INDUKSI MATEMATIKA

Salah satu Cara pembuktian pada lingkup bilangan asli adalah dengan induksi matematika. Pemecahan problem matematika dilakukan dengan menggunakan proses yang bersifat induktif, yaitu secara berurutan. Contohnya $n = 1,2,3,\ldots$

Induksi Matematika Biasa

Diberikan pernyataan-pernyataan $P(1), P(2), \ldots, P(n)$.. Ada 2 bagian yang harus dibuktikan kebenarannya, yakni :

- Tahap Awal

  Harus dibuktikan $P(1)$ benar

- Tahap induksi

  Diasumsikan pernyataan $P(k)$ benar, yakni $P(n)$ benar untuk suatu $n = k$. Harus dibuktikan pernyataan $P(k+1)$ juga benar, yakni $P(n)$ untuk suatu $n = k + 1$

- Kesimpulan

  Pernyataan $P(n)$ benar, untuk $n = 1,2,3\ldots$

Contoh

Buktikan bahwa $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ untuk setiap $n = 1,2,\ldots$

Penyelesaian

- Tahap Awal

  Akan dibuktikan $P(1)$ benar.

  Untuk $n = 1$, maka $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ bernilai benar

- Tahap induksi

  Diasumsikan pernyataan $P(k)$ bernilai benar. Jadi $1+2+..+k=\frac{k(k+1)}{2}$ dianggap sebagai pernyataan yang benar. Akan kita buktikan benar untuk $n=k+1$

  Bukti:

  Karena $1+2+..+k=\frac{k(k+1)}{2}$, maka

$$1+2+..+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$1+2+..+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)\big((k+1)+1\big)}{2}$$

  Jadi $1+2+..+n=\frac{n(n+1)}{2}$, untuk $n=k+1$

- Terbukti $1+2+..+n=\frac{n(n+1)}{2}$, untuk $n=1,2,3,.$

Catatan : ingat, nilai awal yang harus dibuktikan tidak harus selalu 1, tergantung soal mulai dari angka berapa, jika dibuktikan untuk $n=2,3,\ldots$ maka pernyataan awal yang buktikan adalah $P(2)$

Prinsip Induksi Matematika Terbalik

Diberikan pernyataan-pernyataan $P(1), P(2),..$ Ada dua bagian yang harus dibuktikan kebenarannya, yakni :

- Tahap Awal

  terdapat himpunan tak hingga $N_0 \subseteq N=\{1,2,3,\ldots\}$ dan untuk $m \subseteq N_0$ pernyataan $P(m)$ bernilai benar.

- Tahap induksi

  Diasumsikan pernyataan $P(n+1)$ benar. Akan dibuktikan $P(n)$ juga benar

- Kesimpulan

  Pernyataan $P(n)$ benar, untuk $n = 1,2,3,..$

Induksi Matematika Kuat

Diberikan pernyataan-pernyataan $P(1), P(2), ..$ Ada dua bagian yang harus dibuktikan kebenarannya, yakni :

- Tahap Awal

  Dibuktikan $P(1)$ bernilai benar

- Tahap induksi

  Diasumsikan pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap $1 \le n \le k$, untuk suatu nilai k. Akan dibuktikan $P(k+1)$ juga benar

- Kesimpulan

  Pernyataan $P(n)$ benar, untuk $n = 1,2,3,..$

Basic Problems

1. Buktikan $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, untuk setiap bilangan asli n
2. Buktikan $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ untuk setiap bilangan asli n

Advanced Problems

1. Diberikan bilangan positif x. Buktikan bahwa $nx + 1 \le (1+x)^n$, untuk $n = 1,2,..$
2. Buktikan bahwa $3^n > n^3$ untuk $n = 4,5,6, ...$

3. Buktikan bahwa $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ untuk setiap bilangan asli n.

4. Misal $f(n)$ yang memenuhi $f(1) = 2011$ dan $f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = n^2 f(n)$, untuk semua $n > 1$. Hitunglah $f(2011)$

5. Untuk setiap bilangan asli n didefinisikan $h(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$. Buktikan bahwa untuk $n > 1$ maka berlaku $n + h(1) + h(2) + h(3) + \cdots + h(n-1) = nh(n)$