

TRIGONOMETRI

Konversi Sudut

$$1^\circ = \frac{1}{360} \text{putaran} = \frac{\pi}{180} \text{rad} = 60 \text{ menit } (60') = 3600 \text{ detik } (3600'')$$

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{1}{2\pi} \text{ putaran}$$

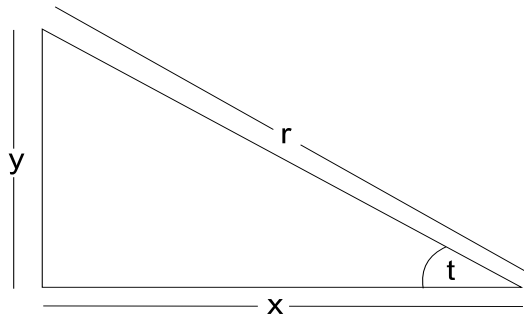
ket : yang didalam kurung merupakan cara penulisan

Perbandingan Geometri

$$\sin t = \frac{y}{r} \quad \operatorname{cosec} t = \frac{r}{y}$$

$$\cos t = \frac{x}{r} \quad \sec t = \frac{r}{x}$$

$$\tan t = \frac{y}{x} \quad \cot t = \frac{x}{y}$$



Sifat-sifat dari perbandingan trigonometri

$$\operatorname{cosec} t = \frac{1}{\sin t} \quad \sec t = \frac{1}{\cos t} \quad \cot t = \frac{1}{\tan t} \quad \tan t = \frac{\sin t}{\cos t} \quad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

Invers Fungsi Trigonometri

Jika $\cos x = a$, maka inversnya adalah

$x = \operatorname{arc} \cos a$. Begitu juga perbandingan trigonometri lainnya, inversnya dilambangkan menjadi $\operatorname{arc} \sin, \operatorname{arc} \tan, \operatorname{arc} \sec, \operatorname{arc} \cot, \operatorname{arc} \operatorname{cosec}$.

Adapun lambang lain dari invers adalah :

$\cos^{-1}, \sin^{-1}, \tan^{-1}, \cot^{-1}, \sec^{-1}, \operatorname{cosec}^{-1}$ {tapi hati2 dengan tanda ini, karena bisa saja berarti emang tanda pangkat, contohnya $\tan^{-1} = \frac{1}{\tan}$, jadi untuk tanda yang seperti ini mesti sesuai dengan soal, apakah itu tanda invers, atau tanda pangkat}

Nilai perbandingan geometri untuk sudut khusus

| | Besar sudut t | | | | |
|----------|-----------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------|
| | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° |
| $\sin t$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | 1 |
| $\cos t$ | 1 | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\tan t$ | 0 | $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | - |

Trigonometri di bidang kartesius

Dibidang kartesius Sudut yang dibentuk segitiga adalah sudut antara sisi miring segitiga siku-siku ke sumbu x positif. Tinggi segitiga merupakan ordinat y , alas segitiga merupakan absis x , dan panjang sisi miring segitiga merupakan r .

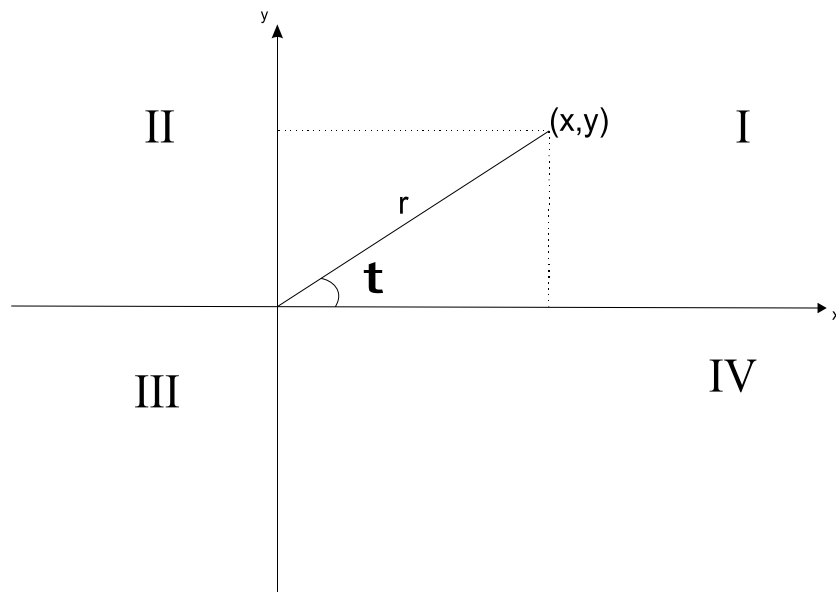
Daerah yang ditandai dengan angka romawi merupakan daerah kuadran I,II, III, dan IV

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Tanda positif-negatif perbandingan trigonometri

tergantung daerah kuadrannya. Contoh sudut 120°

Merupakan daerah kuadran II, di daerah itu, nilai x negatif, y positif, dan nilai r selalu positif disemua kuadran. Jadi nilai $\sin 120^\circ = \frac{y}{r}$ bernilai positif, sedangkan $\cos 120^\circ = \frac{x}{r}$ dan $\tan 120^\circ = \frac{y}{x}$ bernilai negatif.



| | Tanda di daerah kuadran (-/+) | | | |
|----------|-------------------------------|-----------|------------|-----------|
| | <i>I</i> | <i>II</i> | <i>III</i> | <i>IV</i> |
| $\sin t$ | + | + | - | - |
| $\cos t$ | + | - | - | + |
| $\tan t$ | + | - | + | - |

Sudut-sudut yang berelasi

$$\sin -\alpha = -\sin \alpha \quad \cos -\alpha = \cos \alpha \quad \tan -\alpha = -\tan \alpha$$

$\sin(k \cdot 360^\circ + \alpha) = \sin \alpha$ $\cos(k \cdot 360^\circ + \alpha) = \cos \alpha$ $\tan(k \cdot 360^\circ + \alpha) = \tan \alpha$, untuk setiap k bilangan bulat

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad \tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha \quad \cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \quad \tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha \quad \cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha \quad \tan(180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$$

$\sin(k \cdot 360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$ $\cos(k \cdot 360^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ $\tan(k \cdot 360^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$, untuk setiap k anggota bilangan bulat

Contoh

$$\cos 120^\circ = \cos(180 - 60)^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

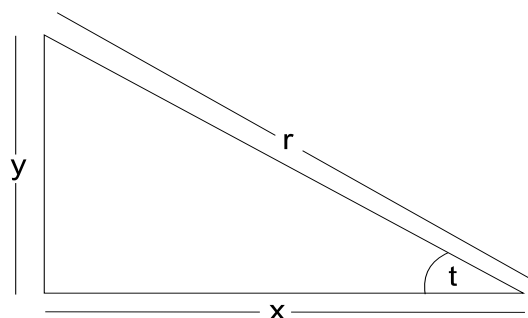
$$\tan 1100^\circ = \tan(3 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Identitas Trigonometri Dasar

$$a) \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

Bukti :

$$\sin t = \frac{y}{r}, \quad \sin^2 t = \frac{y^2}{r^2}$$



$$\cos t = \frac{x}{r}, \cos^2 t = \frac{x^2}{r^2}$$

$$\sin^2 t + \cos^2 t = \frac{x^2 + y^2}{r^2}$$

Berdasarkan dalil Phytagoras $x^2 + y^2 = r^2$ sehingga

$$\sin^2 t + \cos^2 t = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

b) $1 + \tan^2 t = \sec^2 t$

c) $1 + \cot^2 t = \operatorname{cosec}^2 t$ {untuk 2 sifat lainnya silahkan dibuktikan sebagai bahan latihan}

Rumus Trigonometri

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

{modifikasi rumus ini untuk mendapatkan nilai sudut $2a$ dan $\frac{a}{2}$ untuk setiap perbandingan trigonometri}

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \cos(a + b) + \frac{1}{2} \cos(a - b)$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} \cos(a - b) - \frac{1}{2} \cos(a + b)$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} \sin(a + b) + \frac{1}{2} \sin(a - b)$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a + b}{2} \cos \frac{a - b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a + b}{2} \sin \frac{a - b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a + b}{2} \cos \frac{a - b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a + b}{2} \sin \frac{a - b}{2}$$

$$\tan a + \tan b = \frac{2 \sin(a + b)}{\cos(a + b) + \cos(a - b)}$$

$$\tan a + \tan b = \frac{2 \sin(a - b)}{\cos(a + b) + \cos(a - b)}$$

{buktikan kedelapan rumus diatas dari rumus jumlah dan selisih sudut trigonometri sebelumnya}

Contoh : Tentukan nilai $\sin 15^\circ$

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

Basic Problems

1. Tentukan nilai ($\cos, \sin, \tan, \cot, \sec, \operatorname{cosec}$) untuk nilai sudut 435°
2. Buktikan identitas trigonometri berikut
 - a. $4 \sin 2x \cos 2x \cos x = \sin 5x + \sin 3x$
 - b. $\frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{(1 + \cos 2x)}{\cos x}$
 - c. $\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \frac{\tan a + \tan b}{\tan a - \tan b}$
3. Tentukan nilai dari $\cos \frac{\pi}{2} \cos -\frac{7\pi}{2} + \sin -\frac{7\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}$
4. Jika $\tan x \tan y = 25$ dan $\cot x + \cot y = 30$, maka nilai $\tan(x + y)$ adalah.

Advanced Problems

1. Buktikan $a \cos x + b \sin x = k \cos(x - \alpha)$, dimana $k = \sqrt{a^2 + b^2}$ dan $\alpha = \operatorname{arc} \tan \frac{b}{a}$
2. Nilai x yang memenuhi $0 \leq x \leq \pi$ dan dan

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)} = 2^{2010} \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \dots \cos\left(\frac{\pi}{2010}\right)$$

3. Jika $x_1, x_2, \dots, x_{2011}$ bilangan real, maka nilai terkecil dari

$$\cos x_1 \sin x_2 + \cos x_2 \sin x_3 + \dots + \cos x_{2011} \sin x_1$$

adalah...

4. Misalkan $f(y) = (\sqrt{3} + 1) \sin y + ((\sqrt{3} - 1) \cos y)$. Nilai maksimum untuk $(f(y))^2$ dimana y adalah bilangan real adalah...