Teori Bilangan Dasar

GCD

Untuk setiap bilangan asli k kita nyatakan D_k adalah himpunan seluruh factor positif dari k. Untuk bilangan asli m dan n, bilangan terbesar dalam $D_m \cap D_n$ kita katakan sebagai Faktor persekutuan terbesar (FPB) atau *Great Common Divisor (GCD)* yang dituliskan sebagai $\gcd(m,n)$. Jika kita punya $\gcd(m,n) = 1$ kita katakana bilangan m dan n relative prima atau koprima. Beberapa sifat dasar dari GCD adalah :

a. Jika p adalah bilangan prima, maka $\gcd(p,m)$=p atau $\gcd(p,m) = 1$, untuk setiap bilangan asli m.
b. Jika $d = \gcd(m,n)$, dengan $m = dm'$, dan $n = dn'$. Maka $\gcd(m',n') = 1$
c. Jika $d = \gcd(m,n)$. Dan kita punya $m = d'm"$, $n = d'n"$. $\gcd(m,\mathrm{n}) = 1$, maka $d' = d$
d. Jika $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ dan $m = p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}$, $\alpha_i, \beta_1 \geq 0, i = 1, \dots, k$ maka $\gcd(m,n) = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} \dots p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)}$
e. Jika $m = nq + r$, maka $\gcd(m,n) = \gcd(n,r)$. m, n, q, r anggota bilangan bulat
f. $\gcd(\gcd(m,n)\,, p) = \gcd(m, \gcd(n,p))$
g. Jika $d|a_i, i = 1,2, \dots, s$ maka $d|\gcd(a_1, a_2, \dots, a_s)$

LCM.

Untuk setiap bilangan asli k kita nyatakan M_k adalah himpunan seluruh kelipatan dari k. Untuk bilangan asli s dan t, bilangan terkecil dalam himpunan $M_s \cap M_t$ kita katakan sebagai Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK) atau *Least Common Multiple* dari s dan t dan kita nyatakan sebagai $lcm(s,t)$. Beberapa sifat dari LCM :

a. Jika $lcm(s,t) = m, m = s.s' = t.t'$. Maka $\gcd(s',t') = 1$
b. Jika m' adalah kelipatan bersama dari s dan t dan $m' = ss' = tt', \gcd(s',t') = 1$. Maka $m' = m$
c. Jika m' adalah kelipatan bersama dari s dan t, maka $m|m'$
d. Jika $m|s$ dan $n|s$, maka $lcm(m,n)|s$
e. Jika n adalah bilangan bulat, maka $n.\left(lcm(s,t)\right) = lcm(ns,nt)$
f. Jika $s = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ dan $t = p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}$, $\alpha_i, \beta_1 \geq 0, i = 1, \dots, k$ maka $\mathrm{lcm}(m,n) = p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} \dots p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)}$

Problem

1. Buktikan bahwa untuk sebarang bilangan asli m, n makan $\gcd(m,n)\,.\,\mathrm{lcm}(m,n) = m.n$

Algoritma Euclidian

Algoritma Euclidian adalah salah satu faktorisasi resmi yang dapat membantu kita menentukan GCD dan dipakai pada persamaan diophantine. Algoritma ini mengandung aplikasi berulang dari algoritma pembagian :

$$m = nq_1 + r_1,\ \ 1 \leq r_1 < n$$

$$n = r_1 q_2 + r_2,\ \ 1 \leq r_2 < r_1$$

.

.

$$r_{k-2} = r_{k-1} q_k + r_k,\ \ \ 1 \leq r_k < r_{k-1}$$

$$r_{k-1} = r_k q_{k+1} + r_{k+1},\ \ \ r_{k+1} = 0$$

Algoritma ini pasti terbatas karena $n > r_1 > r_2 > \cdots > r_k$

Sisa yang tidak nol dari algortima yaitu r_k adalah pembagi terbesar antara m dan n.

$$\gcd(m, n) = \gcd(n, r_1) = \gcd(r_1, r_2) = \cdots = \gcd(r_{k-1}, r_k) = r_k$$

Problem

1. Coba Gunakan algoritma Euclidian untuk mencari $\gcd(348{,}246)$

Algoritma Stein (Binary GCD Algorithm)

Algoritma ini ditemukan oleh Josef Stein tahun 1961

Kelebihan : Tidak memerlukan perhitungan yang kompleks dibandingkan algoritma Euclidian.

Kekurangan : tidak dapat dipakai dalam identitas Bezout / persamaan Diophantine Linear

Dalam algoritma ini dipakai indentitas berikut ini :

- $\gcd(0, v) = v$
- Jika u, v keduanya genap maka $\gcd(u, v) = 2. \gcd(\frac{u}{2}, \frac{v}{2})$
- Jika satu ganjil misal u dan satu genap misal v. Maka $\gcd(u, v) = \gcd(u, \frac{v}{2})$
- Jika u, v dua-duanya ganjil, dan $u \geq v$ maka $\gcd(u, v) = \gcd(\frac{u-v}{2}, u)$

Contoh : Tentukan $\gcd(1353{,}1716)$ dengan menggunakan algoritma Stein

Jawab:

$$\begin{aligned}\gcd(1353,1716) &= \gcd(1353,858) = \gcd(1353,429) = \gcd(462,429) = \gcd(231,429) \\ &= \gcd(231,99) = \gcd(66,99) = \gcd(33,99) = \gcd(33,33) = 33\end{aligned}$$

Identitas Bezout

Teorema : Untuk setiap bilangan asli m dan n ada bilangan bulat x dan y sehingga

$$mx + ny = \gcd(m,n)$$

Bukti :

Dari algoritma Euclidian kita dapat

$$r_1 = m - nq_1,\ \ r_2 = n - r_1q_2 = -mq_2 + n(1 + q_1q_2) \quad , \dots ..$$

Secara general jika kita lanjutkan $r_i = m\alpha_i + n\beta_i$ sehingga kita dapat $r_k = m\alpha_k + n\beta_k$, karena $r_k = \gcd(m,n)$. Maka terbukti ada x, y bilangan bulat yang memenuhi $mx + ny = \gcd(m,n)$

Persamaan Diophantine Linear

Persamaan Diophantine linear bentuk umumnya yaitu : $ax + by = c$, dengan a, b, c adalah konstanta bilangan bulat positif. Contohnya $2x + 3y = 76$

Dari Identitas Bezout kita dapat bahwa persamaan diophantin linear punya solusi x, y bilangan bulat jika $\gcd(a,b)\,|c$.

Contoh : $6x + 15y = 20$ tidak punya penyelesaian x, y bilangan bulat karena $\gcd(6,15) = 3$ tidak habis membagi 20. Persamaan $6x + 7y = 19$ punya penyelesaian x, y bulat karena $\gcd(6,7) = 1$ habis membagi 19

Langkah-langkah menyelesaikan Persamaan Diophantine Linear :

Contoh : Tentukan banyaknya pasangan x, y bilangan bulat positif yang memenuhi $4x + 15y = 78$

Solusi :

Kita gunakan Algoritma Euclidian

$15 = 4 \times 3 + 3$

$4 = 3 \times 1 + 1$

$3 = 3 \times 1 + 0$

$\gcd(4{,}15) = 1$.Karena $1|78$ maka persamaan ini punya solusi bulat. Kemudian algoritma Euclidian ini kita balik untuk menyelesaikan persamaan dhiophantine

$3 = 15 - 4 \times 3$

$1 = 4 - 3 \times 1 = 4 - (15 - 4 \times 3) = -1 \times 15 + 4 \times 4$

Kita kalikan kedua ruas dengan 78, kita dapat solusi umumnya yaitu :

$78 = -78 \times 15 + 312 \times 4$. Solusi umum $(x_0, y_0) = (312, -78)$

Bentuk persamaan $4x + 15y = 78$ adalah bentuk persamaan garis pada bidang kartesius dengan gradient garis $= -\frac{4}{15}$.

Jadi untuk nilai (x, y) yang lain $\frac{y-y_0}{x-x_0} = -\frac{4}{15} = \frac{y+78}{x-312}$

Jadi kita bisa ambil sebarang bilangan bulat k sehingga $y + 78 = -4k$ dan $x - 312 = 15k$

$x = 312 + 15k, \qquad y = -78 - 4k$

Karena merupakan pasangan bilangan bulat maka $x \geq 0$ dan $y \geq 0$

$312 + 15k > 0, \qquad k > -\dfrac{312}{15}$

$-78 - 4k > 0, \qquad k < -\dfrac{78}{4}$

$$-\frac{312}{15} > k > -\frac{78}{4}$$

Banyaknya bilangan bulat k yang memenuhi ketaksamaan adalah hanya ada 1, yaitu -20

Jadi banyak pasangan bilangan bulat positif (x, y) yang memenuhi ada sebanyak 1

Problems

1. Pasangan bilangan asli (x, y) yang memenuhi $2x + 5y = 2010$ ada sebanyak …
2. Tentukan banyaknya pasangan bilangan bulat positif (m, n) yang memenuhi $3m + 7n = 2011$