

Bentuk Pangkat, Akar dan Logaritma

- Bentuk Pangkat

Bentuk umum dari eksponensial (bentuk pangkat) adalah a^b . a bilangan pokok, b adalah pangkat atau eksponen.

Sifat-sifat pangkat :

$$a^b \times a^c = a^{b+c}$$

$$\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

- Bentuk akar

Bentuk umumnya yaitu $\sqrt[m]{a^n}$. Sifat-sifatnya :

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

$$\sqrt[c]{ab} = \sqrt[c]{a} \times \sqrt[c]{b}$$

$$\sqrt[c]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[c]{a}}{\sqrt[c]{b}}$$

- Logaritma

Bentuk umum logaritma adalah ${}^a \log b$, dengan $a, b > 0$ dan $a \neq 1$. Bentuk logaritma ini ekuivalen dengan

$${}^a \log b = c \leftrightarrow a^c = b$$

Contoh $2^3 = 8$. Bentuk logaritmanya adalah ${}^2 \log 8 = 3$

Sifat-sifat logaritma :

1. ${}^a \log b + {}^a \log c = {}^a \log bc$

Bukti :

Misal ${}^a \log b = m$, ${}^a \log c = n$. Maka $a^m = b$ dan $a^n = c$

$bc = a^m \times a^n = a^{m+n}$, jadi ${}^a \log bc = m + n = {}^a \log b + {}^a \log c$

2. ${}^a \log b - {}^a \log c = {}^a \log \frac{b}{c}$
3. ${}^a \log b^n = n \times {}^a \log b$
4. ${}^{a^n} \log b = \frac{1}{n} {}^a \log b$
5. ${}^a \log b = \frac{{}^p \log b}{{}^p \log a}$, untuk setiap $p > 0, p \neq 1$
6. ${}^a \log b = \frac{1}{{}^b \log a}$
7. ${}^a \log b \times {}^b \log c = {}^a \log c$
8. $a^{a \log b} = b$

Untuk sifat-sifat logaritma selain sifat (1), bukti-buktinya diserahkan kepada pembaca sebagai bahan latihan.

Basic Problems

1. Sederhanakan bentuk $\left(\frac{a^{-\frac{1}{2}} \times \sqrt[5]{a^3}}{a^2}\right)^{\frac{1}{3}}$
2. Jika ${}^2 \log 3 = p$ dan ${}^3 \log 5 = q$. Tentukan nilai dari ${}^{375} \log 60$
3. Jika ${}^a \log p = x$, ${}^a \log q = y$, dan ${}^a \log r = z$ nyatakan logaritma dalam x, y, z .

$${}^a \log \frac{\sqrt{p}}{\sqrt[4]{q^3 \sqrt{r^4}}}$$

4. Jika $f(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}} + x^{-\frac{1}{4}}}$. Tentukan nilai dari $f(81)$ {ganti nilai x jadi 81}
5. Bilangan $\frac{(2^4)^8}{(4^8)^2}$ sama dengan...
6. Misalkan $A = (-1)^{-1}, B = (-1)^1, C = 1^{-1}$, berapakah $A + B + C$?

Advanced Problems

1. Jika $2^a = 3$, $3^b = 4$, $4^c = 5$, $5^d = 6$, $6^e = 7$, dan $7^f = 8$. Tentukan nilai $abcdef$!

2. Bilangan terbesar n sehingga 8^n membagi 44^{44} adalah...
3. Bilangan $\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$ merupakan bilangan.
 - a. Bulat positif
 - b. irrasional positif
 - b. Pecahan
 - d. irrasional negatif
4. Berapakah jumlah digit-digit bilangan $2^{2010} \cdot 5^{2011}$?
5. Berapakah nilai x yang memenuhi ${}^4 \log ({}^2 \log x) + {}^2 \log ({}^4 \log x) = 2$?
6. Tentukan pasangan terurut (a, b) yang memenuhi $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{a}}{\sqrt{4} + \sqrt{b}}$ merupakan bilangan rasional.
7. Buktikan jika x dan y adalah bilangan rasional yang memenuhi persamaan

$$x^5 + y^5 = 2x^2y^2$$

Maka $1 - xy$ adalah kuadrat dari suatu bilangan rasional