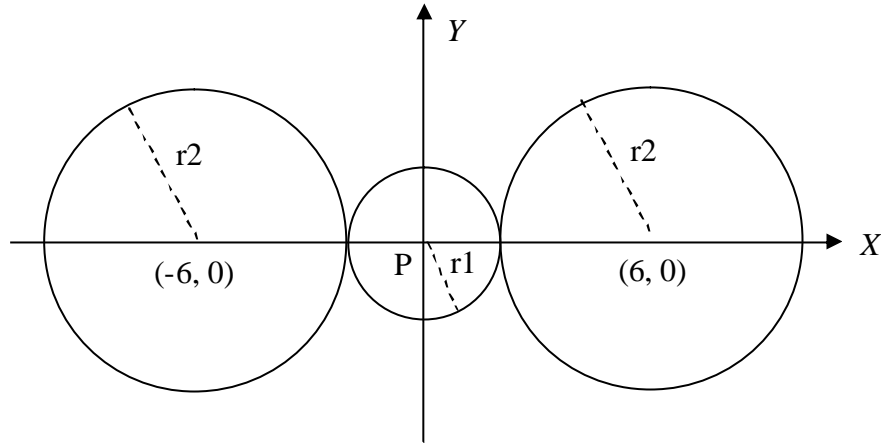
Jari-jari lingkaran adalah jarak P dengan T atau jarak P dengan S.

$$r = \sqrt{(x_T - a)^2 + (y_T - b)^2} = \sqrt{(1 - 2)^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

Jadi jari-jari lingkaran =  $\sqrt{2}$

59. Diketahui lingkaran  $L_1 \equiv x^2 + y^2 = 4$ . Lingkaran L2 bersinggungan di luar dengan L1. Perbandingan jari-jari L1 dan L2 adalah 1 : 2. Tentukan persamaan L2 jika titik pusatnya terletak pada sumbu X.

**Jawab:**



Lingkaran L1 berpusat di titik P1(0, 0) dan berjari-jari  $r_1 = 2$ .

Misalkan  $r_2 =$  jari-jari L2 maka  $r_1 : r_2 = 1 : 2$  maka  $r_2 = 2r_1 = 4$

Titik pusat L2 : P(-6, 0) dan P(6, 0)

Persamaan lingkaran L2:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & (x+6)^2 + (y-0)^2 = 4^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 12x + 20 = 0 \\ \text{ii)} \quad & (x-6)^2 + (y-0)^2 = 4^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 12x + 20 = 0 \end{aligned}$$

Jadi, persamaan lingkaran L2:  $x^2 + y^2 + 12x + 20 = 0$  dan  $x^2 + y^2 - 12x + 20 = 0$

60. Persamaan lingkaran dengan pusat P(3, 4) dan menyinggung lingkaran L1:  $x^2 + y^2 = 9$  adalah...

**Jawab:**

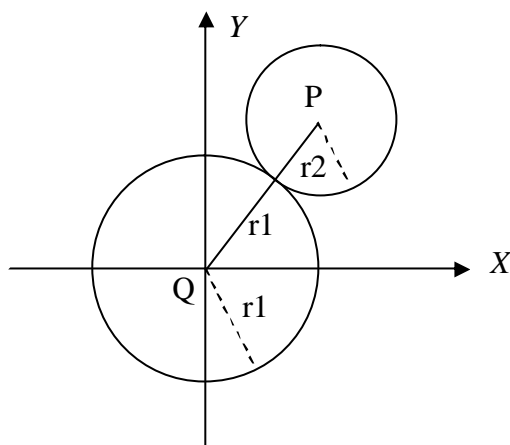
Lingkaran L1:  $x^2 + y^2 = 9$  mempunyai pusat Q(0, 0) dan jari-jari = 3

Jarak PQ adalah:  $PQ = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

Jari-jari L2 adalah:  $r_2 = PQ - r_1 = 5 - 3 = 2$

Persamaan lingkaran L2 adalah:

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + (y-4)^2 = 2^2 & \Rightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 4 \\ & \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0 \end{aligned}$$



61. Persamaan garis yang sejajar garis  $x - 2y = 10$  dan membagi lingkaran  $x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$  menjadi dua bagian yang sama adalah ...

**Jawab:**

Lingkaran  $x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$  mempunyai pusat  $P(-2, 0)$ .

Garis  $x - 2y = 10$  mempunyai gradien  $m = \frac{1}{2}$

Garis yang memotong lingkaran menjadi dua bagian yang sama berarti garis melalui titik pusat lingkaran  $P(-2, 0)$  dan gradien garis adalah (sejajar)  $mg = \frac{1}{2}$

Persamaan garis:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = \frac{1}{2}(x + 2)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$$

62. Tentukan persamaan lingkaran yang berjari-jari 5 dan melalui titik  $A(6, 4)$  dan  $B(5, 5)$ .

**Jawab:**

Misalkan persamaan lingkaran adalah  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 5^2$  dan berpusat di  $P(a, b)$ .

$A(6, 4)$  :

$$(6 - a)^2 + (4 - b)^2 = 5^2 \Rightarrow a^2 + b^2 - 12a - 8b + 27 = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$B(5, 5)$  :

$$(5 - a)^2 + (5 - b)^2 = 5^2 \Rightarrow a^2 + b^2 - 10a - 10b + 25 = 0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

Dari (1) dan (2)

$$\begin{array}{r}
a^2 + b^2 - 12a - 8b + 27 = 0 \\
a^2 + b^2 - 10a - 10b + 25 = 0 \\
\hline
-2a + 2b + 2 = 0 \\
-a + b + 1 = 0 \\
a = b + 1 \quad \dots\dots\dots(3)
\end{array}$$

Substitusi (3) ke (2)

$$\begin{aligned}
a^2 + b^2 - 10a - 10b + 25 = 0 &\Rightarrow (b+1)^2 + b^2 - 10(b+1) - 10b + 25 = 0 \\
&\Rightarrow b^2 + 2b + 1 + b^2 - 10b - 10 - 10b + 25 = 0 \\
&\Rightarrow 2b^2 - 18b + 16 = 0 \\
&\Rightarrow b^2 - 9b + 8 = 0 \\
&\Rightarrow (b-1)(b-8) = 0 \\
&\Rightarrow b = 1 \text{ atau } b = 8
\end{aligned}$$

Substitusi nilai  $b$  ke (3)

$$\begin{aligned}
b = 1 &\Rightarrow a = 1 + 1 = 2 && P_1(2, 1) \\
b = 8 &\Rightarrow a = 8 + 1 = 9 && P_2(9, 8)
\end{aligned}$$

Persamaan lingkaran:

$$\begin{aligned}
P_1(2, 1), r = 5 &\Rightarrow L_1 \equiv (x-2)^2 + (y-1)^2 = 25 \\
P_2(9, 8), r = 5 &\Rightarrow L_2 \equiv (x-9)^2 + (y-8)^2 = 25
\end{aligned}$$

63. Lingkaran  $x^2 + y^2 - 12x - 10y + 27 = 0$  memotong sumbu X di J dan K. tentukan persamaan lingkaran yang memiliki diameter JK.

**Jawab:**

Lingkaran L1:  $x^2 + y^2 - 12x - 10y + 27 = 0$  mempunyai titik pusat P(6, 5) dan  $r = \sqrt{34}$

Lingkaran memotong sumbu X atau  $y = 0$  maka

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 - 12x - 10y + 27 = 0 &\Rightarrow x^2 + 0^2 - 12x - 10 \cdot 0 + 27 = 0 \\
&\Rightarrow x^2 - 12x + 27 = 0 \\
&\Rightarrow (x-3)(x-9) = 0 \\
&\Rightarrow x = 3 \text{ atau } x = 9
\end{aligned}$$

Titik J(3, 0) dan titik K(9, 0).

Persamaan lingkaran melalui titik J(3, 0) dan K(9, 0) dengan JK diameter lingkaran adalah:

$$\begin{aligned}(x - x_J)(x - x_K) + (y - y_J)(y - y_K) &= 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 9) + (y - 0)(y - 0) = 0 \\ &\Rightarrow x^2 - 12x + 27 + y^2 = 0 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 - 12x + 27 = 0\end{aligned}$$

64. Tentukan nilai  $r$  agar lingkaran  $L_1 \equiv x^2 + y^2 = r^2$  berada di dalam lingkaran  $L_2 \equiv x^2 + y^2 + 8x - 6y - 75 = 0$  dan tidak bersinggungan.

**Jawab:**

$L_1 \equiv x^2 + y^2 = r^2$  mempunyai pusat P(0, 0) dan jari-jari  $r$   
 $L_2 \equiv x^2 + y^2 + 8x - 6y - 75 = 0$  mempunyai pusat Q(-4, 3) dan jari-jari  $R = 10$

$$PQ = \sqrt{(-4 - 0)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

Syarat L1 di dalam L2 dan tidak menyinggung adalah:  $R - r > PQ$ , maka:

$$\begin{aligned}R - r > PQ &\Rightarrow 10 - r > 5 \\ &\Rightarrow -r > -5 \\ &\Rightarrow r < 5\end{aligned}$$

Jadi, agar  $L_1 \equiv x^2 + y^2 = r^2$  berada di dalam  $L_2 \equiv x^2 + y^2 + 8x - 6y - 75 = 0$  dan tidak bersinggungan haruslah  $r < 5$

65. Lingkaran L menyinggung garis  $y = 2x - 1$  dan garis  $y = 2x - 11$ . Tentukan persamaan lingkaran L jika L melalui titik T(2, 1).

**Jawab:**

Misalkan  $L \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  dan pusat P(a, b)  
 Jari-jari lingkaran adalah jarak P(a, b) dengan garis singgung.

Terhadap garis  $y = 2x - 1$

$$r = \frac{|2a - b - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|2a - b - 1|}{\sqrt{5}} \Rightarrow r^2 = 4a^2 + b^2 - 4a + 2b - 4ab + 1 \dots\dots\dots(1)$$

Terhadap garis  $y = 2x - 11$

$$r = \frac{|2a-b-11|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|2a-b-1|}{\sqrt{5}} \Rightarrow r^2 = 4a^2 + b^2 - 44a + 22b - 4ab + 121 \dots\dots\dots(2)$$

Dari (1) dan (2):

$$\begin{aligned} r^2 &= 4a^2 + b^2 - 4a + 2b - 4ab + 1 \\ r^2 &= 4a^2 + b^2 - 44a + 22b - 4ab + 121 \\ \hline 0 &= 40a - 20b - 120 \\ 0 &= 2a - b - 6 \\ b &= 2a - 6 \dots\dots\dots(3) \end{aligned}$$

Substitusi (3) ke persamaan r

$$r = \frac{|2a - (2a - 6) - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{|5|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

Lingkaran melalui T(2, 1)

$$\begin{aligned} (x-a)^2 + (y-b)^2 &= r^2 \Rightarrow & (2-a)^2 + (1-b)^2 &= 5 \\ \Rightarrow & & 4 - 4a + a^2 + 1 - 2b + b^2 &= 5 \\ \Rightarrow & & a^2 + b^2 - 4a - 2b + 5 &= 5 \\ \Rightarrow & & a^2 + (2a-6)^2 - 4a - 2(2a-6) + 5 &= 5 \\ \Rightarrow & & a^2 + 4a^2 - 24a + 36 - 4a - 4a + 12 + 5 - 5 &= 0 \\ \Rightarrow & & 5a^2 - 32a + 48 &= 0 \\ \Rightarrow & & (5a-12)(a-4) &= 0 \\ \Rightarrow & & a = \frac{12}{5} & \text{ atau } a = 4 \end{aligned}$$

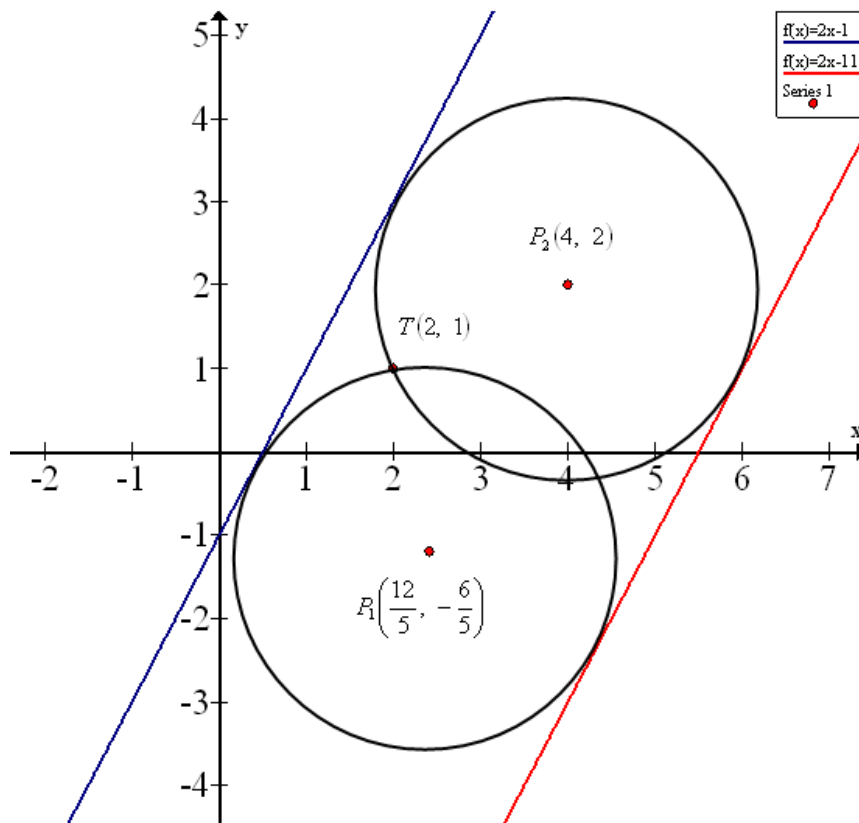
Substitusi nilai a ke (3)

$$\begin{aligned} a = \frac{12}{5} \Rightarrow b &= 2 \cdot \frac{12}{5} - 6 = \frac{24}{5} - \frac{30}{5} = -\frac{6}{5} & \Rightarrow P_1\left(\frac{12}{5}, -\frac{6}{5}\right) \\ a = 4 \Rightarrow b &= 2 \cdot 4 - 6 = 8 - 6 = 2 & \Rightarrow P_2(4, 2) \end{aligned}$$

Persamaan lingkaran adalah:

$$L_1 \equiv \left(x - \frac{12}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{6}{5}\right)^2 = 5$$

$$L_2 \equiv (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 5$$



66. Lingkaran  $L$  dengan jari-jari 2 menyinggung garis  $y = 2$  dan garis  $12x - 5y - 26 = 0$ . Tentukan persamaan lingkaran tersebut.

**Jawab:**

Misal persamaan lingkaran adalah  $L \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  dengan pusat  $P(a, b)$ . Jari-jari lingkaran adalah jarak  $P(a, b)$  dengan garis singgung.

Terhadap garis  $y = 2$

$$r = \frac{|0a + b - 2|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = |b - 2| \Rightarrow 2 = |b - 2|$$

$$\Rightarrow 4 = b^2 - 4b + 4$$

$$\Rightarrow b^2 - 4b = 0$$

$$\Rightarrow b(b - 4) = 0$$

$$\Rightarrow b = 0 \text{ atau } b = 4 \dots\dots\dots(1)$$



Terhadap garis  $12x - 5y - 26 = 0$

$$r = \frac{|12a - 5b - 26|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} \Rightarrow 2 = \frac{|12a - 5b - 26|}{13} \dots\dots\dots(2)$$

Substitusi nilai  $b$  ke (2)

Untuk  $b = 0$

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{|12a - 5b - 26|}{13} \Rightarrow 2 = \frac{|12a - 5 \cdot 0 - 26|}{13} \\ &\Rightarrow 2 = \frac{|12a - 26|}{13} \\ &\Rightarrow 4 = \frac{144a^2 - 624a + 676}{169} \\ &\Rightarrow 676 = 144a^2 - 624a + 676 \\ &\Rightarrow 144a^2 - 624a = 0 \\ &\Rightarrow 3a^2 - 13a = 0 \\ &\Rightarrow a(3a - 13) = 0 \\ &\Rightarrow a = 0 \quad \text{atau} \quad a = \frac{13}{3} \end{aligned}$$

Untuk  $b = 4$

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{|12a - 5 \cdot 4 - 26|}{13} \Rightarrow 2 = \frac{|12a - 20 - 26|}{13} \\ &\Rightarrow 2 = \frac{|12a - 46|}{13} \\ &\Rightarrow 4 = \frac{144a^2 - 1104a + 2116}{169} \\ &\Rightarrow 676 = 144a^2 - 1104a + 2116 \\ &\Rightarrow 144a^2 - 1104a + 1440 = 0 \\ &\Rightarrow 3a^2 - 23a + 30 = 0 \\ &\Rightarrow (a - 6)(3a - 5) = 0 \\ &\Rightarrow a = 6 \quad \text{atau} \quad a = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Diperoleh 4 titik pusat lingkaran, yaitu:

$$P_1(0, 0), \quad P_2\left(\frac{13}{3}, 0\right), \quad P_3(6, 4), \quad \text{dan} \quad P_4\left(\frac{5}{3}, 4\right)$$

Persamaan lingkarannya adalah:

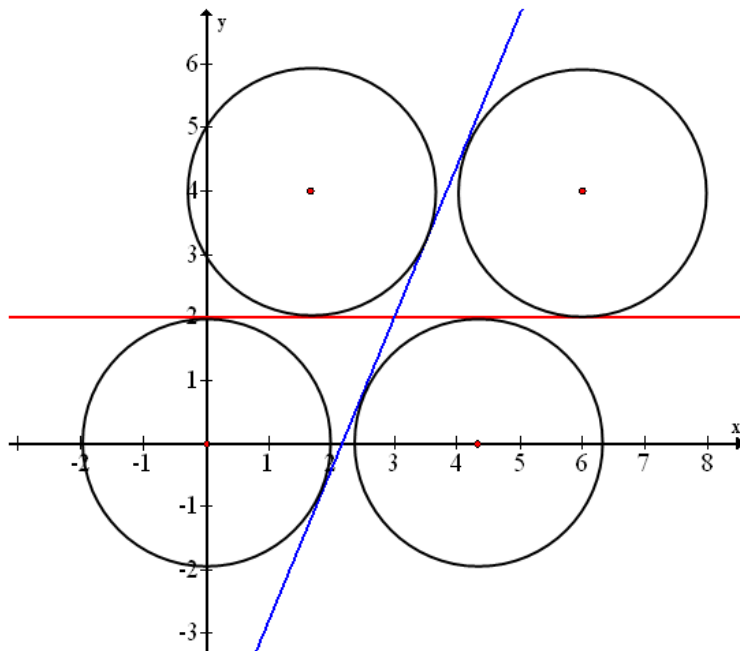
$$L_1 \equiv x^2 + y^2 = 4$$

$$L_2 \equiv \left(x - \frac{13}{3}\right)^2 + (y - 0)^2 = 4$$

$$L_1 \equiv (x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 4$$

$$L_2 \equiv \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + (y - 4)^2 = 4$$

Gambar:



67. Tentukan persamaan garis singgung sekutu (di titik singgung yang sama) lingkaran

$$L_1 \equiv (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9 \text{ dan } L_2 \equiv (x - 9)^2 + (y - 11)^2 = 49$$

**Jawab:**

$$L_1 \equiv (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$L_2 \equiv (x - 9)^2 + (y - 11)^2 = 49 \Rightarrow x^2 + y^2 - 18x - 22y + 153 = 0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

Persamaan garis singgung sekutu dua lingkaran yang beringgungan adalah:

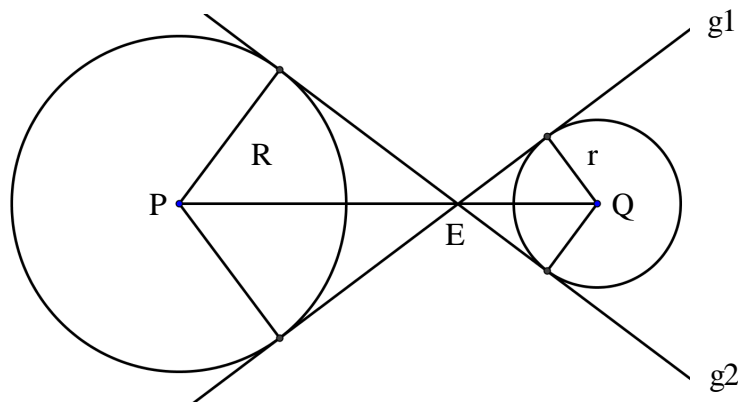
$$gs \equiv L_1 - L_2$$

$$\begin{array}{r}
 x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0 \\
 x^2 + y^2 - 18x - 22y + 153 = 0 \\
 \hline
 12x + 16y - 144 = 0 \\
 3x + 4y - 36 = 0
 \end{array}$$

Jadi persamaan garis singgung sekutunya adalah  $3x + 4y - 36 = 0$

68. Tentukan persamaan garis singgung persekutuan dalam  $L_1 \equiv (x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$  dan  $L_2 \equiv (x-12)^2 + (y-3)^2 = 4$ .

**Jawab:**



Titik E adalah titik potong kedua garis singgung, titik E membagi garis PQ.

Koordinat titik E adalah  $E\left(\frac{Rx_Q + rx_P}{R+r}, \frac{Ry_Q + ry_P}{R+r}\right)$

$L_1 \equiv (x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$  mempunyai pusat  $P(2, 3)$  dan jari-jari  $R = 4$

$L_2 \equiv (x-12)^2 + (y-3)^2 = 4$  mempunyai pusat  $Q(12, 3)$  dan jari-jari  $r = 2$

Koordinat titik E adalah  $E\left(\frac{4 \cdot 12 + 2 \cdot 2}{4+2}, \frac{4 \cdot 3 + 2 \cdot 3}{4+2}\right) = E\left(\frac{52}{6}, \frac{18}{6}\right) = E\left(\frac{26}{3}, 3\right)$

Persamaan garis singgung lingkaran dengan gradien  $m$  pada  $L_1$  adalah:

$$y - y_p = m(x - x_p) \pm r\sqrt{1+m^2} \Rightarrow y - 3 = m(x - 2) \pm 4\sqrt{1+m^2}$$

Garis singgung melalui titik  $E\left(\frac{26}{3}, 3\right)$

$$\begin{aligned}
y-3 &= m(x-2) \pm 4\sqrt{1+m^2} \Rightarrow & 3-3 &= m\left(\frac{26}{3}-2\right) \pm 4\sqrt{1+m^2} \\
& \Rightarrow & 0 &= \frac{20}{3}m \pm 4\sqrt{1+m^2} \\
& \Rightarrow \pm 4\sqrt{1+m^2} &= \frac{20}{3}m \\
& \Rightarrow 16+16m^2 &= \frac{400m^2}{9} \\
& \Rightarrow 144+144m^2 &= 400m^2 \\
& \Rightarrow 256m^2 &= 144 \\
& \Rightarrow 16m^2 &= 9 \\
& \Rightarrow m^2 &= \frac{9}{16} \\
& \Rightarrow m &= \pm \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Persamaan garis dengan gradien  $m$  dan melalui  $E\left(\frac{26}{3}, 3\right)$  adalah:

$$y-3 = m\left(x - \frac{26}{3}\right)$$

$$\text{Untuk } m = \frac{3}{4} \Rightarrow y-3 = \frac{3}{4}\left(x - \frac{26}{3}\right)$$

$$\Rightarrow y-3 = \frac{3}{4}x - \frac{26}{4}$$

$$\Rightarrow 3x - 4y - 14 = 0$$

$$\text{Untuk } m = -\frac{3}{4} \Rightarrow y-3 = -\frac{3}{4}\left(x - \frac{26}{3}\right)$$

$$\Rightarrow y-3 = -\frac{3}{4}x + \frac{26}{4}$$

$$\Rightarrow 3x + 4y - 38 = 0$$

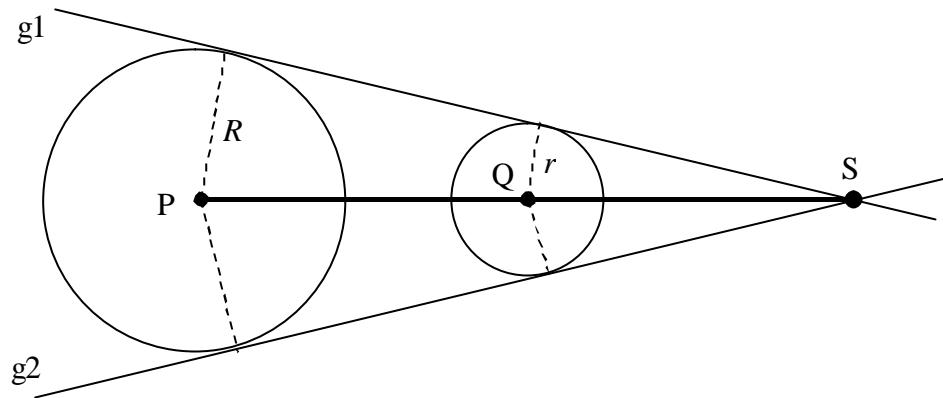
Jadi, persamaan garis singgung persekutuan dalam L1 dan L2 adalah:

- $g_1 \equiv 3x - 4y - 14 = 0$
- $g_2 \equiv 3x + 4y - 38 = 0$

69. Tentukan persamaan garis singgung persekutuan luar lingkaran

$$L_1 \equiv (x-5)^2 + (y-6)^2 = 16 \text{ dan } L_2 \equiv (x-15)^2 + (y-4)^2 = 4.$$

**Jawab:**



Titik S adalah titik potong kedua garis singgung, yang merupakan perpanjangan garis PQ

Koordinat titik S adalah  $S\left(\frac{Rx_Q - rx_P}{R-r}, \frac{Ry_Q - ry_P}{R-r}\right)$

$L_1 \equiv (x-5)^2 + (y-6)^2 = 16$  mempunyai pusat P(5, 6) dan jari-jari  $R = 4$

$L_2 \equiv (x-15)^2 + (y-4)^2 = 4$  mempunyai pusat Q(15, 4) dan jari-jari  $r = 2$

Koordinat titik S adalah  $S\left(\frac{4 \cdot 15 - 2 \cdot 5}{4-2}, \frac{4 \cdot 4 - 2 \cdot 6}{4-2}\right) = S\left(\frac{50}{2}, \frac{4}{2}\right) = S(25, 2)$

Persamaan garis singgung lingkaran dengan gradien  $m$  pada  $L_1$  adalah:

$$y - y_p = m(x - x_p) \pm r\sqrt{1+m^2} \Rightarrow y - 6 = m(x - 5) \pm 4\sqrt{1+m^2}$$

Garis singgung melalui titik  $S(25, 2)$

$$\begin{aligned} y - 6 = m(x - 5) \pm 4\sqrt{1+m^2} &\Rightarrow 2 - 6 = m(25 - 5) \pm 4\sqrt{1+m^2} \\ &\Rightarrow -4 = 20m \pm 4\sqrt{1+m^2} \\ &\Rightarrow -1 = 5m \pm \sqrt{1+m^2} \\ &\Rightarrow \pm \sqrt{1+m^2} = 5m + 1 \\ &\Rightarrow 1 + m^2 = 25m^2 + 10m + 1 \\ &\Rightarrow 24m^2 + 10m = 0 \\ &\Rightarrow m(24m + 10) = 0 \\ &\Rightarrow m = 0 \text{ atau } m = -\frac{10}{24} = -\frac{5}{12} \end{aligned}$$

Persamaan garis dengan gradien  $m$  dan melalui  $S(25, 2)$  adalah:  $y - 2 = m(x - 25)$

$$\text{Untuk } m = 0 \Rightarrow y - 2 = 0(x - 25)$$

$$\Rightarrow y - 2 = 0$$

$$\Rightarrow y = 2$$

$$\text{Untuk } m = -\frac{5}{12} \Rightarrow y - 2 = -\frac{5}{12}(x - 25)$$

$$\Rightarrow y - 2 = -\frac{5}{12}x + \frac{125}{12}$$

$$\Rightarrow 12y - 24 = -5x + 125$$

$$\Rightarrow 5x + 12y - 149 = 0$$

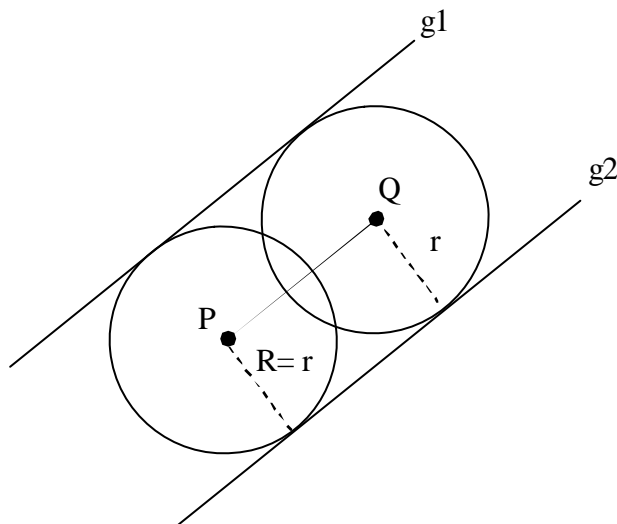
Jadi persamaan garis singgung persekutuan luar L1 dan L2 adalah:

$$y = 2 \quad \text{dan} \quad 5x + 12y - 149 = 0$$

70. Tentukan persamaan garis singgung persekutuan luar lingkaran

$$L_1 \equiv (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 5 \quad \text{dan} \quad L_2 \equiv \left(x - \frac{12}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{6}{5}\right)^2 = 5.$$

**Jawab:**



$$L_1 \equiv (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 5 \quad \text{mempunyai pusat } P(4, 2) \quad \text{dan jari-jari } R = \sqrt{5}$$

$$L_2 \equiv \left(x - \frac{12}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{6}{5}\right)^2 = 5 \quad \text{mempunyai pusat } Q\left(\frac{12}{5}, -\frac{6}{5}\right) \quad \text{dan jari-jari } r = \sqrt{5}$$

Untuk  $R = r$ , PQ sejajar kedua garis singgung.

$$m_{gs} = m_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{-\frac{6}{5} - 2}{\frac{12}{5} - 4} = \frac{-\frac{16}{5}}{-\frac{8}{5}} = \frac{16}{8} = 2$$

Garis singgung L1 merupakan garis singgung L2 (garis singgung persekutuan luar)

Persamaan garis singgung L1 dengan gradien 2 adalah:

$$\begin{aligned} y - 2 &= 2(x - 4) \pm \sqrt{5}\sqrt{1 + 2^2} \Rightarrow & y &= 2 + 2x - 8 \pm 5 \\ & \Rightarrow & y &= 2x - 6 \pm 5 \\ & \Rightarrow & y &= 2x - 11 \quad \text{atau} \quad y = 2x - 1 \end{aligned}$$

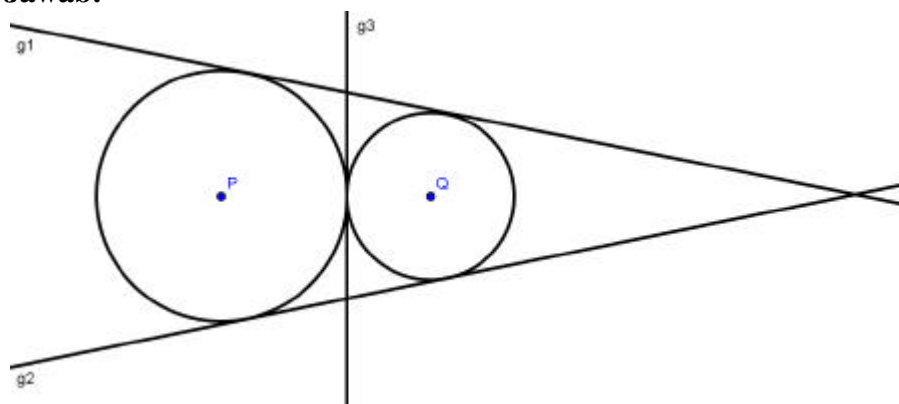
Jadi persamaan garis singgung persekutuan luar L1 dan L2 adalah:

$$y = 2x - 1 \text{ dan } y = 2x - 11. \quad (\text{lihat soal no. 65})$$

71. Tentukan persamaan garis singgung persekutuan antara lingkaran

$$L_1 \equiv (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 9 \text{ dan } L_2 \equiv (x - 6)^2 + (y - 1)^2 = 4.$$

**Jawab:**



$$L_1 \equiv (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 9 \text{ mempunyai pusat } P(1, 1) \text{ dan jari-jari } R = 3$$

$$L_2 \equiv (x - 6)^2 + (y - 1)^2 = 4 \text{ mempunyai pusat } Q(6, 1) \text{ dan jari-jari } r = 2$$

Terdapat 2 garis singgung persekutuan luar dan 1 garis singgung persekutuan dalam.

**Garis singgung persekutuan luar**

Titik potong kedua garis singgung:

$$S\left(\frac{Rx_Q - rx_P}{R - r}, \frac{Ry_Q - ry_P}{R - r}\right) = S\left(\frac{18 - 2}{3 - 2}, \frac{3 - 2}{3 - 2}\right) = S(16, 1)$$

Persamaan garis singgung lingkaran dengan gradien  $m$  pada L2 adalah:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \pm r\sqrt{1 + m^2} \Rightarrow y - 1 = m(x - 6) \pm 2\sqrt{1 + m^2}$$

Garis singgung melalui titik  $S(16, 1)$

$$\begin{aligned} y - 1 &= m(x - 6) \pm 2\sqrt{1 + m^2} \Rightarrow & 1 - 1 &= m(16 - 6) \pm 2\sqrt{1 + m^2} \\ &\Rightarrow & 0 &= 10m \pm 2\sqrt{1 + m^2} \\ &\Rightarrow & 10m &= \pm 2\sqrt{1 + m^2} \\ &\Rightarrow & 100m^2 &= 4m^2 + 4 \\ &\Rightarrow & 96m^2 &= 4 \\ &\Rightarrow & m^2 &= \frac{1}{24} \\ &\Rightarrow & m &= \pm \frac{1}{\sqrt{24}} \end{aligned}$$

Persamaan garis dengan gradien  $m$  dan melalui  $S(16, 1)$  adalah:  $y - 1 = m(x - 16)$

$$\begin{aligned} \text{Untuk } m &= \frac{1}{\sqrt{24}} \Rightarrow & y - 1 &= \frac{1}{\sqrt{24}}(x - 16) \\ &\Rightarrow & y &= \frac{1}{\sqrt{24}}x + 1 - \frac{16}{\sqrt{24}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Untuk } m &= -\frac{1}{\sqrt{24}} \Rightarrow & y - 1 &= -\frac{1}{\sqrt{24}}(x - 16) \\ &\Rightarrow & y &= -\frac{1}{\sqrt{24}}x + 1 + \frac{16}{\sqrt{24}} \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } y = \frac{1}{\sqrt{24}}x + 1 - \frac{16}{\sqrt{24}} \text{ dan } y = -\frac{1}{\sqrt{24}}x + 1 + \frac{16}{\sqrt{24}}$$

### Garis singgung persekutuan dalam

#### Cara 1:

$$PGS \equiv L_1 - L_2 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$$

$$(x - 6)^2 + (y - 1)^2 = 4$$

---


$$(x - 1)^2 - (x - 6)^2 = 5$$

$$x^2 - 2x + 1 - x^2 + 12x - 35 = 5$$

$$10x = 40$$

$$x = 4$$

#### Cara 2:



Titik singgung kedua lingkaran adalah  $E\left(\frac{Rx_Q + rx_P}{R+r}, \frac{Ry_Q + ry_P}{R+r}\right) =$

$$E\left(\frac{18+2}{3+2}, \frac{3+2}{3+2}\right) = E(4, 1)$$

$E(4, 1)$  adalah titik pada kedua lingkaran, maka persamaan garis singgung dapat ditentukan dengan rumus persamaan garis singgung melalui titik pada lingkaran. Kita cari menggunakan lingkaran pertama.

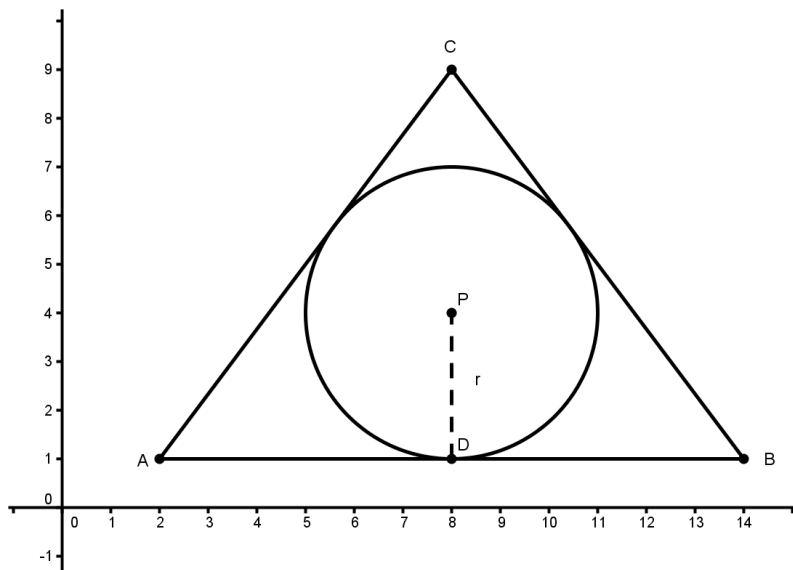
$$\begin{aligned} (4-1)(x-1) + (1-1)(y-1) &= 9 \Rightarrow 3(x-1) = 9 \\ &\Rightarrow 3x - 3 = 9 \\ &\Rightarrow 3x = 12 \\ &\Rightarrow x = 4 \end{aligned}$$

Jadi persamaan garis singgung persekutuan L1 dan L2 adalah:  $y = \frac{1}{\sqrt{24}}x + 1 - \frac{16}{\sqrt{24}}$

$$, y = -\frac{1}{\sqrt{24}}x + 1 + \frac{16}{\sqrt{24}}, \text{ dan } x = 4$$

72. Tentukan persamaan lingkaran dalam segitiga yang mempunyai titik-titik sudut A(2, 1), B(14, 1), dan C(8, 9).

**Jawab:**



Segitiga yang terbentuk adalah segitiga sama kaki, yang mana  $AC = BC$ . Titik D adalah titik tengah garis AB dan CD garis tinggi segitiga ABC.

Dari gambar diperoleh:  $AB = 12$ ,  $CD = 8$ ,  $AC = BC = 10$

$$\text{Luas } \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot K = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) = \frac{1}{2}(12 + 10 + 10) = 16$$

Jari-jari lingkaran dalam adalah  $r = \frac{L}{S} = \frac{48}{16} = 3$

Pusat lingkaran  $P(a, b)$  terletak pada CD atau garis  $x = 8$  sehingga  $a = 8$  dan  $b = 1 + r = 1 + 3 = 4$ , dengan demikian  $P(8, 4)$

Atau

Jari-jari  $r$  adalah jarak  $P$  dengan garis  $AB$  dengan persamaan  $y = 1$ .

$$r = \left| \frac{0 \cdot a + 1 \cdot b - 1}{\sqrt{0 + 1}} \right| = |b - 1| \Rightarrow 3 = |b - 1|$$

Diperoleh  $3 = b - 1 \Rightarrow b = 4$  atau  $3 = -b + 1 \Rightarrow b = -2$  sehingga  $P(8, 4)$  atau  $P(8, -2)$ , namun titik  $P(8, -2)$  tidak memenuhi karena terletak di luar segitiga. Jadi titik pusat adalah  $P(8, 4)$ .

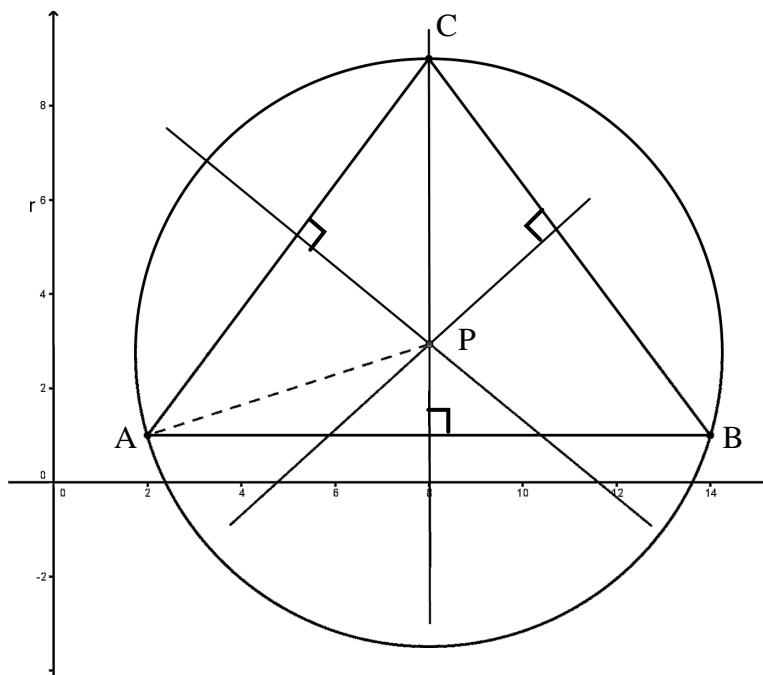
Persamaan lingkaran adalah:

$$(x - 8)^2 + (y - 4)^2 = 3^2 \quad \Rightarrow \quad (x - 8)^2 + (y - 4)^2 = 9$$

73. Tentukan persamaan lingkaran luar segitiga yang mempunyai titik-titik sudut  $A(2, 1)$ ,  $B(14, 1)$ , dan  $C(8, 9)$ .

**Jawab:**

**Cara 1:**



Garis sumbu segitiga adalah garis yang membagi dua sama panjang suatu sisi segitiga dan tegak lurus sisi tersebut. Perpotongan garis sumbu adalah titik pusat lingkaran luar suatu segitiga.

Misalkan sisi segitiga adalah AB dimana  $A(x_1, y_1)$  dan  $B(x_2, y_2)$  maka persamaan garis sumbu pada sisi AB adalah:

$$(x_2 - x_1)x + (y_2 - y_1)y - \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2) = 0$$

Garis sumbu pada sisi AB dengan  $A(2, 1)$  dan  $B(14, 1)$  adalah:

$$\begin{aligned} (14-2)x + (1-1)y - \frac{1}{2}(14^2 - 2^2 + 1^2 - 1^2) &= 0 \Rightarrow 12x + 0y - \frac{1}{2}(192) = 0 \\ \Rightarrow 12x &= 96 \\ \Rightarrow x &= 8 \quad \dots\dots\dots(1) \end{aligned}$$

Garis sumbu pada sisi AC dengan  $A(2, 1)$  dan  $C(8, 9)$  adalah:

$$\begin{aligned} (8-2)x + (9-1)y - \frac{1}{2}(8^2 - 2^2 + 9^2 - 1^2) &= 0 \Rightarrow 6x + 8y - \frac{1}{2}(60+80) = 0 \\ \Rightarrow 6x + 8y - 70 &= 0 \\ \Rightarrow 3x + 4y - 35 &= 0 \quad \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

Substitusi (1) ke (2)

$$3 \cdot 8 + 4y - 35 = 0 \Rightarrow 4y = 35 - 24 \Rightarrow 4y = 11 \Rightarrow y = \frac{11}{4}$$

Titik pusat lingkaran adalah  $P\left(8, \frac{11}{4}\right)$

Jari-jari lingkaran adalah jarak P ke titik A, B atau C. Misalkan  $r = AP$ , maka

$$r = \sqrt{(8-2)^2 + \left(\frac{11}{4} - 1\right)^2} = \sqrt{36 + \frac{49}{16}} = \sqrt{\frac{625}{16}} = \frac{25}{4}$$

Persamaan lingkaran dengan pusat  $P\left(8, \frac{11}{4}\right)$  dan jari-jari  $r = \frac{25}{4}$  adalah:

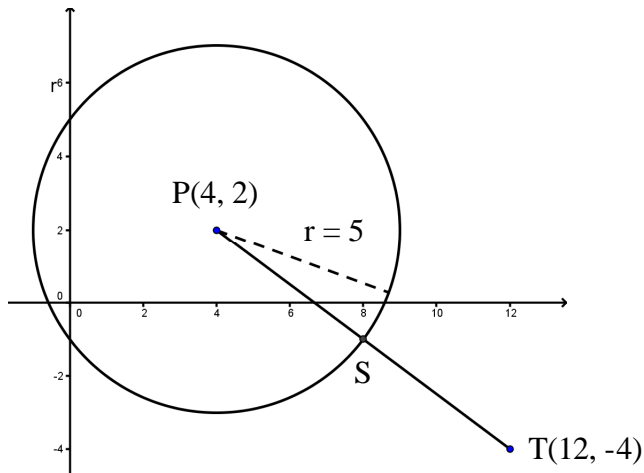
$$(x-8)^2 + \left(y - \frac{11}{4}\right)^2 = \left(\frac{25}{4}\right)^2 \Rightarrow (x-8)^2 + \left(y - \frac{11}{4}\right)^2 = \frac{625}{16}$$

**Cara 2:**

Seperti pembahasan soal no 10. Mencari persamaan lingkaran melalui 3 titik yang diketahui.

74. Tentukan jarak terdekat titik  $T(12, -4)$  terhadap lingkaran  $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 25$ .  
Kemudian tentukan koordinat titiknya.

**Jawab:**



Jarak terdekat titik T terhadap lingkaran adalah jarak titik T dengan titik S.

$$PT = \sqrt{(12-4)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$$

$$PS = r = 5$$

$$TS = PT - PS = 10 - 5 = 5$$

Perbandingan PS dengan TS adalah 1 : 1, maka

$$S\left(\frac{x_T + x_S}{2}, \frac{y_T + y_S}{2}\right) = S\left(\frac{12+4}{2}, \frac{-4+2}{2}\right) = S(8, -1)$$

Jadi, jarak terdekat titik T terhadap lingkaran adalah 5, pada titik  $S(8, -1)$ .

75. Misalkan lingkaran L1 berjari-jari 8 m dan lingkaran L2 berjari-jari 2 m dengan jarak kedua pusatnya adalah 12 m. Berapakah panjang minimal sabuk lilitan luar yang menghubungkan kedua lingkaran tersebut?

**Jawab:**

Misalkan L1 berpusat di P berjari-jari R, dan L2 berpusat di Q berjari-jari r, maka panjang minimal sabuk lilitan adalah:

2 kali panjang garis singgung sekutu + panjang busur besar + panjang busur kecil, dengan rincian sebagai berikut:

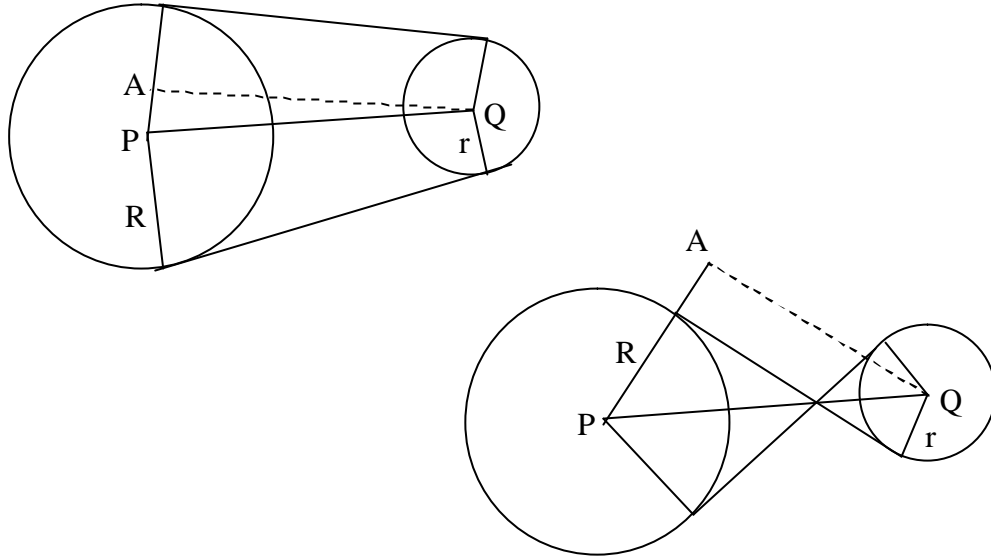
Panjang minimal sabuk lilitan luar (PLL) yang menghubungkan kedua lingkaran adalah

$$PLL = 2\sqrt{PQ^2 - (R-r)^2} + 2p\left(\frac{360^\circ - 2a}{360^\circ}R + \frac{2a}{360^\circ}r\right)$$

Panjang minimal sabuk lilitan dalam (PLD) yang menghubungkan kedua lingkaran adalah

$$PLD = 2\sqrt{PQ^2 - (R+r)^2} + 2p\left(\frac{360^\circ - 2a}{360^\circ}(R+r)\right)$$

dengan  $\angle a = \angle APQ \Rightarrow \cos a = \frac{AP}{PQ}$ , perhatikan gambar.



Diketahui L1 mempunyai  $R = 8$ , L2 mempunyai  $r = 2$  dan panjang  $PQ = 12$ .

$$\begin{aligned}\angle a = \angle APQ \Rightarrow \cos a &= \frac{AP}{PQ} = \frac{R-r}{PQ} = \frac{8-2}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow a &= 60^\circ\end{aligned}$$

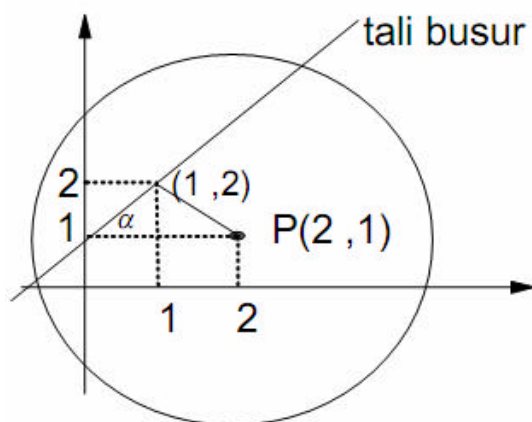
Panjang minimal sabuk lilitan luar (PLL) yang menghubungkan kedua lingkaran adalah

$$\begin{aligned}PLL &= 2\sqrt{PQ^2 - (R-r)^2} + 2p\left(\frac{360^\circ - 2a}{360^\circ}R + \frac{2a}{360^\circ}r\right) \\ &= 2\sqrt{12^2 - (8-2)^2} + 2p\left(\frac{360^\circ - 120^\circ}{360^\circ} \cdot 8 + \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot 2\right) \\ &= 2\sqrt{108} + 2p\left(\frac{16}{3} + \frac{2}{3}\right) \\ &= 12\sqrt{3} + 12p\end{aligned}$$

Jadi, panjang minimal sabuk lilitan luar adalah  $12\sqrt{3} + 12p$  m.

76. Jika titik  $(1, 2)$  merupakan titik tengah suatu tali busur lingkaran  $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ , maka persamaan tali busur tersebut adalah...

**Jawab:**



Lingkaran  $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$  mempunyai pusat  $P(2, 1)$  dan jari-jari = 5

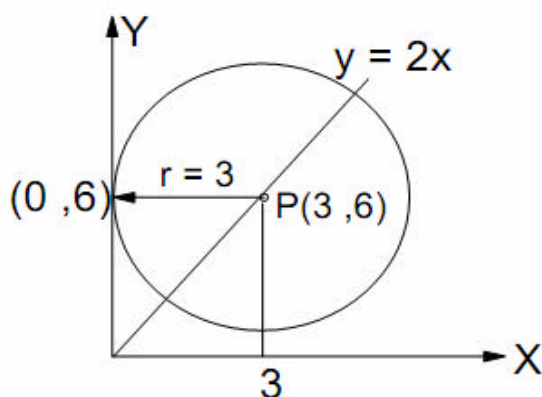
Gradien tali busur adalah  $m = \tan \alpha = \frac{1}{1} = 1$

Persamaan talibusur melalui  $(1, 2)$  dengan gradien 1 adalah:

$$y - 2 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x + 1$$

77. Titik pusat lingkaran L berada di kuadran I dan berada di sepanjang garis  $y = 2x$ . Jika L menyinggung sumbu Y di titik  $(0, 6)$ , maka persamaan lingkaran adalah ...

**Jawab:**



Pada gambar terlihat bahwa pusat L adalah  $P(3, 6)$  dan jari-jari L adalah  $r = 3$ .

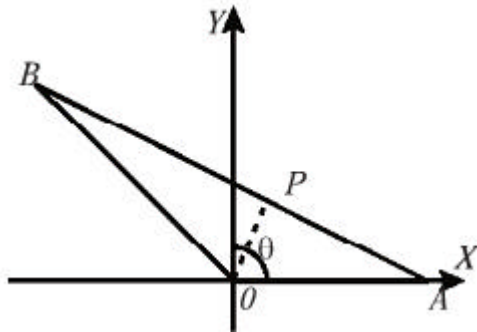
Persamaan lingkaran adalah:

$$\begin{aligned} (x-a)^2 + (y-b)^2 &= r^2 \Rightarrow (x-3)^2 + (y-6)^2 = 3^2 \\ &\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 = 9 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 12y + 36 = 0 \end{aligned}$$

78. Garis  $g$  menghubungkan titik  $A(5, 0)$  dan titik  $B(10 \cos \mathbf{q}, 10 \sin \mathbf{q})$ . Titik P terletak  
Lingkaran

pada AB sehingga  $AP : PB = 2 : 3$ . Jika  $q$  berubah dari 0 sampai  $2\pi$  maka titik P bergerak menelusuri lingkaran. Tentukan persamaan lingkaran tersebut!

**Jawab:**



$A(5, 0)$  dan  $B(10 \cos q, 10 \sin q)$ . Titik P pada AB sehingga  $AP : PB = 2 : 3$ .

$$\begin{aligned} OP &= OA + \frac{2}{5} AB \\ &= OA + \frac{2}{5} (OB - OA) \\ &= \frac{3}{5} OA + \frac{2}{5} OB \end{aligned}$$

Persamaan parameter P adalah:

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{5} \cdot 5 + \frac{2}{5} \cdot 10 \cos q = 3 + 4 \cos q \\ y &= \frac{3}{5} \cdot 0 + \frac{2}{5} \cdot 10 \sin q = 4 \sin q \end{aligned}$$

Dengan demikian

$$\begin{aligned} x = 3 + 4 \cos q &\Rightarrow 4 \cos q = x - 3 \\ y = 4 \sin q &\Rightarrow 4 \sin q = y \end{aligned}$$

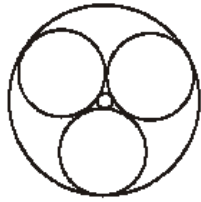
$$\begin{aligned} (4 \cos q)^2 + (4 \sin q)^2 &= (x - 3)^2 + y^2 \\ \Rightarrow 16(\cos^2 q + \sin^2 q) &= x^2 - 6x + 9 + y^2 \\ \Rightarrow 16 &= x^2 + y^2 - 6x + 9 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 7 &= 0 \end{aligned}$$

Jadi persamaan lingkaran adalah  $x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$

**Cat:** Diambil dari BSE “Mahir Mengembangkan Kemampuan Matematika”, hal 110 dengan sedikit perubahan.

79. Tiga buah lingkaran yang berjari-jari sama saling bersinggungan luar, lingkaran kecil

L1 menyinggung ketiga lingkaran tersebut dan lingkaran besar L2 juga menyinggung ketiga lingkaran tersebut. Perbandingan jari-jari lingkaran L2 dan jari-jari lingkaran L1 adalah ... (BSE Wahana Matematika hal 148)



**Jawab:**

Lihat Gambar di bawah! Ketiga lingkaran sedang berjari-jari sama, misalkan  $r$ . Sehingga ABC adalah segitiga sama sisi, yang mana BD, AE, dan CF adalah garis berat segitiga ABC. Perpotongan ketiga garis berat adalah titik P yang merupakan pusat lingkaran kecil L1 dan lingkaran besar L2. Dimana

$$DP = \frac{1}{3}BD \quad \text{atau} \quad PB = \frac{2}{3}BD$$

Perhatikan segitiga BCD

$$\begin{aligned} BD &= \sqrt{BC^2 - CD^2} \\ &= \sqrt{(2r)^2 - r^2} \\ &= \sqrt{3r^2} \\ &= r\sqrt{3} \end{aligned}$$

Panjang PB adalah  $PB = \frac{2}{3}BD = \frac{2}{3}r\sqrt{3} = \frac{2r}{\sqrt{3}}$

L1 dan L2 mempunyai titik pusat yang sama.

Misalkan jari-jari L1 adalah  $r_1$ , maka  $r_1 = PB - r = \frac{2r}{\sqrt{3}} - r = \frac{r(2 - \sqrt{3})}{\sqrt{3}}$

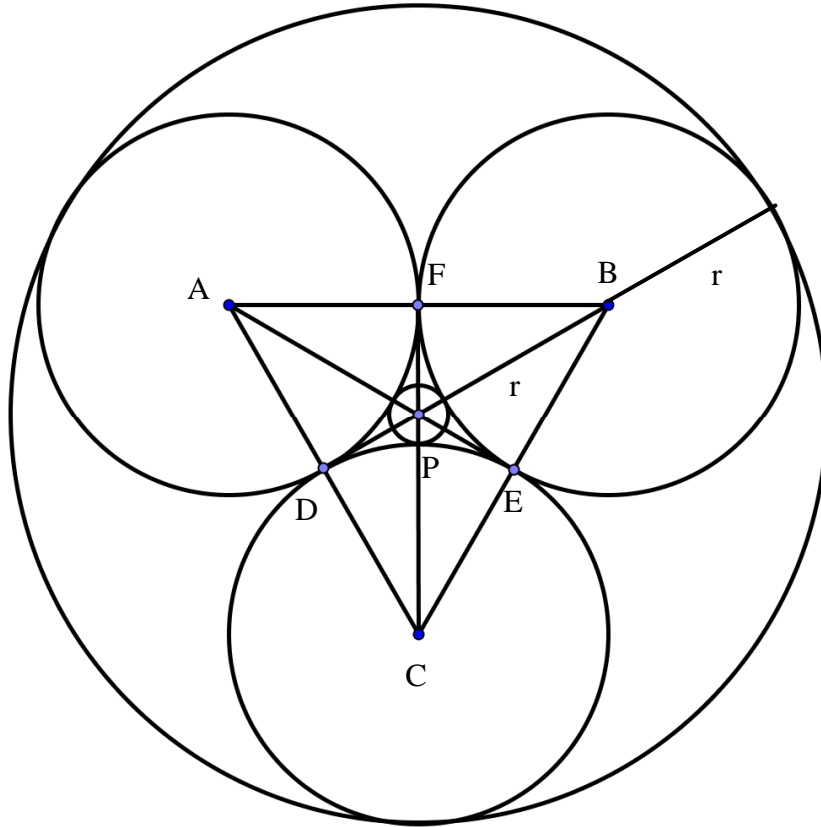
Misalkan jari-jari L2 adalah  $r_2$ , maka  $r_2 = PB + r = \frac{2r}{\sqrt{3}} + r = \frac{r(2 + \sqrt{3})}{\sqrt{3}}$

Perbandingan  $r_2$  dengan  $r_1$  adalah:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\frac{r(2 + \sqrt{3})}{\sqrt{3}}}{\frac{r(2 - \sqrt{3})}{\sqrt{3}}} = \frac{(2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})} = \frac{(2 + \sqrt{3}) / (2 - \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3}) / (2 - \sqrt{3})} = \frac{7 + 4\sqrt{3}}{1}$$

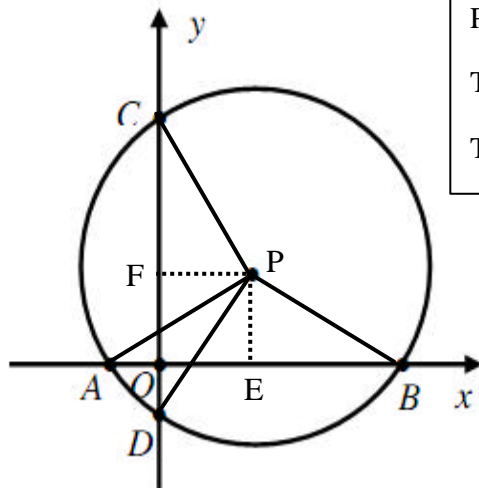
Jadi,  $r_2 : r_1 = (7 + 4\sqrt{3}) : 1$ .





80. Tentukan persamaan lingkaran yang memotong sumbu X dan sumbu Y, dimana panjang tali busurnya 20 dan 36, jari-jarinya  $5\sqrt{13}$  dan pusat berada pada kuadran pertama.

**Jawab:**



Petunjuk Soal:

Talibusur AB pada sumbu X, panjang 20

Talibusur CD pada sumbu Y, panjang 36

Karena  $AP = BP = r$ , maka garis tinggi EP pada segitiga ABP membagi AB menjadi 2 sama panjang,  $AB = 20$ ,  $AE = EB = 10$ , maka

$$EP = \sqrt{BP^2 - EB^2} = \sqrt{(5\sqrt{13})^2 - 10^2} = \sqrt{325 - 100} = \sqrt{225} = 15$$

Karena  $CP = DP = r$ , maka garis tinggi FP pada segitiga CDP membagi CD menjadi

2 sama panjang,  $CD = 36$ ,  $CF = FD = 18$ , maka

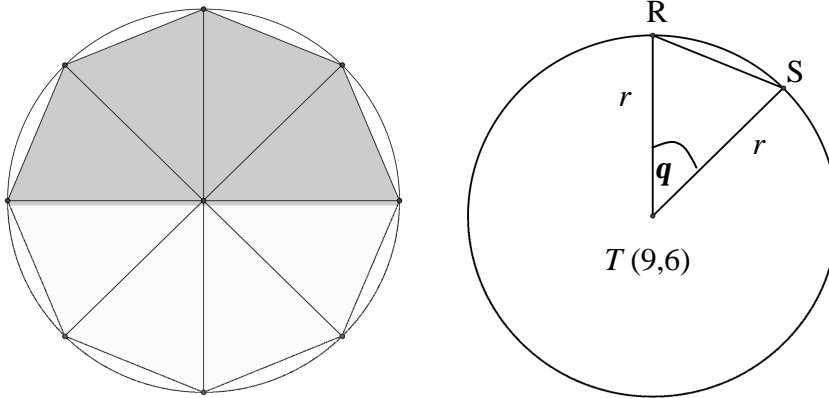
$$FP = \sqrt{DP^2 - DF^2} = \sqrt{(5\sqrt{13})^2 - 18^2} = \sqrt{325 - 324} = \sqrt{1} = 1$$

Sehingga titik pusat lingkaran adalah  $P(1, 15)$  dan persamaan lingkarannya:

$$\begin{aligned} (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 &\Rightarrow (x-1)^2 + (y-15)^2 = (5\sqrt{13})^2 \\ &\Rightarrow (x-1)^2 + (y-15)^2 = 325 \end{aligned}$$

81. Titik  $T(9,6)$  berjarak sama terhadap setiap titik sudut suatu segi-8 beraturan. Jika diketahui luas segi-8 beraturan tersebut adalah  $128\sqrt{3}$ , tentukan persamaan lingkaran luar pada bangun segi-8 tersebut!

**Jawab:**



Diketahui:

- Titik  $T(9,6)$  berjarak sama terhadap setiap titik sudut suatu segi-8, maka  $T$  adalah pusat segi-8 dan merupakan pusat lingkaran luar segi-8.
- Segi-8 beraturan dapat kita bagi menjadi 8 segitiga yang sama, misalnya kita ambil segitiga yaitu segitiga  $TRS$ .
- Besar sudut  $RTS$  adalah  $q = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$
- Luas segitiga  $TRS$  adalah  $L_{\Delta TRS} = \frac{L_{sg} - 8}{8} = \frac{128\sqrt{3}}{8} = 16\sqrt{3}$

Berdasarkan rumus luas segitiga, maka

$$L_{\Delta TRS} = \frac{1}{2} \cdot TR \cdot TS \cdot \sin q$$

$$\Rightarrow 16\sqrt{2} = \frac{1}{2} r^2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 16 = \frac{1}{4} r^2$$

$$\Rightarrow r^2 = 64$$

$$\Rightarrow r = 8$$

Persamaan lingkaran dengan pusat T(9, 6) dan jari-jari 8 adalah:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow (x - 9)^2 + (y - 6)^2 = 8^2$$

$$\Rightarrow (x - 9)^2 + (y - 6)^2 = 64$$

82. Tentukan tempat kedudukan titik  $P(3 + 2 \cos a, -1 + 2 \sin a)$ ;  $0 \leq a \leq 2\pi$

**Jawab:**

**Cara 1:**

$$P(3 + 2 \cos a, -1 + 2 \sin a)$$

Maka:

$$x = 3 + 2 \cos a \Rightarrow x - 3 = 2 \cos a \Rightarrow (x - 3)^2 = 4 \cos^2 a \dots\dots\dots(1)$$

$$y = -1 + 2 \sin a \Rightarrow y + 1 = 2 \sin a \Rightarrow (y + 1)^2 = 4 \sin^2 a \dots\dots\dots(2)$$

Tambahkan persamaan (1) dan persamaan (2)

$$\begin{array}{r} (x - 3)^2 = 4 \cos^2 a \\ (y + 1)^2 = 4 \sin^2 a \\ \hline (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4 \cos^2 a + 4 \sin^2 a \quad + \\ \Rightarrow (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4(\cos^2 a + \sin^2 a) \\ \Rightarrow (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4 \end{array}$$

Jadi, kedudukan titik P adalah sebuah lingkaran dengan persamaan:

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

**Cara 2:**

$$P(3 + 2 \cos a, -1 + 2 \sin a)$$

Misalkan,

$$a = 0 \Rightarrow P(3 + 2 \cos 0, -1 + 2 \sin 0) = P_1(5, -1)$$

$$a = \frac{p}{2} \Rightarrow P\left(3 + 2 \cos \frac{p}{2}, -1 + 2 \sin \frac{p}{2}\right) = P_2(3, 1)$$

$$a = p \Rightarrow P(3 + 2 \cos p, -1 + 2 \sin p) = P_3(1, -1)$$

$$a = \frac{3p}{2} \Rightarrow P\left(3 + 2 \cos \frac{3p}{2}, -1 + 2 \sin \frac{3p}{2}\right) = P_2(3, -3)$$

Persamaan umum lingkaran adalah  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

Cari persamaan lingkaran yang melalui tiga titik misalnya titik  $P_1, P_2,$  dan  $P_3$

$$P_1(5, -1) \Rightarrow 5^2 + (-1)^2 + 5A - B + C = 0 \Rightarrow 5A - B + C = -26 \dots\dots\dots(1)$$

$$P_2(3, 1) \Rightarrow 3^2 + 1^2 + 3A + B + C = 0 \Rightarrow 3A + B + C = -10 \dots\dots\dots(2)$$

$$P_3(1, -1) \Rightarrow 1^2 + (-1)^2 + A - B + C = 0 \Rightarrow A - B + C = -2 \dots\dots\dots(3)$$

Dari (1) dan (2)

Dari (2) dan (3)

$5A - B + C = -26$ $\underline{3A + B + C = -10} \quad +$ $8A + 2C = -36$ $\Rightarrow 4A + C = -18 \dots\dots(4)$	$3A + B + C = -10$ $\underline{A - B + C = -2} \quad +$ $4A + 2C = -12$ $\Rightarrow 2A + C = -6 \dots\dots(5)$
--	---

Dari (4) dan (5)

$$4A + C = -18$$

$$\underline{2A + C = -6} \quad -$$

$$2A = -12$$

$$\Rightarrow A = -6$$

Substitusi  $A = -6$  ke persamaan (5) :  $2A + C = -6 \Rightarrow 2(-6) + C = -6 \Rightarrow C = 6$

Substitusi  $A = -6$  dan  $C = 6$  ke persamaan (3):

$$A - B + C = -2 \Rightarrow -6 - B + 6 = -2 \Rightarrow -B = -2 \rightarrow B = 2$$

Jadi, persamaan lingkarannya adalah  $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$  atau

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4.$$

# Soal-soal Latihan

**Tentukan persamaan lingkaran dalam bentuk baku, dengan:**

1. Pusat (0, 0) dan jari-jari 5
2. Pusat (0, 0) dan jari-jari 13
3. Pusat (0, 0) dan jari-jari  $\sqrt{15}$
4. Pusat (0, 0) dan jari-jari 10
5. Pusat (0, 0) dan jari-jari 1

**Tentukan persamaan lingkaran dalam bentuk baku, dengan:**

6. Pusat (2, 3) dan jari-jari 7
7. Pusat (-5, 0) dan jari-jari 9
8. Pusat (0, 3) dan jari-jari 2
9. Pusat (6, 0) dan jari-jari  $\sqrt{10}$
10. Pusat (0, -7) dan jari-jari 3
11. Pusat (-4, -5) dan jari-jari 8
12. Pusat (-4, -4) dan jari-jari 4
13. Pusat (3, 3) dan jari-jari  $\sqrt{5}$
14. Pusat (1, 1) dan jari-jari  $\sqrt{2}$
15. Pusat (-12, 15) dan jari-jari 10

**Tentukan persamaan lingkaran dalam bentuk umum, dengan:**

16. Pusat (0, 0) dan jari-jari 4
17. Pusat (-3, -3) dan jari-jari  $\sqrt{3}$
18. Pusat (0, 7) dan jari-jari 7
19. Pusat (-6, 4) dan jari-jari 9
20. Pusat (5, 6) dan jari-jari 12

**Tentukan persamaan lingkaran yang melalui 3 titik berikut:**

21. A(0, -1), B(3, 0), dan C(2, 3)
22. A(1, 3), B(-3, -5), dan C(6, -2)
23. P(1, 0), Q(1, 2), dan R(2, 1)
24. K(2, 5), L(6, 1), dan M(2, 1)
25. A(5, 4), B(5, -2), dan C(10, 4)
26. U(3, 1), V(-2, 6), dan W(-5, -3)
27. A(3, -2), B(1, -4), dan C(4, 5)
28. P(2, 8), Q(7, 3), dan R(-2, 0)

29. P(6, -21), Q(10, -13), dan R(13, -22)
30. A(0, -1), B(2, 3), dan C(1, 6)

**Tentukan persamaan lingkaran dalam segitiga jika titik-titik sudutnya sebagai berikut:**

31. A(0, 0), B(4, 0) dan C(0, 3)
32. P(2, 1), Q(8, 1) dan R(2, 9)
33. R(3, 4), S(19, 4) dan T(11, 0)
34. A(-3, 1), B(3, -7) dan C(3, 1)
35. K(-1, 1), L(1, -2) dan M(3, 1)

**Tentukan persamaan lingkaran jika ujung-ujung diameternya adalah:**

36. U(1, 4), dan V(7, -7)
37. A(10, 4), dan B(-2, -2)
38. C(-3, 1), dan D(9, 5)
39. M(2, 4), dan N(6, 10)
40. P(2, 6), dan Q(-7, -2)
41. A(2, 1) dan B(-2, 3)

**Tentukan persamaan lingkaran jika diketahui:**

42. Pusat (2, 1) dan menyinggung garis  $3x - 2y - 10 = 0$
43. Pusat (3, 2) dan menyinggung garis  $2x + y = 3$
44. Pusat (-3, -5) dan menyinggung garis  $12x + 5y - 4 = 0$
45. Pusat (1, 4) dan menyinggung garis  $3x - 4y - 2 = 0$
46. Pusat (2, -3) dan menyinggung garis  $3x - 4y + 7 = 0$
47. Pusat (2, 1) dan menyinggung garis  $2x - 3y + 1 = 0$
48. Pusat (1, 6) dan menyinggung garis  $x - y - 1 = 0$
49. Pusat (-3, -5) dan menyinggung garis  $12x + 5y - 4 = 0$

50. Pusat (-1, 3) dan menyinggung garis  $x = 5$
51. Pusat (3, -1) dan menyinggung garis  $y = 6$
52. Pusat (6, 0) dan menyinggung garis  $x = 0$
53. Pusat (-1, -2) dan menyinggung garis  $y = x$
54. Pusat (-2, -3) dan menyinggung garis  $y = -7$
55. Pusat (0, -4) dan menyinggung garis  $y = 0$
56. Pusat (-2, 5) dan garis tangen  $x = 7$ .
57. Pusat (5, 1) dan menyinggung sumbu X.
58. Pusat (0, 4) dan menyinggung sumbu X
59. Pusat (3, -4) dan garis tangen sumbu Y.
60. Pusat (-5, 6) dan garis tangen sumbu X.
61. Pusat (-2, 5) dan melalui titik M(3, 4).
62. Pusat (1, 2) dan melalui titik A(3, -1).
63. Pusat (3, 1) dan melalui titik T(-1, -2).
64. Pusat (2, -6) dan melalui titik E(0, 0).
65. Pusat (-1, -5) dan melalui titik M(4, 4).
66. Pusat (0, 0) dan melalui titik A(6, 8).
67. Pusat (0, 0) dan melalui titik T(-3, -4).
68. Pusat (0, 4) dan melalui titik I(0, 9).
69. Pusat (5, 0) dan melalui titik K(10, 0)
70. Pusat (0, 7) dan melalui titik A(-1, 2).

**Jawablah soal-soal di bawah dengan benar!**

71. Jika lingkaran  $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$  melalui titik asal serta titik-titik (1, 3) dan (5, -5). Tentukan persamaan lingkaran tersebut.
72. Garis g memotong lingkaran L di titik (1, 2) dan B(-5, 10). Jika garis g membagi daerah lingkaran menjadi dua bagian yang sama, maka persamaan lingkaran L adalah ...
73. Diketahui empat garis dengan persamaan  $x = 2$ ,  $x = 8$ ,  $y = 3$ , dan  $y = 9$ . Persamaan lingkaran yang menyinggung keempat garis tersebut adalah...
74. Sisi-sisi persegi mempunyai persamaan:  $y = 8$ ,  $y = -8$ ,  $x = 8$ , dan  $x = -8$ . Tentukan persamaan dan gambar lingkaran: yang menyinggung sisi-sisi persegi, dan yang melalui keempat titik persegi.
75. Sisi-sisi persegi mempunyai persamaan:  $y = 4$ ,  $y = -4$ ,  $x = 4$ , dan  $x = -4$ . Tentukan persamaan dan gambar lingkaran: yang menyinggung sisi-sisi persegi, dan yang melalui keempat titik persegi.
76. Tentukan persamaan lingkaran yang menyinggung sumbu X di titik Q (-4, 0) dan melalui titik R(-5,  $3+2\sqrt{2}$ )
77. Suatu lingkaran menyinggung sumbu Y dan menyinggung garis  $3x + 4y = 0$  di titik (4, -3). Tentukan persamaan lingkaran tersebut.
78. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di (0, 0) dan melalui pusat lingkaran  $(x - 6)^2 + (y + 3)^2 = 15$ .
79. Tentukan persamaan lingkaran yang berjari-jari 2 dan menyinggung lingkaran  $x^2 + y^2 = 25$  di titik (-4, 3).
80. Diketahui  $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 6x + 5y - 13 = 0$  dan  $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 20x - 2y - 20 = 0$ . Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik potong kedua lingkaran tersebut dan melalui titik (5, 1).
81. Diketahui  $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 4x + 6y - 4 = 0$  dan  $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ . Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik potong kedua lingkaran tersebut dan menyinggung sumbu X.
82. Diketahui  $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$  dan  $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 10x - 16y + 40 = 0$ . Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik potong kedua lingkaran

tersebut dan titik pusatnya pada garis  $8x - 3y - 2 = 0$ .

83. Tentukan persamaan lingkaran yang sepusat (konsentris) dengan lingkaran  $x^2 + y^2 = 9$  dan jari-jarinya dua kali lingkaran tersebut!

84. Suatu lingkaran sepusat dengan lingkaran  $(x - 6)^2 + (y + 1)^2 = 16$  dan mempunyai jari-jari setengah jari-jari lingkaran tersebut. Tentukan persamaan lingkarannya!

85. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik  $(7, -8)$  dan  $(0, 9)$  dan pusatnya terletak pada garis  $x - 2y = 1$ .

#### Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran:

86.  $x^2 + y^2 = 2$

87.  $x^2 + y^2 = 2$

88.  $x^2 + y^2 = 16$

89.  $x^2 + y^2 = 10$

90.  $x^2 + y^2 = 100$

91.  $4x^2 + 4y^2 = 25$

92.  $5x^2 + 5y^2 = 50$

93.  $3x^2 + 3y^2 = 27$

94.  $x^2 + y^2 - 7 = 0$

95.  $x^2 + y^2 - 36 = 0$

96.  $x^2 + y^2 - 8 = 0$

97.  $x^2 + y^2 - 5 = 10$

98.  $x^2 + y^2 + 7 = 32$

99.  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$

100.  $(x - 5)^2 + (y + 7)^2 = 64$

101.  $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 18$

102.  $(x + 4)^2 + (y + 9)^2 = 20$

103.  $(x + 5)^2 + (y + 1)^2 - 5 = 0$

104.  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 81 = 0$

105.  $(x - 5)^2 + (y + 5)^2 - 25 = 0$

106.  $(x + 7)^2 + (y + 1)^2 - 30 = 5$

107.  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + 3 = 12$

108.  $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 11 = 0$

109.  $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$

110.  $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 4 = 0$

111.  $x^2 + y^2 + 8x + 2y - 1 = 0$

112.  $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 5 = 0$

113.  $x^2 + y^2 + 6x - 12y + 7 = 0$

114.  $x^2 + y^2 - 8x + 8y - 32 = 0$

115.  $x^2 + y^2 - 3x - 5y - 2 = 0$

116.  $x^2 + y^2 + 7x - y - 9 = 0$

117.  $x^2 + y^2 + x + 4y - 11 = 0$

118.  $x^2 + y^2 - x + y - \frac{7}{2} = 0$

119.  $x^2 + y^2 - 14x - 1 = 0$

120.  $x^2 + y^2 + 9x - \frac{3}{4} = 0$

121.  $x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0$

122.  $x^2 + y^2 - 5y + \frac{1}{4} = 0$

123.  $4x^2 + 4y^2 + 4x + 16y - 44 = 0$

124.  $3x^2 + 3y^2 + 24x - 9y - 72 = 0$

125.  $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 2x - 5y + 12 = 0$

126.  $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{3}{4}x - y = 0$

127.  $72x^2 + 72y^2 - 108x - 96y - 40 = 0$

#### Jawablah soal-soal di bawah dengan benar!

128. Panjang diameter lingkaran  $x^2 + y^2 + 7x - 3y - 10 = 0$  adalah...

129. Lingkaran  $x^2 + y^2 - 4x + 2y + p = 0$  dengan persamaan mempunyai jari-jari 3. Nilai  $p$  pada adalah ...

130. Diketahui lingkaran  $x^2 + y^2 + 4x + ky - 12 = 0$  melalui titik  $T(-2, 8)$ . Jari-jari lingkaran tersebut adalah...

131. Diketahui lingkaran  $x^2 + y^2 + px + 8y + 9 = 0$  menyinggung sumbu X. Pusat lingkaran adalah ...
132. Lingkaran berjari-jari 2 dan menyinggung garis  $3x + 4y - 2 = 0$ . Nilai  $p = \dots$
133. Lingkaran  $x^2 + y^2 - 4x + py + 25 = 0$  menyinggung sumbu Y, titik pusat lingkaran adalah ...
134. Tentukan kedudukan titik A(3, 5), B(2, -3), dan C(-1, 2) terhadap lingkaran  $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$
135. Tentukan titik-titik (minimal masing-masing 2 titik) yang terletak di dalam, pada, dan di luar lingkaran  $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0$  dan sebutkan alasannya.
136. Titik (1, b) terletak pada lingkaran  $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 24 = 0$ . Nilai b adalah ...
137. Tentukan  $m$  jika  $(-2, m)$  terletak pada lingkaran  $x^2 + y^2 = 13$
138. Tentukan  $n$  jika  $(n, n)$  terletak pada lingkaran  $x^2 + y^2 = 200$
139. Tentukan  $p$  jika  $(-p, 5)$  terletak pada lingkaran  $x^2 + y^2 = 41$
140. Tentukan  $p$  jika  $(-3, p)$  terletak pada lingkaran  $x^2 + y^2 = 25$
141. Tentukan  $a$  jika  $(2, a)$  terletak pada lingkaran  $x^2 + y^2 = 50$
142. Diketahui titik A(-3, 4) dan B(2, -1). Jika titik P(x, y) bergerak sedemikian sehingga memenuhi  $|AP| = \frac{1}{2}|BP|$ , maka tempat kedudukan titik P adalah...
143. Diketahui titik A(-2, 5) dan B(1, 2). Buktikan bahwa kedudukan titik P(x, y) sehingga  $2|AP| = 3|PB|$ , adalah berupa lingkaran. Kemudian tentukan pusat dan jari-jarinya!
144. Diketahui titik A(0, 8) dan B(0, 2). Jika titik P(x, y) bergerak sedemikian sehingga memenuhi  $|PA| = 2|PB|$ , maka tempat kedudukan titik P adalah....
145. Diketahui titik A(1, 2) dan B(9, 2) dimana AB diameter lingkaran. Tunjukkan tempat kedudukan titik T(x, y) sehingga  $TB = 3TA$  !
146. Diketahui titik A(2, -1) dan B(6, 2). Jika titik P(x, y) bergerak sedemikian sehingga memenuhi  $|AP|^2 = 2|BP|^2$ , maka tempat kedudukan titik P adalah....
147. Diketahui titik A(-2, 1) dan B(4, -3). Jika titik P(x, y) bergerak sedemikian sehingga memenuhi  $(PA)^2 + (PB)^2 = (AB)^2$ , maka tempat kedudukan titik P adalah....
148. Tentukan nilai  $k$  agar titik A(-4, k) terletak pada lingkaran  $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$
149. Tentukan nilai  $q$  agar titik B(q, 2) terletak di luar lingkaran  $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 20$
150. Tentukan letak titik S(x, y) terhadap titik P(-1, 7) dan Q(5, 1) sedemikian sehingga tempat kedudukan titik S terhadap P dan Q berbanding 2 : 1. (PS : PQ = 2 : 1)
151. Diketahui titik Q(-8, 9) dan R(-4, 3). Tempat kedudukan titik P sehingga besar  $\angle QPR = 90^\circ$
152. Diketahui garis  $x + 7y + 10 = 0$  dan lingkaran  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ . Tunjukkan bahwa garis memotong lingkaran dan tentukan kedua titik potongnya.



153. Diberikan lingkaran  $x^2 + y^2 = 4$  dan garis  $2x + y = k$ . tentukan batas-batas nilai  $k$  agar garis memotong lingkaran di dua titik.
154. Diketahui lingkaran berpusat di  $A(4, 3)$  dan melalui  $O(0, 0)$ . Titik tengah tali busur lingkaran  $PQ$  adalah  $M(2, 2)$ . Tentukan persamaan lingkaran dan koordinat titik  $P$  dan  $Q$ .
155. Diketahui lingkaran berpusat di  $A(2, 1)$  dan melalui  $O(0, 0)$ . Titik tengah tali busur lingkaran  $BC$  adalah  $M\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ . Tentukan persamaan lingkaran dan koordinat titik  $B$  dan  $C$ .
156. Diketahui lingkaran  $x^2 + y^2 + 10x + 4y + 9 = 0$  dan garis  $y = mx - 2$ . Tentukan nilai  $m$  agar garis: a. memotong lingkaran di dua titik, b. menyinggung lingkaran, c. tidak memotong lingkaran.
157. Diketahui lingkaran  $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 6 = 0$  dan garis  $y = -2x + k$ . Tentukan  $k$  agar garis: a. memotong lingkaran di dua titik, b. menyinggung lingkaran, c. tidak memotong lingkaran.
166.  $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$  di titik  $(5, 1)$
167.  $(x - 6)^2 + (y + 4)^2 = 2$  di titik  $(5, -3)$
168.  $x^2 + y^2 + 8x - 3y - 24 = 0$  di titik  $(2, 4)$
169.  $x^2 + y^2 - 6x - 10y - 2 = 0$  di titik  $(9, 5)$
170.  $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 4 = 0$  di titik  $(2, 6)$
171.  $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 45$  di titik  $(4, 5)$
172.  $3x^2 + 3y^2 - 6x - 9y = 3$  di titik  $(-1, 2)$
173.  $x^2 + y^2 + 4x - 21 = 0$  di titik  $(-5, 4)$
174.  $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$  di titik  $(1, 1)$

**Carilah titik potong antara garis dengan lingkaran (jika ada) untuk kasus-kasus berikut:**

175.  $y = 2x$  dan  $x^2 + y^2 = 80$
176.  $y = 3x$  dan  $x^2 + y^2 = 100$
177. sumbu  $X$  dan lingkaran  $x^2 + y^2 - 8x - 14y + 15 = 0$
178. sumbu  $Y$  dan lingkaran  $x^2 + y^2 - 12x - 16 = 0$
179.  $4x + 6y = 50$  dan  $x^2 + y^2 = 25$
180.  $y = x + 1$  dan  $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 100$
181.  $y = 2x + 8$  dan lingkaran  $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0$
182.  $x + y = -2$  dan lingkaran  $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$
183.  $x - 3y - 33 = 0$  dan lingkaran  $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 23 = 0$

**Tentukan persamaan garis singgung lingkaran:**

**Tentukan persamaan garis singgung lingkaran berikut pada titik yang ditentukan:**

158.  $x^2 + y^2 = 10$  di titik  $(-3, 1)$
159.  $x^2 + y^2 = 100$  di titik  $(-6, -8)$
160.  $x^2 + y^2 = 25$  di titik  $(3, -4)$
161.  $x^2 + y^2 = 13$  di titik  $(-2, 3)$
162.  $x^2 + y^2 = 37$  di titik  $(1, 6)$
163.  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$  di titik  $(2, 6)$
164.  $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 100$  di titik  $(-5, 4)$
165.  $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 20$  di titik  $(1, 0)$

184.  $x^2 + y^2 = 25$  yang bergradien  $\frac{4}{3}$
185.  $x^2 + y^2 = 4$  yang bergradien  $-2\sqrt{2}$
186.  $x^2 + y^2 = 5$  yang bergradien  $-3$

187.  $x^2 + y^2 = 9$  yang bergradien  $\sqrt{15}$
188.  $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$  yg bergradien  $\sqrt{2}$
189.  $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 10$  bergradien  $-3$
190.  $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 20$  yg bergradien  $2$
191.  $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$  yang bergradien  $-\frac{4}{3}$
192.  $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$  yang bergradien  $\frac{1}{2}$
193.  $x^2 + y^2 = 36$  yang sejajar dengan garis  $2y - x - 7 = 0$
194.  $x^2 + y^2 = 8$  yang sejajar dengan garis  $2x - y + 2 = 0$
195.  $x^2 + y^2 = 5$  yang sejajar dengan garis  $2x - y = 17$
196.  $x^2 + y^2 = 16$  yang sejajar dengan garis  $3x + 4y + 2 = 0$
197.  $x^2 + y^2 = 49$  yang tegaklurus dengan garis  $x + 2y + 7 = 0$
198.  $x^2 + y^2 = 25$  yang tegaklurus dengan garis  $4x - 3y = 6$
199.  $x^2 + y^2 = 4$  yang sejajar dengan garis  $x + y + 2 = 0$
200.  $x^2 + y^2 - 25 = 0$  yang tegaklurus dengan garis  $x - 2y + 2 = 0$
201.  $x^2 + y^2 = 36$  yang tegaklurus dengan garis  $6x + 12y - 12 = 0$
202.  $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 81$  yang tegaklurus dengan garis  $x - 3y + 11 = 0$
203.  $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 11 = 0$  yang membentuk sudut  $135$  derajat terhadap sumbu X positif.
204.  $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$  yang membentuk sudut  $60$  derajat terhadap sumbu X positif.
205.  $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$  yang membentuk sudut  $45$  derajat terhadap sumbu X positif.
206.  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$  yang tegaklurus dengan garis  $3x - 4y - 5 = 0$
207.  $x^2 + y^2 - 4x + 10y - 7 = 0$  yang sejajar dengan garis  $2x - y = 5$
208.  $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$  yang sejajar dengan garis  $4x - 2y + 7 = 0$

**Tentukan persamaan garis singgung lingkaran berikut pada titik yang ditentukan:**

209.  $x^2 + y^2 = 10$  melalui titik  $(4, 2)$
210.  $x^2 + y^2 = 9$  melalui titik  $(0, 5)$
211.  $x^2 + y^2 = 25$  melalui titik  $(7, 1)$
212.  $x^2 + y^2 = 36$  melalui titik  $(8, 1)$
213.  $x^2 + y^2 = 5$  melalui titik  $(4, -3)$
214.  $x^2 + y^2 = 8$  melalui titik  $(-2, 6)$
215.  $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 10$  dari titik  $(-4, 2)$
216.  $(x+3)^2 + (y-5)^2 = 25$  dari titik  $(6, 0)$
217.  $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$  dari titik  $(0, 0)$
218.  $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 25$  dari titik  $(-2, 5)$
219.  $(x+8)^2 + (y+6)^2 = 36$  dari titik  $(-6, 1)$
220.  $x^2 + y^2 - 20y + 60 = 0$  dari titik  $(-3, -1)$
221.  $x^2 + y^2 + 20y + 20 = 0$  dari titik  $(8, -6)$
222.  $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 20 = 0$  dari  $T(0, 0)$

223.  $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$  dari T(0, -3)
224.  $x^2 + y^2 + 10 - 8y + 36 = 0$  dari T(-1, 1)

**Jawablah soal-soal di bawah dengan benar!**

225. Persamaan garis singgung lingkaran  $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 13$  di titik yang berabsis -1 adalah ...
226. Persamaan garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 = 169$  di titik yang berabsis -5 adalah ...
227. Persamaan garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 = 450$  di titik yang berordinat 15 adalah ...
228. Garis  $x = 15$  memotong lingkaran  $x^2 + y^2 = 289$  di titik P dan Q. Tentukan persamaan garis singgung pada masing-masing titik tersebut!
229. Garis  $x = 5$  memotong lingkaran  $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$  di dua titik. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran melalui kedua titik tersebut!
230. Persamaan garis singgung pada lingkaran  $x^2 + y^2 = 100$  di titik (8, -6) menyinggung lingkaran dengan pusat (4, -8) dan jari-jari r. Nilai r adalah ...
231. Garis  $x + y + c = 0$  menyinggung lingkaran  $x^2 + y^2 = 9$ . Nilai c = ...
232. Gradien garis singgung di titik (1, 2) pada lingkaran  $x^2 + y^2 = 5$  adalah ...

**Jawablah soal-soal di bawah dengan benar!**

233. Garis yang ditarik dari titik A(1, -2) menyinggung lingkaran

$x^2 + y^2 + 3x - 4y = 0$  di titik B.

Panjang garis AB adalah ...

234. Garis  $x - 2y = 5$  memotong lingkaran  $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 10 = 0$  di titik A dan B. Berapakah luas lingkaran yang dibentuk titik A, B, dan Pusat lingkaran?
235. Buktikan bahwa sumbu Y adalah garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 - (2a \cos q)x - (2a \sin q)y + a^2 \sin^2 q = 0$  (BSE)
236. Berapakah jarak terdekat dan terjauh titik (-7, 2) terhadap lingkaran dengan persamaan  $x^2 + y^2 + 10x + 14y - 151 = 0$
237. Tentukan nilai p yang mungkin dan tentukan titik singgungnya jika garis dengan persamaan  $3x + y = p$  menyinggung lingkaran  $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 15 = 0$
238. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di P(-3, -5) dan menyinggung garis  $12x + 5y - 4 = 0$
239. Tentukan persamaan garis singgung persekutuan dalam antara lingkaran  $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$  dan  $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 4$ .
240. Tentukan persamaan garis singgung persekutuan dalam antara lingkaran  $(x+6)^2 + (y-3)^2 = 16$  dan  $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$ .
241. Tentukan persamaan garis singgung persekutuan luar antara lingkaran  $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$  dan  $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 4$ .
242. Tentukan persamaan garis singgung persekutuan luar antara lingkaran  $(x+6)^2 + (y-3)^2 = 16$  dan  $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$ .

243. Tentukan persamaan garis singgung persekutuan luar antara lingkaran  
 $(x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 25$  dan  
 $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$ .
244. Tentukan persamaan garis singgung persekutuan luar dan persekutuan dalam antara lingkaran  
 $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 11 = 0$  dan  
 $x^2 + y^2 + 12x + 6y + 5 = 0$ .

**Tentukan kedudukan antara dua lingkaran berikut:**

245.  $x^2 + y^2 = 4$  dan  $x^2 + y^2 = 9$ .
246.  $x^2 + y^2 + 2x + 6y - 26 = 0$  dan  
 $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$ .
247.  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$  dan  
 $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 16$ .
248.  $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 13$  dan  
 $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 13$ .
249.  $(x + 6)^2 + (y - 1)^2 = 16$  dan  
 $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 9$ .
250.  $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 17 = 0$  dan  
 $x^2 + y^2 + 8x - 22y - 7 = 0$ .