

KOMBINATORIKA SEDERHANA

Kaidah Penjumlahan

Misal suatu peristiwa dapat terjadi dalam n cara yang berlainan (saling asing). Dalam cara pertama terdapat p_1 kemungkinan hasil yang berbeda. Cara kedua memberikan p_2 kemungkinan yang berbeda dan seterusnya sampai cara ke- n yang memberikan p_n kemungkinan yang berbeda. Maka total kejadian adalah sebanyak $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n$ cara.

Contoh :

Dari kota A ke kota B jika menggunakan pesawat ada 3 rute penerbangan, jika menggunakan kapal ada 4 rute. Maka total cara dari kota A ke kota B ada sebanyak $3 + 4 = 7$ cara

Kaidah Perkalian

Apabila peristiwa terdiri dari n tahap kejadian yang berurutan dimana pada tahap pertama ada q_1 cara, tahap 2 q_2 cara, seterusnya sampai pada tahap n ada q_n cara. Maka total kejadian ada $q_1 \times q_2 \times \dots \times q_n$ cara

Contoh :

Jika ingin ke kota B dari kota A mesti melalui kota C . Rute penerbangan dari kota A ke C ada 3. Dan jalur darat dari C ke B ada 6. Maka banyaknya cara dari kota A ke kota B ada $3 \times 6 = 18$ cara

Notasi Faktorial

Notasi faktorial banyak digunakan dalam kombinatorik. Di lambangkan dengan tanda "!".

Dengan $n! = n \cdot (n - 1)(n - 2) \dots 1$. Dengan n adalah bilangan asli. Didefinisikan $0! = 1$. (definisi tidak dibuktikan).

Perhatikan $n! = n \cdot (n - 1)(n - 2) \dots 1 = n \cdot (n - 1)!$

Contoh : $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Permutasi

Permutasi dari sekumpulan objek adalah banyaknya susunan objek berbeda dengan memperhatikan urutan tanpa ada objek yang diulang.

Notasi Permutasi k objek dari n objek adalah P_k^n atau ${}_n P_k$, atau $P(n, k)$. Dengan $k \leq n$.

$$P_k^n = \frac{n!}{(n - k)!}$$

Jika yang disusun adalah n objek dari n objek maka : $P_n^n = n!$

Jika pada n objek tersebut ada beberapa objek yang sama, contoh jika ada objek q_1 sebanyak n_1 , objek q_2 sebanyak n_2 , ..., dan objek q_k sebanyak n_k . Dengan $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Maka permutasi n objeknya adalah :

$$P_n^n = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Cara Penggunaan:

- a. Berapa banyak cara menyusun kata KASUR ?

Solusi :

$$P_5^5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

- b. Berapa banyak susunan 3 angka yang diambil dari $\{1,2,3,6,7,8,9\}$?

Solusi :

$$P_3^7 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

- c. Hitunglah banyak susunan dari kata MATEMATIKA !

Solusi :

Ada 2 huruf M, 3 huruf A, 2 huruf T huruf. Banyaknya cara :

$$P = \frac{10!}{2! 3! 2!} = 151200$$

Permutasi Siklik

Permutasi siklik adalah ketika susunan objek dilakukan secara siklik, atau memutar. Notasi ${}_n P_{siklik}$

$${}_n P_{siklik} = (n - 1)!$$

Contoh :

Budi, Andi, Anton, Dika, Erik akan duduk meja berbentuk lingkaran. Berapa banyak susunan cara mereka duduk?

$${}_5 P_{siklik} = (5 - 1)! = 4! = 24$$

Kombinasi

Kombinasi dari sekumpulan objek adalah banyaknya susunan objek tanpa memperhatikan urutan objek dari objek-objek Tertentu.

Notasi dari Kombinasi k objek dari n objek adalah C_k^n atau $\binom{n}{k}$

$$C_k^n = \frac{n!}{k! (n - k)!}$$

Contoh

Bagaimana cara memilih 3 delegasi sekolah dari 14 orang murid?

Solusi :

Karena delegasi tidak memperhatikan urutan maka kita menggunakan kombinasi . Banyaknya cara
 $=C_3^{14} = \frac{14!}{3!(11)!} = \frac{14 \times 13 \times 12}{3 \times 2 \times 1} = 364$

Binom Newton

Binom newton adalah cara untuk penjabaran bentuk $(a + b)^n$ dengan n adalah bilangan asli. Sehingga kita bisa mengetahui koefisien dari setiap sukunya.

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

Contoh :

Tentukan koefisien x^2 dari $(1 - x)^{100}$!

Solusi :

Pada bentuk $(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$. Kita dapat $a = 1, b = -x, n = 100$

Koefisien x^2 didapat ketika $i = 2$. $\binom{100}{2} 1^{98} \cdot (-x)^2 = 4950x^2$. Jadi koefisiennya =4950

Peluang

Peluang suatu sampel yang kita inginkan dari suatu kejadian terjadi perbandingan banyaknya peluang sampel tersebut terjadi dengan total seluruh kejadian terjadi .

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

$P(E)$ = peluang E muncul, $n(E)$ = banyaknya kemungkinan E muncul. $n(S)$ =banyaknya seluruh kejadian muncul. $0 \leq P(E) \leq 1$

Nilainya sama dengan nol berarti kejadian itu tidak mungkin terjadi, kalau satu berarti kejadian itu pasti terjadi.

Contoh :

Dalam sebuah pelemparan dadu, tentukan peluang munculnya mata dadu prima !

Solusi :

Banyaknya kemungkinan mata dadu prima ada 3 yaitu $\{2,3,5\}$. Banyaknya seluruh kemungkinan mata dadu adalah 6 yaitu $\{1,2,3,4,5,6\}$. Jadi peluangnya $=\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Komplemen suatu Kejadian

Komplemen dari kejadian E adalah kejadian tidak terjadinya kejadian E , atau bisa dibidang sebagai lawannya. Biasanya ditulis dengan lambang E^c atau E'

$$P(E') = 1 - P(E)$$

Soal Dasar

1. Dari Jakarta ke Bandung terdapat enam rute jalan, sedangkan dari Bandung ke Yogyakarta terdapat empat rute jalan yang diketahui pak Dodi. Ada berapa rute jalan seluruhnya yang dapat dilalui pak Dodi dari Jakarta ke Yogyakarta?
2. Dari empat siswa berikut: Ani, Budi, Cici, dan Dedi; dua siswa akan dipilih menjadi ketua dan wakil ketua kelas. Daftarkan seluruh pilihan (susunan) yang mungkin.
3. Dari empat siswa Adi, Budi, Chandra, dan Dedi; dua siswa akan dipilih menjadi pemain ganda bulutangkis. Daftarkan seluruh pilihan (susunan) yang mungkin.
4. Berapa macam susunan kata dapat terbentuk dengan menggunakan semua huruf pada kata:
 - a. ANA
 - b. ANAS
 - c. AANA
5. Tentukan banyaknya seluruh bilangan asli yang kurang dari atau sama dengan 4000 tanpa menggunakan angka 7, 8, ataupun 9.
6. Berapa banyak nomor mobil dapat dibentuk yang terdiri atas satu huruf, diikuti tepat empat angka, dan diakhiri dua huruf lagi; apabila:
 - a. Huruf boleh berulang, tetapi angka hanya bisa muncul satu kali
 - b. Huruf dan angka bisa berulang
7. Nomor polisi mobil-mobil di suatu negara selalu terdiri atas 4 angka. Jika jumlah keempat angka pada setiap nomor juga harus habis dibagi 5, tentukan banyaknya mobil yang bisa terdaftar di negara itu paling banyak.
8. Pada suatu bidang datar, terdapat 20 titik sedemikian rupa sehingga tidak ada tiga titik yang terletak pada satu garis. Tentukan banyaknya:
 - a. garis yang dapat dibuat melalui dua titik.

- b. segitiga yang dapat dibuat melalui tiga titik.
9. Dari 12 orang pengurus OSIS SMA Handayani, akan dipilih 4 orang wakil . Dalam berapa carakah kelompok 4 orang tersebut dapat dipilih jika:
- a. Ketua dan Sekretaris OSIS tidak boleh hadir bersama. b. Ada 2 orang yang kalau hadir harus bersama-sama.
10. Pengurus LSM yang terdiri atas enam orang akan mengadakan rapat. Mereka akan duduk mengelilingi meja berbentuk lingkaran. Jika disyaratkan bahwa Ketua, Sekretaris, dan Bendahara harus duduk berdekatan, tentukan banyaknya susunan mengelilingi meja yang dapat dibentuk.
11. Sepuluh orang tamu ingin menginap di suatu hotel yang hanya memiliki 4 kamar yang masih kosong. Dua kamar memuat 2 orang dan dua kamar lainnya memuat 3 orang per kamarnya. Dalam berapa macam cara 10 orang itu ditempatkan pada 4 kamar tersebut?
12. Delegasi Indonesia ke suatu pertemuan siswa SMA sedunia terdiri atas 5 orang. Ada 5 orang pria dan 7 orang wanita yang mencalonkan diri untuk menjadi anggota delegasi. Jika dipersyaratkan bahwa paling sedikit seorang anggota delegasi itu harus wanita, tentukan banyaknya cara memilih anggota delegasi.
13. Dalam berapa cara yang berbeda 4 pasang suami isteri dapat duduk mengelilingi meja dengan syarat: lelaki dan perempuan duduk berselang seling serta suami dan isteri tidak boleh duduk berdekatan.