DAFTAR ISI

BAB I

TEORI BILANGAN

A. Keterbagian

Jika a dan b bilangan bulat dan $b \neq 0$, maka akan terdapat bilangan bulat q dan r sehingga :

$$a = bq + r \qquad \text{dan} \qquad 0 \leq r < |b|$$

q disebut sebagai hasil bagi sedangkan r disebut sisa pembagian. Sebagai contoh misalkan a = 57 dan b = 5, maka

$$57 = 5 \,.\, 11 + 2$$

diperoleh q = 11 dan r = 2. Nilai q dan r tunggal. Untuk membuktikan bahwa nilai q dan r tunggal kita gunakan kontradiksi dengan mengandaikan sebaliknya. Maka misalkan untuk suatu a dan b bilangan bulat dan $b \neq 0$:

$$a = q_1 b + r_1 = q_2 b + r_2,$$

$$(q_1, r_1, q_2, r_2 \text{ bilangan bulat, } 0 \leq r_1 < |b| \text{ dan } 0 \leq r_2 < |b|)$$

dapat diperoleh :

$$(q_1 - q_2)\, b = (r_2 - r_1)$$

$$0 \leq r_1 < |b|$$

$$-|b| < -r_1 \leq 0$$

$$-|b| < r_2 - r_1 < |b|$$

$$-|b| < (q_1 - q_2)b < |b|$$

karena $b \neq 0$, akibatnya

$$(q_1 - q_2)\, b = 0$$

$$q_1 - q_2 = 0$$

$$q_1 = q_2$$

$$r_2 - r_1 = 0$$

$$r_1 = r_2$$

Dengan demikian, terbukti bahwa q dan r tunggal. Jika $r = 0$, maka $b \mid a$ yang berarti b habis membagi a.

Sifat-sifat keterbagian :

1. Jika $a \mid b$ dan $b \mid c$ maka $a \mid c$
2. Jika $a \mid b$ dan $c \mid d$ maka $ac \mid bd$
3. Jika $c \mid a$ dan $c \mid b$ maka $c \mid ax + by$, untuk setiap bilangan bulat x dan y
4. $a \mid b$ dan $b \mid a$ jika dan hanya jika $a = \pm b$

Bukti :

1. Misalkan $b = au$ dan $c = bv$ untuk suatu u dan v bilangan bulat. Maka diperoleh $c = a(uv)$ yang berarti a habis membagi c.
2. Misalkan $b = au$ dan $d = cv$ untuk suatu u dan v bilangan bulat. Perkalian b dengan d akan menghasilkan

   $$bd = au \, . \, cv = (ac)(uv)$$

   Sehingga terbukti bahwa ac habis membagi bd.
3. Jika c membagi a maka $a = pc$ dan jika c membagi b maka $b = qc$, untuk suatu p, q bilangan bulat. Maka $ax + by = pcx + qcy = c\ (px + qy)$. Dengan demikian c habis membagi $ax + by$.
4. - Pembuktian untuk jika $a = \pm b$ maka $a \mid b$ dan $b \mid a$:

     Jika $a = \pm b$ maka $a = bx$ dan $b = ay$ dimana $x = y = \pm 1$. Dengan demikian $a \mid b$ dan $b \mid a$.
   - Pembuktian untuk jika $a \mid b$ dan $b \mid a$ maka $a = \pm b$:

     Misalkan $b = au$ dan $a = bv$ untuk suatu bilangan bulat u dan v. Maka diperoleh :

     $$b = buv$$

     $$b - buv = 0$$

     $$b(1 - uv) = 0$$

Jika $b = 0$, maka diperoleh $a = 0.v = 0$ sehingga $a = b = 0$.

Jika $b \neq 0$, maka

$$1 - uv = 0$$

$$uv = 1$$

sehingga $u, v = \pm 1$ dan $a = bv = \pm 1$.

B. Faktor Persekutuan Terbesar

Suatu bilangan bulat tak nol d dikatakan pembagi sekutu(faktor persekutuan) dari suatu bilangan bulat a dan b jika $d \mid a$ dan $d \mid b$. Dari semua pembagi sekutu dari dua bilangan tersebut terdapat satu bilangan yang unik (tunggal) yang merupakan pembagi (faktor) sekutu terbesar (fpb). Misalkan $a = 12$ dan $b = 18$. Bilangan yang merupakan pembagi sekutu a dan b adalah 1, 2, 3, 6. Sehingga fpb(12, 18) = 6.

Definisi : Misalkan a dan b suatu bilangan bulat yang tidak keduanya nol. Faktor sekutu terbesar dari a dan b adalah suatu bilangan bulat d yang memenuhi :

i. $d \mid a$ dan $d \mid b$

ii. untuk suatu bilangan bulat c, jika $c \mid a$ dan $c \mid b$ maka $c \leq d$

Salah satu cara untuk mencari faktor persekutuan terbesar adalah dengan menulis semua faktor dari a dan b seperti yang telah dicontohkan sebelumnya. Cara yang lebih efisien adalah dengan menggunakan Algoritma Euclid.

$$a = q_1 b + r_1 \qquad 0 \leq r_1 < b$$

$$b = q_2 r_1 + r_2 \qquad 0 \leq r_2 < r_1$$

$$\vdots$$

$$r_{n-3} = q_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1} \qquad 0 \leq r_{n-1} < r_{n-2}$$

$$r_{n-2} = q_n\, r_{n-1} + r_n \qquad\qquad r_n = 0$$

Setelah diperoleh $r_n = 0$, faktor persekutuan terbesar dari *a* dan *b* adalah r_{n-1}.

Contoh 1 : Hitung fpb(1026, 2048)

$$2048 = 1 \,.\, 1026 + 1022$$
$$1026 = 1.\, 1022 + 4$$
$$1022 = 255 \,.\, 4 + 2$$
$$4 = 2 \,.\, 2 + 0$$

Sehingga diperoleh fpb(1026, 2048) = 2.

Jika kita bekerja secara mundur maka dapat diperoleh :

$$\begin{aligned} \text{fpb}(1026, 2048) &= 2 \\ &= 1022 - 255 \,.\, 4 \\ &= 1022 - 255 \,.\, (1026 - 1 \,.\, 1022) \\ &= 256 \,.\, 1022 - 255 \,.\, 1026 \\ &= 256 \,.\, (2048 - 1 \,.\, 1026) - 255 \,.\, 1026 \\ &= 256 \,.\, 2048 - 511 \,.\, 1026 \end{aligned}$$

Sehingga persamaan $2048x + 1026y = \text{fpb}(2048, 1026)$ mempunyai solusi $x = 256$ dan $y = 511$. Secara umum untuk setiap bilangan bulat *a* dan *b*,

$$ax + by = \text{fpb}(a, b)$$

memiliki solusi bulat *x* dan *y*. Persamaan tersebut dikenal dengan sebutan ***Bezout's identity.***

Persamaan tersebut tidak hanya memiliki satu solusi, tetapi tak hingga banyaknya solusi. Secara umum solusi dari persamaan tersebut adalah

$$x = x_0 + \frac{bn}{fpb(a,b)}$$

$$y = y_0 - \frac{an}{fpb(a,b)}$$

dengan *n* himpunan bilangan bulat dan x_0, y_0 salah satu solusi dari persamaan tersebut.

C. Kelipatan Persekutuan Terkecil

Misalkan a dan b adalah suatu bilangan bulat. Bilangan bulat c disebut *kelipatan persekutuan* dari a dan b jika $a \mid c$ dan $b \mid c$. Jika a dan b tidak nol maka kedua bilangan tersebut akan mempunyai kelipatan persekutuan yang bernilai positif. Suatu bilangan bulat $l > 0$ dikatakan *kelipatan persekutuan terkecil* (kpk) dari bilangan bulat a dan b jika memenuhi :

i. $a \mid l$ dan $b \mid l$,

ii. Jika $a \mid c$ dan $b \mid c$ dengan $c > 0$, maka $l \leq c$.

Teorema : Misalkan a dan b adalah suatu bilangan bulat, d adalah fpb(a, b), dan l adalah kpk(a, b). Maka

$$ab = \text{fpb}(a, b) \cdot \text{kpk}(a, b)$$

Bukti :

Misalkan $p = a/d$ dan $q = b/d$. Maka

$$ab = \frac{pd.qd}{d} = pqd$$

$$pqd = (pd)q = aq \quad \text{dan} \quad pqd = (qd)p = bp$$

sehingga $a \mid dpq$ dan $b \mid dpq$ (aturan (i) terpenuhi). Misalkan terdapat suatu c sehingga $a \mid c$ dan $b \mid c$. Untuk membuktikan teorema ini harus dibuktikan bahwa $pqd \leq c$. Untuk suatu d = fpb(a, b) terdapat bilangan bulat x, y sehingga $ax + by = d$, sehingga

$$\frac{c}{dpq} = \frac{cd}{(dp)(dq)} = \frac{cd}{ab} = \frac{c(ax+by)}{ab} = \frac{c}{b}x + \frac{c}{a}y$$

Karena $a \mid c$ dan $a \mid b$ maka $\frac{c}{dpq}$ adalah suatu bilangan bulat, sehingga $dpq \mid c$. Dengan demikian terbukti bahwa $dpq \leq c$.

D. Kongruensi

Misalkan n, a, dan b adalah suatu bilangan bulat. Bilangan a dikatakan kongruen dengan b mod (n) apabila a bersisa b jika dibagi n. Ditulis sebagai

$$a \equiv b \bmod (n)$$

Contoh 2 : Tentukan bilangan bulat x jika diketahui

$$10x \equiv 6 \bmod (14)$$

Jawab :

Pernyataan di atas dapat ditulis sebagai

$10x = 14q + 6$, untuk suatu q bilangan bulat

$\Leftrightarrow 5x = 7q + 3$

$\Leftrightarrow 5x \equiv 3 \bmod (7)$

$\Leftrightarrow 5x \equiv 10 \bmod (7)$

$\Leftrightarrow x \equiv 2 \bmod (7)$

yaitu $x = 7k + 2$, k bilangan bulat. Jika $k = 0$, maka nilai x yang memenuhi $10x \equiv 6$ mod(14) adalah 2. Jika $k = 1$, maka solusi = 9, dan seterusnya.

Contoh 3 : Misalkan $A = 3^{105} + 4^{105}$. Tentukan sisa jika A dibagi 11.

Jawab :

$3^3 = 27 \equiv 5 \bmod 11$

$3^4 \equiv 5.3 \equiv 4 \bmod 11$

$3^5 \equiv 4.3 \equiv 1 \bmod 11$

$3^{105} \equiv (3^5)^{21} \equiv (1)^{21} \bmod 11$

$4^5 \equiv 1 \bmod 11$

$4^{105} \equiv 1 \bmod 11$

$3^{105} + 4^{105} \equiv 1 + 1 \equiv 2 \bmod 11$

E. Induksi Matematika

Prinsip induksi matematika digunakan untuk membuktikan bahwa suatu pernyataan benar untuk setiap bilangan asli. Misalkan $P(n)$ adalah suatu pernyataan yang bergantung pada n dengan $n = n_0, n_1, \ldots$. Maka pembuktian pernyataan $P(n)$ dengan prinsip induksi matematika adalah dengan :

1. Membuktikan bahwa $P(n_0)$ benar. Bagian ini disebut bagian inisialisasi atau basis.
2. Membuktikan implikasi

   $$P(k) \text{ benar} \Rightarrow P(k+1) \text{ benar}, \ \forall k \geq n_0$$

   Atau buktikan implikasi

   $$P(n_0), P(n_0+1), \ldots, P(k) \text{ benar} \Rightarrow P(k+1) \text{ benar}, \ \forall k \geq n_0$$

   Bagian ini disebut sebagai bagian induksi.

Contoh : Buktikan bahwa

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Jawab :

Untuk $n = 1 \rightarrow 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ (benar).

Untuk $n = 2 \rightarrow 1 + 2 = 3 = \frac{2(2+1)}{2}$ (benar)

Anggap pernyataan di atas benar untuk $n = 1, 2, \ldots, k$, untuk suatu k bilangan asli. Akan dibuktikan benar untuk $n = k + 1$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + k + 1 = (1 + 2 + 3 + \ldots + k) + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Maka pernyataan di atas benar untuk $n = k + 1$. Dengan demikian pernyataan benar untuk semua bilangan asli n.

F. Latihan

1. Tentukan semua bilangan bulat n sehingga $7n + 1$ habis dibagi $3n + 4$

2. Hitung fpb(36, 24, 98, 124).

3. Hitung kpk(128, 246, 306).

4. Apakah $4^{545} + 545^4$ bilangan prima?

5. Buktikan jika $a - c \mid ab + cd$ maka $a - c \mid ad + bc$.

6. Buktikan bahwa $3n - 1$, $5n + 2$, $7n - 1$, $7n - 2$, $7n + 3$ bukan bilangan kuadrat.

7. Tentukan semua bilangan prima p dan q sehingga $p^2 - 2q^2 = 1$.

8. Buktikan bahwa jika $6 \mid a + b + c$ maka $6 \mid a^2 + b^2 + c^2$.

9. Buktikan bahwa jika $2n + 1$ dan $3n + 1$ adalah bilangan kuadrat, maka $5n + 3$ bukan merupakan bilangan prima.

10. Buktikan bahwa $\dfrac{12n+1}{30n+2}$ dan $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ tidak dapat disederhanakan.

11. Tentukan nilai p jika p, $p + 10$, dan $p + 14$ adalah bilangan prima

12. Tentukan semua solusi bulat dari $x + y = xy$

13. Tentukan bilangan bulat terkecil n sehingga $999999.n = 111\ldots11$

14. Tentukan semua solusi bulat dari $x^2 - 3y^2 = 17$.

15. Buktikan bahwa :
    (a) Jika $13 \mid a + 4b$ maka $13 \mid 10a + b$
    (b) Jika $19 \mid 3x + 7y$ maka $19 \mid 43x + 75y$
    (c) Jika $17 \mid 3a + 2b$ maka $17 \mid 10a + b$

16. Buktikan jika $x^2 + 2y^2$ adalah bilangan prima ganjil, maka sisa jika dibagi 8 adalah 1 atau 3.

17. Ada berapa banyak bilangan di antara 100 dan 1000 yang habis dibagi 11?

18. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan bulat n,
    (a) Jika n ganjil maka $8 \mid n^2 - 1$
    (b) $8 \mid 3^{2n} - 1$.
    (c) $9 \mid 4^n + 15n - 1$.

19. Tentukan tiga bilangan bulat dimana ketiganya relatif prima namun setiap dua diantaranya tidak relatif prima.

20. Jika n adalah bilangan bulat, tentukan kpk(n, n + 1).

21. Misalkan m dan n adalah bilangan bulat sehingga fpb(m, n) = kpk(m, n). Buktikan bahwa $m = n$.

22. Tentukan semua pasangan bilangan bulat m dan n dimana fpb(m, n) = 10 dan kpk(m, n) = 100.

23. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan bulat n,

$$\text{kpk}(1, 2, \ldots, 2n) = \text{kpk}\,(n + 1, n + 2, \ldots, 2n).$$

24. Untuk setiap kekongruenan berikut, tentukan apakah terdapat solusi atau tidak, jika terdapat solusi tentukan solusi umum.

(a) $3x \equiv 5 \bmod 7$.

(b) $12x \equiv 15 \bmod 22$

(c) $19x \equiv 42 \bmod 50$

(d) $18x \equiv 42 \bmod 50$

25. Buktikan untuk setiap bilangan bulat n, $25 \mid 2^{n+2}3^{n} + 5n - 4$.

BAB II

KOMBINATORIKA

A. Kombinasi dan Permutasi

Terdapat 20 orang peserta kompetisi pencarian anggota band. Julian sang juri akan menentukan 4 dari 20 orang tersebut untuk menjadi anggota band *The WellKnown*. Masing-masing dari 4 orang tersebut akan diberi posisi sebagai *drummer*, *bassist*, gitaris, vokalis. Berapa banyakkah kemungkinan band yang dapat terbentuk?

Untuk menyelesaikan persoalan di atas perhatikan ilustrasi berikut.

$$\boxed{D} \quad \boxed{B} \quad \boxed{G} \quad \boxed{V}$$

Anggap kelima kotak di atas adalah anggota dari band *The WellKnown*. Misalkan D adalah posisi *drummer*, B adalah *bassist*, G adalah gitaris, V adalah vokalis. Banyaknya cara untuk memilih orang pada posisi D adalah 20. Kemudian banyaknya cara untuk memilih orang pada posisi B adalah 19 karena 1 orang telah terpilih pada posisi pertama. Banyaknya cara memilih orang pada posisi G adalah 18 karena 2 orang telah terpilih dan banyaknya cara memilih orang pada posisi V adalah 17. Sehingga banyaknya kemungkinan band yang dapat terbentuk adalah 20x19x18x17 = 116280 kemungkinan.

Secara umum, jika terdapat n buah objek maka banyaknya cara untuk memilih k objek dari n objek tersebut adalah

$$n \,.\, (n-1) \,.\, (n-2) \,\ldots\ldots\ldots\, (n-k+2) \,.\, (n-k+1)$$

Dalam kasus di atas, urutan dari pemilihan anggota diperhatikan. Misalkan dalam pemilihan anggota band, Julian hanya akan memilih 4 orang tanpa memperhatikan posisi dari setiap orang. Misalkan pula dalam himpunan kemungkinan band terdapat himpunan dengan anggota {Alex, Brandon, Chris, Damian}. Maka himpunan tersebut akan muncul sebanyak 4! kali karena keempat orang anggota terpilih dengan posisi yang berbeda. Misal terdapat himpunan dengan Alex pada posisi D, Brandon pada posisi B, Chris pada posisi G, dan Damian pada posisi V. Namun terdapat pula himpunan dengan Alex pada posisi B, Brandon pada posisi D, Chris pada posisi V, dan Damian pada posisi G. Anggota dari himpunan tersebut sama, hanya saja posisi dari setiap anggota berbeda-beda dan banyaknya pengulangan terjadi sebanyak 4! kali. Maka banyaknya pemilihan tanpa memperhatikan urutan adalah $\frac{20.19.18.17}{4!} = 4845$. Secara umum untuk *n* buah objek dan *k* buah yang akan dipilih, banyaknya cara untuk memilih *k* objek tersebut adalah

$$\frac{n.(n-1)....(n-k+2).(n-k+1)}{k!}$$

atau dapat ditulis dengan notasi

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Contoh 1 : Buktikan bahwa

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

Jawab :

Ruas kanan menyatakan banyaknya himpunan bagian dari himpunan dengan *n* anggota misalkan himpunan {1, 2, 3, …., *n*}.

2^n = Banyaknya himpunan bagian dari {1, 2, 3, …, *n*}

= Banyaknya himpunan bagian dengan 0 anggota

+ Banyaknya himpunan bagian dengan 1 anggota

+ ….

+ Banyaknya himpunan bagian dengan *n* - 1 anggota

+ Banyaknya himpunan bagian dengan *n* anggota

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots\dots\dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

Contoh 2 : Sebanyak *n* orang siswa membentuk sebuah barisan (urutan dalam barisan telah ditentukan). Siswa-siswa tersebut akan dibagi dalam *k* buah kelompok. Tentukan banyaknya cara untuk memilih *k* kelompok ini.

Jawab :

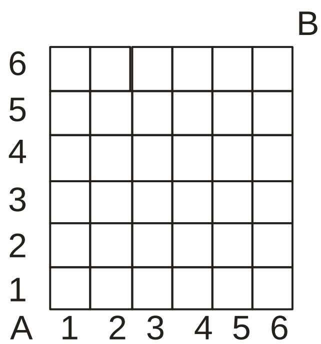
Anggap kotak-kotak di atas adalah siswa yang telah terurut barisannya. Terdapat *n* – 1 buah celah di antara *n* siswa tersebut. Untuk membagi siswa menjadi *k* buah kelompok maka dapat diletakkan *k* – 1 sekat di antara *n* – 1 buah celah di atas. Sehingga banyaknya cara untuk memilih *k* kelompok ini adalah $\binom{n-1}{k-1}$.

Contoh 3 : Terdapat 1 deret kursi yang terdiri dari *n* buah kursi. Sebanyak *k* orang duduk di deretan kursi tersebut sehingga tidak terdapat 2 orang yang duduk bersebelahan. Tentukan banyaknya cara untuk memilih kursi untuk *k* orang tersebut.

Jawab :

Pandang *n* – *k* buah kursi kosong yang diletakkan pada satu deretan. Pada setiap celah di antara dua buah kursi akan diletakkan *k* kursi berisi sehingga dijamin tidak ada dua kursi berisi yang bersebelahan. Banyaknya celah yang akan diisi adalah *n* – *k* + 1 (termasuk celah di awal dan ujung deretan). Sehingga banyaknya cara memilih kursi adalah $\binom{n-k+1}{k}$.

Contoh 4 : Hitung banyaknya cara terpendek untuk pindah dari titik A ke titik B.



Jawab :

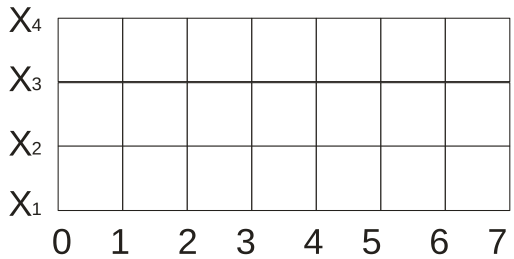
Banyaknya langkah yang dibutuhkan adalah 12. Dari 12 langkah tersebut 6 langkah ke atas dan 6 langkah ke bawah. Sehingga banyaknya cara terpendek untuk pindah dari titik A ke titik B adalah $\binom{12}{6}$.

Secara umum, jika terdapat n langkah yang dibutuhkan untuk mencapai titik B dari titik A dan terdapat k langkah ke kanan atau ke atas maka banyaknya cara untuk mencapai titik B tersebut adalah $\binom{n}{k}$.

Contoh 5 : Tentukan banyaknya solusi bilangan bulat tak negatif dari persamaan

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

Jawab :



Banyaknya solusi bilangan bulat tak negatif dari persamaan di atas sama dengan banyaknya cara terpendek untuk mencapai ujung kanan atas grid dari ujung kiri bawah grid yaitu $\binom{10}{3}$.

Contoh 6 : Tentukan banyaknya solusi bilangan bulat positif dari persamaan

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

Jawab :

Untuk menyelesaikan persoalan ini tidak dapat menggunakan grid seperti pada persoalan sebelumnya. Pandang persoalan ini seperti persoalan pembagian *k* kelompok pada *Contoh 2*. Yang menjadi nilai *k* adalah banyaknya variabel pada persamaan yaitu 4 dan nilai *n* adalah 7. Sehingga banyaknya solusi adalah $\binom{6}{3}$.

B. Prinsip Inklusi Eksklusi

Misalkan diberikan sebuah himpunan dimana setiap elemennya dapat memenuhi sifat 1, 2, …, n. Misalkan pula N adalah banyaknya elemen yang memenuhi sedikitnya satu dari 1, 2, 3,…, *n*. Maka

$$\begin{aligned} N = \; & N(1) + N(2) + \ldots + N(n) \\ & - N(1,2) - N(1,3) - \ldots - N(n-1, n) \\ & + N(1,2,3) + N(1,2,4) + \ldots + N(n-2, n-1, n) \\ & - \ldots\ldots \end{aligned}$$

$+ (-1)^{n-1} N(1, 2, 3, …., n)$

dimana $N(i_1, i_2, …, i_r)$ adalah banyaknya elemen yang memenuhi sifat $i_1, i_2, …, i_r$.

Contoh 7 : Tentukan banyaknya permutasi dari $\{1, 2, …, n\}$ dimana 1 tidak pada posisi ke-1, 2 tidak pada posisi ke-2, …. , n tidak pada posisi ke n.

Jawab :

Misalkan N adalah himpunan permutasi dengan sifat terdapat sedikitnya satu i yang terletak pada posisi ke-i. Maka banyaknya permutasi = $n! - N$.

$$N = \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + ... + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}0!$$

Contoh 8 : Diambil 5 kartu dari 52 kartu. Berapa banyaknya cara memilih kelima kartu ini agar memuat sedikitnya 1 As, 1 King, 1 Queen, 1 Jack.

Jawab :

Misalkan N adalah banyaknya cara memilih 5 yang tidak memuat As, tidak memuat King, tidak memuat Queen, dan tidak memuat Jack. Maka banyaknya cara memilih kelima kartu ini agar memuat sedikitnya 1 As, 1 King, 1 Queen, 1 Jack adalah $\binom{52}{5} - N$.

$$N = \binom{4}{1}\binom{48}{5} - \binom{4}{2}\binom{44}{5} + \binom{4}{3}\binom{40}{5} - \binom{4}{4}\binom{36}{5}.$$

C. Pigeon Hole Principle

Wherever adalah sebuah kota kecil dengan jumlah penduduk sebanyak 370 orang. Pada suatu ketika salah satu penduduk bernama Jonas berkata bahwa terdapat dua orang penduduk yang berulang tahun pada hari yang sama. Banyaknya hari dalam satu tahun adalah 365 hari pada tahun non kabisat dan 366 hari pada tahun kabisat. Karena jumlah penduduk kota *Wherever* lebih besar dari banyaknya hari pada satu tahun, maka Jonas mengambil kesimpulan seperti itu.

Kesimpulan Jonas tersebut sesuai dengan *Pigeon Hole Principle*. Jika terdapat lebih dari *n* buah barang yang didistribusikan pada *n* buah kotak, maka terdapat sebuah kotak yang menerima lebih dari satu barang.

Contoh 9 : Suatu pertemuan dihadiri oleh *n* peserta. Sejumlah peserta saling berjabat tangan. Tidak ada peserta yang berjabatan tangan dengan dirinya sendiri. Setiap dua orang peserta berjabat tangan paling banyak satu kali. Buktikan bahwa terdapat dua peserta yang banyak jabat tangan yang dilakukannya adalah sama.

Jawab :

Labeli setiap peserta dengan banyaknya jabat tangan yang dilakukannya. Perhatikan gambar berikut.

$$\boxed{0} \quad \boxed{1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \boxed{n\text{-}1}$$

Angka dalam kotak merepresentasikan jumlah jabat tangan yang dilakukan. Label peserta akan dimasukkan ke dalam kotak yang merepresentasikan banyak jabat tangan yang dilakukan peserta tersebut.

Kasus I : Semua peserta melakukan jabat tangan.

Dengan demikian kotak yang berisi angka 0 akan kosong sehingga banyaknya kotak yang dapat terisi adalah $n - 1$ dan banyaknya label yang akan dimasukkan ke dalam kotak adalah *n*. Berdasarkan *Pigeon Hole Principle* maka terdapat kotak yang berisi lebih dari satu label yang berarti terdapat dua peserta yang melakukan jabat tangan dengan jumlah yang sama.

Kasus II : Tidak ada peserta yang berjabat dengan $n - 1$ peserta lainnya.

Dengan demikian kotak dengan bertuliskan n – 1 kosong. Seperti pada kasus yang sebelumnya, banyak kotak yang dapat terisi adalah n – 1 dan banyak label adalah n.

Contoh 10 : Diberikan 52 bilangan bulat positif. Tunjukkan bahwa kita dapat memilih dua di antara bilangan-bilangan ini sehingga jumlah atau selisihnya habis dibagi 100.

Jawab :

Perhatikan gambar berikut.

0	1 99	....	49 51	50 50

Angka dalam kotak merepresentasikan sisa bagi suatu bilangan dengan 100. Terdapat 51 kotak dan terdapat 52 bilangan yang akan dimasukkan ke dalam kotak. Berdasarkan *Pigeon Hole Principle* maka akan terdapat kotak yang berisi lebih dari satu benda. Misalkan kotak ke-i berisi lebih dari satu bilangan. Maka jika dua bilangan pada kotak tersebut memiliki sisa bagi yang sama, selisih dari kedua bilangan tersebut akan habis dibagi 100. Sedangkan jika sisa baginya berbeda maka jumlah dari kedua bilangan tersebut akan habis dibagi 100.

D. Paritas

Prinsip ini digunakan untuk mengeliminasi kemungkinan-kemungkinan dengan memperhatikan permasalahan genap/ganjil.

Contoh 11 : Buktikan bahwa jumlah dari dua buah kuadrat sempurna ganjil tidak mungkin merupakan kuadrat sempurna.

Jawab :

Misalkan dua bilangan ganjil tersebut adalah b dan c. Maka b^2 dan $c^2 \equiv 1 \bmod 4$. Dengan demikian $b^2 + c^2 \equiv 2 \bmod 4$. Kedua bilangan ganjil tersebut jika dijumlahkan menghasilkan bilangan genap. Suatu bilangan genap jika dikuadratkan akan habis dibagi 4. (kontradiksi)

Contoh 12 : Misal a_1, a_2, …, a_n adalah sebarang permutasi dari 1, 2, …, n. Jika n adalah ganjil, buktikan bahwa $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \ldots (a_1 - n)$ adalah genap.

Jawab :

Andaikan sebaliknya. Maka setiap faktor $(a_i - i)$ adalah ganjil. Misalkan $n = 2k + 1$ untuk suatu k bilangan bulat. Maka banyak i dengan paritas genap adalah k dan banyak i dengan paritas ganjil adalah $k + 1$. Agar $(a_i - i)$ ganjil maka a_i dan i harus berbeda paritas. (kontradiksi)

E. Latihan

1. Tentukan banyaknya permutasi dari masing-masing himpunan berikut :
   (a) $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$
   (b) $\{A, B, C, \ldots., Z\}$

2. Berapa banyak kata yang dapat disusun oleh kata *MALADROIT* ?

3. Tentukan banyaknya kata yang terdiri dari lima huruf yang dapat dibentuk dari $\{ A, B, C, \ldots., Z \}$ dimana huruf A muncul paling sedikit satu kali.

4. Tentukan banyaknya kata yang terdiri dari lima huruf yang menggunakan huruf $\{A, B, C\}$ dimana setiap huruf muncul paling sedikit satu kali.

5. Silas mengambil empat buah kartu secara random dari 52 buah kartu yang ada. Tentukan peluang bahwa
   (a) Semua kartu yang diambil Silas adalah *As*
   (b) Semua kartu yang diambil berbeda jenis

6. Tentukan banyaknya bilangan yang lebih kecil dari 1.000.000 yang memuat paling sedikit satu buah angka 7.

7. Buktikan bahwa banyaknya subhimpunan dari suatu himpunan yang memiliki n anggota adalah 2^n.

8. Tentukan banyaknya permutasi dari digit 0, 1, 2, …, 9 dengan digit ganjil dan genap muncul bergantian.

9. Tentukan banyaknya kata yang terdiri dari tujuh huruf yang dapat dibentuk dari himpunan $\{A, B\}$ dimana huruf A muncul sebanyak 3 kali.

10. Tentukan koefisien dari X^kY^{n-k} dari $(X + Y)^n$ untuk suatu X, Y, n, k bilangan bulat non negative dan $k \le n$.

11. Tentukan banyaknya kombinasi 50-digit yang dibentuk dari $\{0, 1, 2, …., 9\}$ dimana setiap digit muncul paling sedikit dua kali.

12. Tentukan banyaknya kombinasi 20-huruf dari himpunan $\{A, B, C\}$ yang terdiri dari paling sedikit satu A, paling sedikit dua B, dan paling sedikit tiga C.

13. Sederhanakan bentuk berikut :

    (a) $\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{k-1}}$ (b) $\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}}$ (c) $\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{k}}$

14. Tentukan x dan y sedemikian sehingga

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{x}{y}$$

15. Tentukan x dan y sedemikian sehingga

$$\binom{100}{0} + 2\binom{100}{1} + 4\binom{100}{2} + \dots + 2^{100}\binom{100}{100} = x^y$$

16. Dari 52 buah kartu, Albert memilih 13 kartu. Tentukan peluang kartu yang terambil terdiri dari paling sedikit tiga buah kartu dari setiap jenis.

17. Sebanyak n orang menghadiri rapat pemilihan ketua Himpunan. Ke-n orang tersebut duduk pada n buah kursi yang terletak pada suatu meja yang berbentuk bundar. Tentukan banyaknya kemungkinan tempat duduk dari setiap peserta.

18. Tentukan banyaknya cara menempatkan tujuh buah bola berwarna merah dan delapan bola berwarna biru ke dalam tiga buah kotak jika
    (a) Setiap kotak terdiri dari paling sedikit satu bola dari setiap warna.
    (b) Setiap kotak terdiri dari paling sedikit dua bola dari setiap warna.

19. Tentukan banyaknya permutasi dari *AABBCCDDEE* jika
    (a) Kedua huruf *A* muncul bersebelahan
    (b) Kedua huruf *A* terletak terpisah
    (c) Huruf *A* dan *E* terpisah.

20. Tentukan banyaknya cara mendistribusikan tujuh buah bola yang berbeda ke dalam empat kotak yang identik jika
    (a) Tidak ada kotak yang kosong
    (b) Paling banyak satu kotak kosong

21. Tentukan banyaknya bilangan bulat positif yang lebih kecil atau sama dengan 1000 yang tidak habis dibagi 2, 3, dan 5.

22. Bilangan 11223344 akan disusun sehingga tidak terdapat dua digit yang sama bersebelahan. Berapakah banyaknya cara untuk menyusun bilangan tersebut?

23. Tentukan banyaknya kombinasi enam digit dari himpunan {1, 2, 3, 4, 5, 6} dimana tidak ada digit yang muncul lebih dari dua kali.

24. Tentukan banyaknya penyusunan bilangan 12345 dimana tidak muncul deret 12, 23, 34, 45, dan 51.

25. Niko memiliki sembilan bola berwarna yang terdiri dari tiga bola merah, dua bola biru, dua bola hijau, satu bola putih, dan satu bola kuning.
    (a) Berapa banyak cara memilih empat diantara bola-bola tersebut ?
    (b) Berapa banyak cara memilih lima diantara bola-bola tersebut ?

26. Tentukan banyaknya bilangan bulat positif yang kurang dari 10.000 yang habis dibagi tepat dua diantara 2, 3, 5, 7.

27. Buktikan bahwa diantara 7 buah bilangan asli terdapat dua bilangan yang selisihnya habis dibagi 6.

28. Fab menyelesaikan persoalan matematika sebanyak paling sedikit 12 soal setiap minggunya. Buktikan terdapat beberapa hari berturut-turut dalam satu tahun dimana ia menyelesaikan 20 soal.

29. Terdapat 6 orang pada sebuah pesta. Buktikan bahwa 3 orang diantaranya saling mengenal atau 3 diantaranya tidak saling mengenal.

30. Terdapat 33 orang murid dalam satu kelas dan jumlah dari usia mereka adalah 430. Apakah benar bahwa terdapat 20 orang murid yang jumlah usianya lebih dari 260?

31. Buktikan bahwa terdapat bilangan asli yang berbentuk 19971997….1997 yang habis dibagi 1999

32. Terdapat 20 bilangan bulat positif dan semuanya lebih kecil dari 70. Buktikan terdapat diantara selisih dari bilangan-tersebut terdapat bilangan yang sama.

33. Misalkan n adalah bilangan bulat positif yang tidak habis dibagi 2 atau 5. Buktikan bahwa terdapat kelipatan dari n yang semua digitnya adalah angka 1.

34. Satu diantara bilangan real positif a, $2a$, …, $(n-1)a$ memiliki jarak paling besar $1/n$ dari bilangan bulat positif.

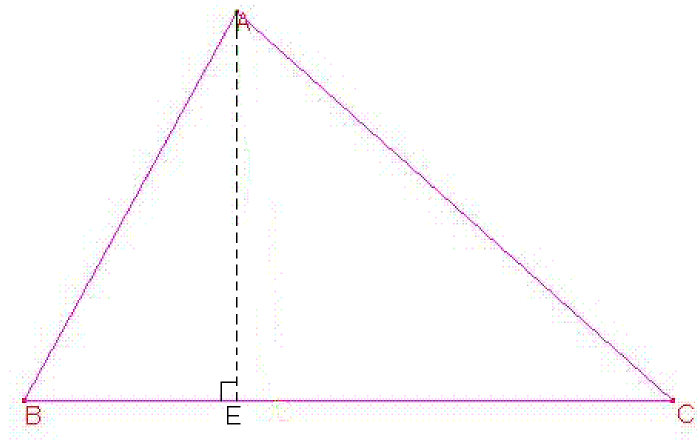
35. Buktikan diantara $n + 1$ bilangan bulat dari $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ terdapat dua diantaranya yang saling prima.

BAB III

GEOMETRI

A. Segitiga

a. Luas Segitiga



Gambar 1

Misalkan [*ABC*] menyatakan luas dari ΔABC dan titik *E* terletak pada sisi *BC* sedemikian sehingga *AE* tegak lurus dengan *BC* maka

$$[ABC] = \tfrac{1}{2}.BC.AE$$

Selain itu [*ABC*] juga dapat dinyatakan dalam

$$[ABC] = \tfrac{1}{2}\, AC.BC.\sin C$$

karena *AE* = *AC*. sin *C*. Dengan cara yang sama diperoleh

$$[ABC] = \tfrac{1}{2}\, AB.AC.\sin A = \tfrac{1}{2}\, AB.BC.\sin B$$

Heron's Formula. Misalkan *a*, *b*, *c* adalah sisi *BC*, *AC*, *AB* berturut-turut pada ΔABC dan $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ maka

$$[ABC] = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Bukti :

Misalkan $AE = t$ dan $BE = x$. Maka diperoleh $EC = a - x$. Dengan menggunakan teorema Phythagoras diperoleh

$$t^2 = b^2 - (a-x)^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2 \quad \text{...........} \ (1)$$

$$t^2 = c^2 - x^2 \ \text{...........} \ (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$c^2 - x^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2$$

$$\Leftrightarrow 2ax = c^2 - b^2 + a^2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2a}$$

Subtitusikan *x* ke persamaan (2)

$$\begin{aligned} t^2 &= c^2 - \left(\frac{c^2 - b^2 + a^2}{2a}\right)^2 \\ &= \frac{4a^2c^2 - \left(c^2 - b^2 + a^2\right)^2}{4a^2} \\ &= \frac{(2ac - c^2 + b^2 - a^2)(2ac + c^2 - b^2 + a^2)}{4a^2} \\ &= \frac{(b^2 - (a-c)^2)((a+c)^2 - b^2)}{4a^2} \\ &= \frac{(b-a+c)(b+a-c)(a+c-b)(a+b+c)}{4a^2} \\ &= \frac{(2s-2a)(2s-2c)(2s-2b)2s}{4a^2} \end{aligned}$$

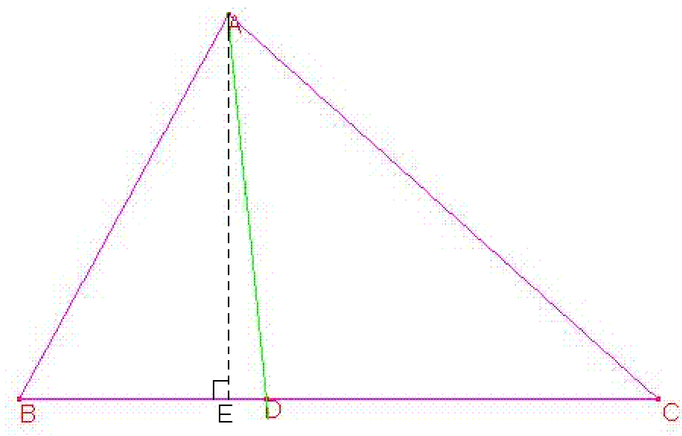
$$= \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Maka

$$[ABC] = \tfrac{1}{2}.a.t = \tfrac{1}{2}.a.\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{(terbukti)}$$

b. Teorema Ceva

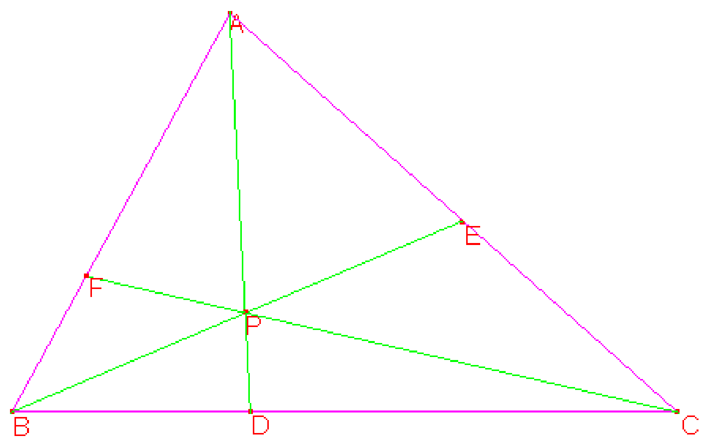


Gambar 2

Perhatikan ΔABC di atas. ΔABD dan ΔADC memiliki garis tinggi yang sama yaitu garis AE sehingga untuk sebarang titik D di sisi BC

$$\frac{BD}{DC} = \frac{[ABD]}{[ADC]}$$

Dengan $[XYZ]$ menyatakan Luas dari $\Delta\ XYZ$.



Gambar 3

Teorema : Tiga segmen garis *AD*, *BE*, *CF* berpotongan di satu titik (konkuren) di titik *P* (Gambar 3) jika dan hanya jika

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

Bukti :

a. *AD*, *BE*, *CF* konkuren di titik *P*.

$$\frac{AF}{FB}=\frac{[AFC]}{[FBC]}=\frac{[AFP]}{[FBP]}=\frac{[AFC]-[AFP]}{[FBC]-[FBP]}=\frac{[APC]}{[BPC]}$$

Dengan cara yang sama diperoleh

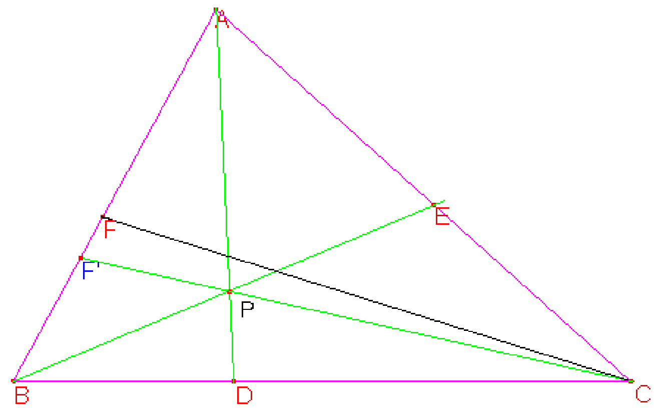
$$\frac{BD}{DC}=\frac{[BPA]}{[APC]}$$

$$\frac{CE}{EA}=\frac{[BPC]}{[BPA]}$$

sehingga

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{[APC]}{[BPC]}\cdot\frac{[BPA]}{[APC]}\cdot\frac{[BPC]}{[BPA]}=1\ (terbukti)$$

b. $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$.



Gambar 4

Andaikan ketiga garis *AD*, *BE*, *CF* tidak konkuren. Misalkan terdapat *F'* sehingga *AD*, *BE*, *CF* berpotongan di titik P. Berdasarkan (a)

$$\frac{AF'}{F'B}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

maka

$$\frac{AF'}{F'B}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1=\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}$$

$$\frac{AF'}{F'B}=\frac{AF}{FB}$$

Kasus I : $AF < AF'$.

$\rightarrow BF' < BF$

$\rightarrow \frac{1}{BF} < \frac{1}{BF'}$.

$\rightarrow \frac{AF}{BF} < \frac{AF'}{BF'}$ (kontradiksi)

Kasus II : $AF > AF'$.

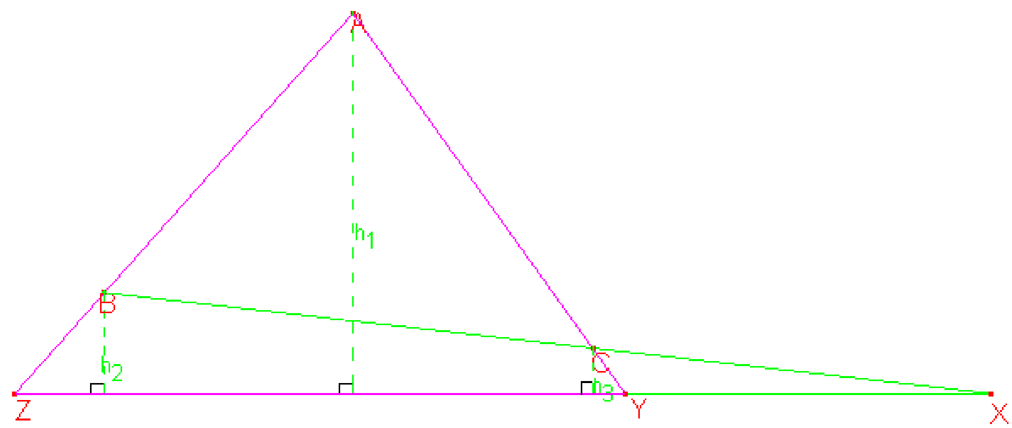
$\rightarrow BF' > BF$

$\rightarrow \frac{1}{BF} > \frac{1}{BF'}$.

$$\rightarrow \frac{AF}{BF} > \frac{AF'}{BF'} \quad \text{(kontradiksi)}$$

Untuk kedua kasus terjadi kontradiksi. Dengan demikian haruslah *AF* = *AF'*. Sehingga ketiga garis tersebut berpotongan di satu titik.

c. Teorema Menelaus



Gambar 5

Titik *X*, *Y*, *Z* pada sisi *BC*, *CA*, *AB* dari ΔABC kolinier (terletak pada satu garis) jika dan hanya jika

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1$$

Bukti :

Misalkan h_1, h_2, h_1 merupakan panjang garis yang ditarik dari titik *A*, *B*, *C* dan tegak lurus dengan garis *XY*. Maka

$$\frac{BX}{CX} = \frac{h_2}{h_3}$$

$$\frac{CY}{AY} = \frac{h_3}{h_1}$$

$$\frac{AZ}{BZ} = \frac{h_1}{h_2}$$

Sehingga

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = \frac{h_2}{h_3} \cdot \frac{h_3}{h_1} \cdot \frac{h_1}{h_2} = 1$$

Untuk pembuktian sebaliknya, jika terdapat titik-titik *X*, *Y*, *Z* sedemikian sehingga

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1$$

Misalkan garis *AB* dan *XY* berpotongan di titik *Z*'. Maka

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ'}{BZ'} = 1$$

Dengan demikian

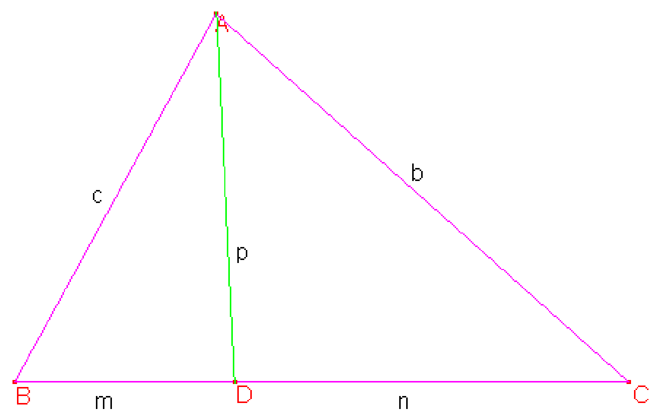
$$\frac{AZ}{BZ} = \frac{AZ'}{BZ'}$$

yang berarti titik *Z* dan titik *Z*' berimpit dan kita telah membuktikan bahwa titik-titik *X*, *Y*, *Z* kolinier.

d. Teorema Stewart

Misalkan pada suatu ΔABC, titik *X* terdapat pada sisi *AC* sehingga panjang *BX* = *m*, panjang *CX* = *n*, dan panjang *AC* = *p* maka

$$a(p^2 + mn) = b^2 m + c^2 n$$



Gambar 6

Bukti :

Dengan menggunakan aturan cosinus diperoleh

$$\cos \angle ADC = \frac{p^2 + n^2 - b^2}{2pn} \quad \text{.......... (1)}$$

$$\cos \angle ADB = \cos(180° - \angle ADC) = -\cos \angle ADC = \frac{p^2 + m^2 - c^2}{2pm} \quad \text{...........(2)}$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$\frac{p^2 + n^2 - b^2}{2pn} = - \frac{p^2 + m^2 - c^2}{2pm}$$

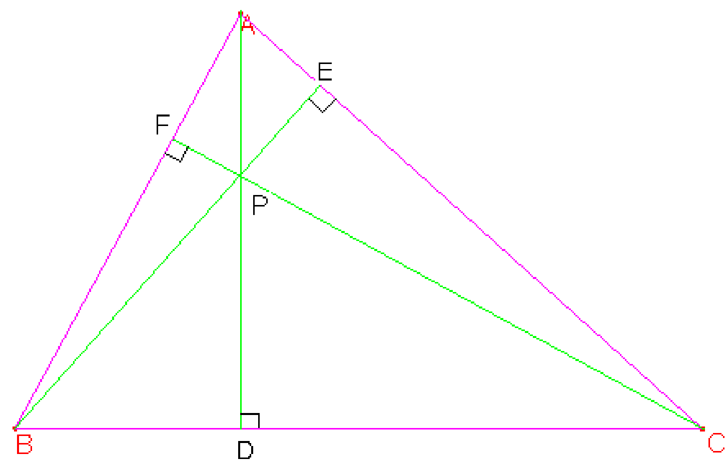
$$\Leftrightarrow m(p^2 + n^2 - b^2) = n(c^2 - p^2 - m^2)$$

$$\Leftrightarrow p^2(m+n) + mn(m+n) = b^2 m + c^2 n$$

$$\Leftrightarrow (m+n)(p^2 + mn) = b^2 m + c^2 n$$

$$\Leftrightarrow a(p^2 + mn) = b^2 m + c^2 n \quad \text{(terbukti)}$$

e. Garis Tinggi



Gambar 7

Garis tinggi dari suatu segitiga adalah garis yang ditarik dari satu titik yang tegak lurus dengan sisi yang berhadapan dengan titik tersebut. Pada *Gambar 7* di atas garis tinggi *AD*, *BE*, *CF* berpotongan di titik *P*. Hal ini dapat dibuktikan dengan teorema Ceva.

$$\frac{BD}{DC} = \frac{[BAD]}{[CAD]} = \frac{\frac{1}{2}.AB.AD.\sin\angle BAD}{\frac{1}{2}.AC.AD.\sin\angle CAD} = \frac{AB.\sin(90^\circ - \angle ABD)}{AC.\sin(90^\circ - \angle ACD)} = \frac{AB.\cos\angle ABC}{AC.\cos\angle ACB}$$

Dengan cara yang sama diperoleh :

$$\frac{CE}{EA} = \frac{BC.\cos\angle ACB}{AB.\cos\angle BAC}$$

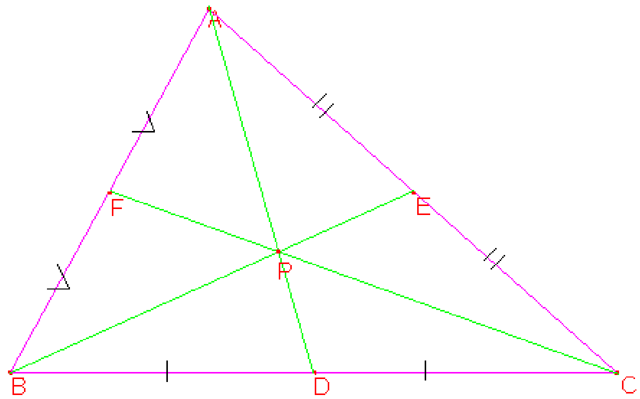
$$\frac{AF}{FB} = \frac{AC.\cos\angle BAC}{BC.\cos\angle ABC}$$

sehingga

$$\frac{AF}{FB}.\frac{BD}{DC}.\frac{CE}{EA} = \frac{AC.\cos\angle BAC}{BC.\cos\angle ABC}.\frac{AB.\cos\angle ABC}{AC.\cos\angle ACB}.\frac{BC.\cos\angle ACB}{AB.\cos\angle BAC} = 1$$

Maka berdasarkan teorema Ceva ketiga garis tersebut konkuren. (terbukti)

f. Garis Berat



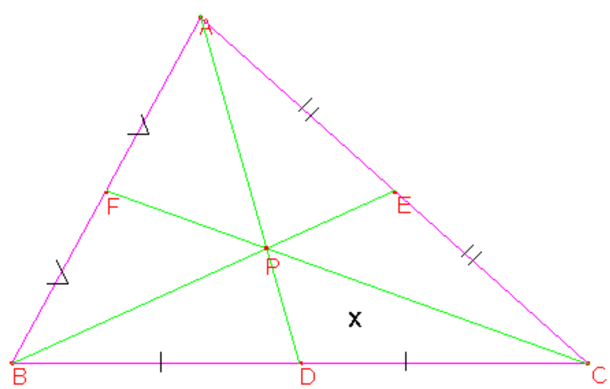
Gambar 8

Garis berat dari suatu segitiga adalah garis yang membagi sisi segitiga menjadi dua bagian sama besar. Ketiga garis berat dari sebarang segitiga berpotongan di satu titik.

Bukti :

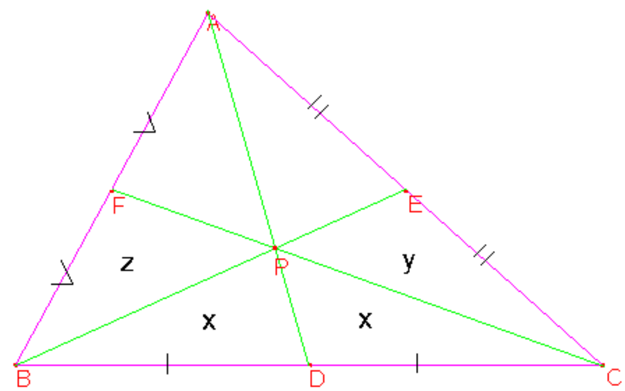
$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{AF}{AF}\cdot\frac{BD}{BD}\cdot\frac{CE}{CE}=1$$

Sehingga terbukti bahwa ketiga garis tersebut konkuren. Keenam daerah pada segitiga di atas memiliki luas yang sama.



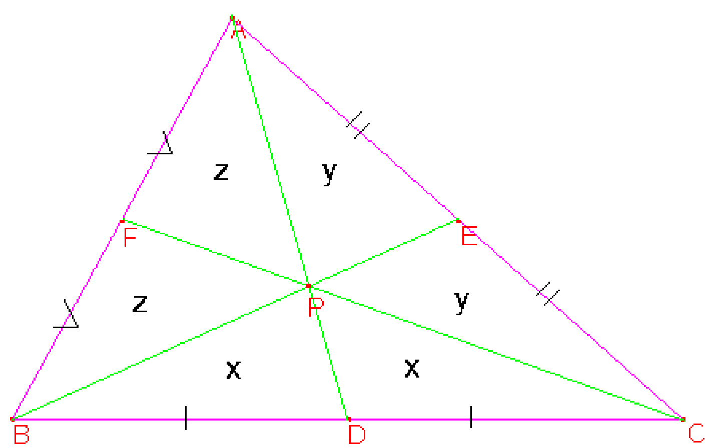
Gambar 9

Misalkan luas $\Delta DPC = x$ seperti tampak pada *Gambar 9* di atas. Luas $\Delta BPD = x$ karena *BD* = *CD*.



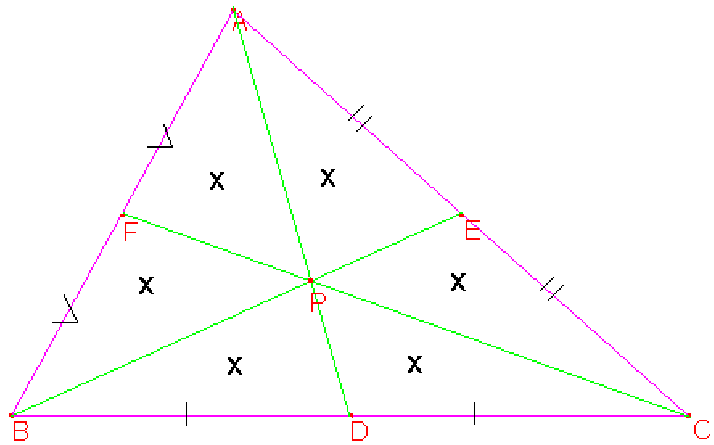
Gambar 10

Sekarang misalkan luas $\Delta EPC = y$ dan luas $\Delta PFB = z$. Maka $\Delta EPA = y$ karena *CE* = *EA* dan $\Delta PFA = z$ karena *AF* = *FB*.



Gambar 11

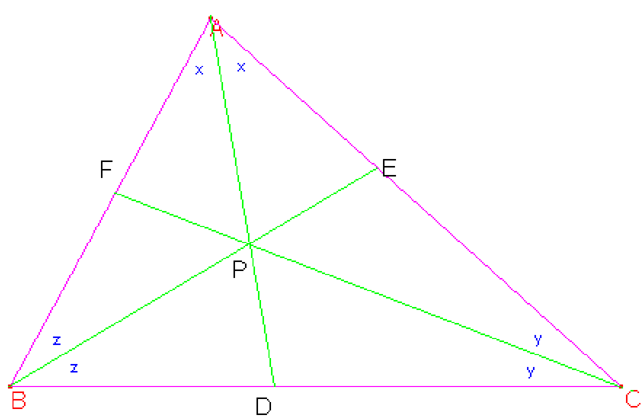
Karena *AE* = *CE* maka luas ΔABE = luas ΔBCE yaitu 2*x* + *y* = 2*z* + *y*. Sehingga *x* = *z*. Dengan cara yang sama perhatikan bahwa *AF* = *BF*. Maka akan diperoleh $x = y$. Sehingga $x = y = z$ yang berarti luas keenam daerah pada segitiga di atas sama.



Gambar 12

Dari gambar di atas dapat diperoleh $AP : PD = 2 : 1$ karena perbandingan luas ΔAPB : luas $\Delta BPD = 2 : 1$. Dengan cara yang sama dapat diperoleh $BP : PE = 2 : 1$ dan $CP : PE = 2 : 1$.

g. Garis Bagi



Gambar 13

Garis bagi dari suatu segitiga adalah garis yang membagi sudut segitiga menjadi dua bagian sama besar. Ketiga garis bagi dari suatu segitiga berpotongan di satu titik. Dapat dibuktikan sebagai berikut.

$$\frac{BD}{DC}=\frac{[ABD]}{[ADC]}=\frac{\frac{1}{2}.AB.AD.\sin x}{\frac{1}{2}.AC.AD.\sin x}=\frac{AB}{AC}$$

Dengan cara yang sama dapat diperoleh

$$\frac{CE}{EA}=\frac{BC}{AB}$$

$$\frac{AF}{FB}=\frac{AC}{BC}$$

Sehingga

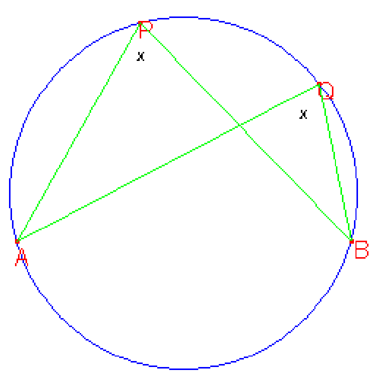
$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{AB}{AC}\cdot\frac{BC}{AB}=1$$

Dengan demikian ketiga garis bagi dari suatu segitiga berpotongan di satu titik.

B. Lingkaran

a. Sudut-sudut pada lingkaran

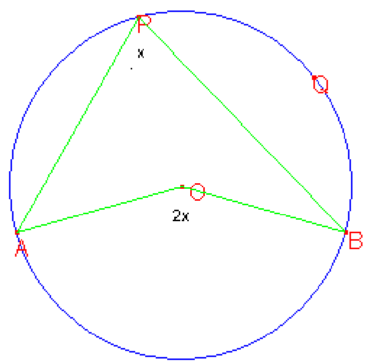
(i) Sudut-sudut keliling yang menghadap busur yang sama memiliki besar yang sama.



Gambar 14

Pada gambar diatas sudut *APB* dan sudut *AQB* menghadap busur yang sama yaitu busur *AB* sehingga $\angle APB = \angle AQB$.

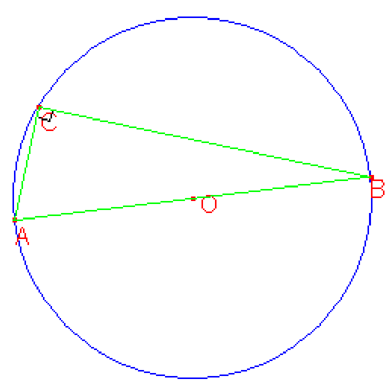
(ii) Besar sudut pusat adalah dua kali besar sudut keliling yang menghadap busur yang sama.



Gambar 15

Misalkan titik *O* adalah titik pusat lingkaran dan sudut *AOB* serta sudut *APB* menghadap pada busur yang sama. Misalkan pula besar sudut *APB* adalah *x*, maka besar sudut *AOB* adalah 2*x*.

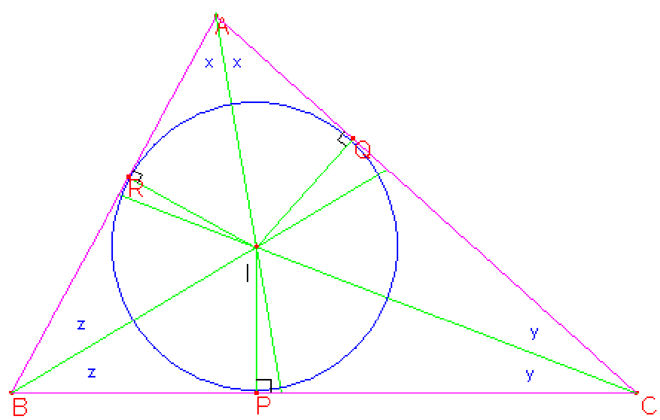
(iii) Besar sudut keliling yang menghadap diameter lingkaran adalah 90°.



Gambar 16

Misalkan AB adalah diameter lingkaran. Maka untuk sebarang titik C di lingkaran dengan $C \neq A$ dan $C \neq B$, besar sudut ACB adalah 90°.

b. Lingkaran Dalam Segitiga



Gambar 17

Lingkaran dalam dari suatu segitiga adalah lingkaran yang terdapat di dalam segitiga dan bersinggungan dengan ketiga sisi dari segitiga tersebut.

Titik pusat dari lingkaran dalam segitiga diperoleh dari perpotongan ketiga garis bagi dari segitiga tersebut. Besar jari – jari dari lingkaran dalam segitiga adalah $\dfrac{[ABC]}{\frac{1}{2}(AB + AC + BC)}$. Dapat dibuktikan sebagai berikut.

Misalkan lingkaran tersebut menyinggung sisi BC, CA, AB di titik P, Q, R berturut-turut dan I adalah titik pusat lingkaran. Misalkan pula besar jari-jari dari lingkaran dalam segitiga ABC adalah r, sehingga $IP = IQ = IR = r$.

$$[ABC] = [IBC] + [IAB] + [IAC]$$

$$= \tfrac{1}{2}.BC.IP + \tfrac{1}{2}.AB.IR + \tfrac{1}{2}.AC.IQ$$
$$= \tfrac{1}{2}.BC.r + \tfrac{1}{2}.AB.r + \tfrac{1}{2}.AC.r$$
$$= \tfrac{1}{2}.r(BC + AB + AC)$$

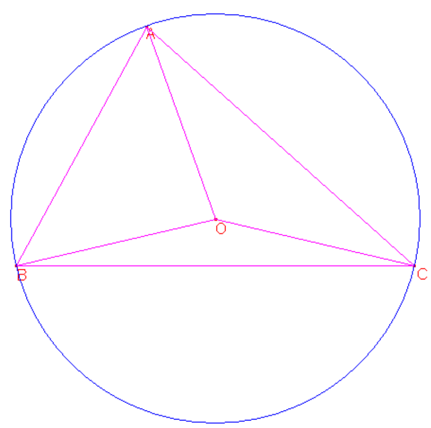
Sehingga diperoleh

$$r = \frac{[ABC]}{\tfrac{1}{2}(AB + AC + BC)}$$

Pada segitiga tersebut berlaku $AR = AQ$, $BR = BP$, dan $CQ = CP$.

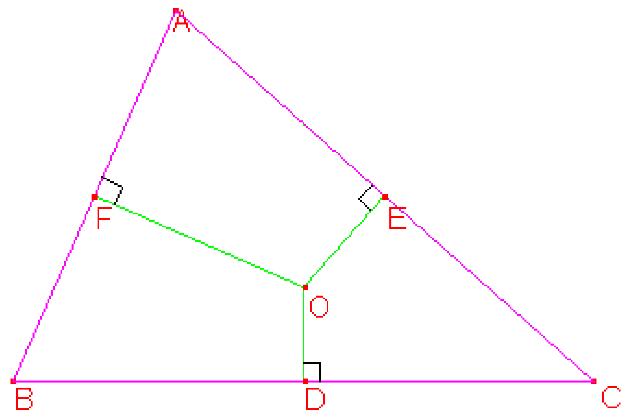
c. Lingkaran Luar Segitiga

Selain lingkaran dalam, pada suatu segitiga dapat dibuat lingkaran luar yaitu lingkaran yang melalui ketiga titik sudut dari segitiga tersebut.



Gambar 18

Titik O pada gambar di atas merupakan jari-jari lingkaran luar dari ΔABC. Titik tersebut diperoleh dari perpotongan garis yang tegak lurus dengan pertengahan sisi-sisi segitiga. Misalkan pada *Gambar 13*, titik *D* merupakan titik tengah dari sisi *BC*. Kemudian buat garis yang tegak lurus dengan sisi *BC* dan melalui titik *D*.



Gambar 19

Kemudian buatlah garis yang tegak lurus sisi *AC* dan melalui titik *E* sebagai titik tengah sisi *AC* serta garis tegak lurus sisi *BC* yang melalui titik *F* sebagai titik tengah sisi *AB*. Misalkan ketiga garis tersebut merupakan titik O. Maka titik O tersebut adalah titik pusat lingkaran luar ΔABC.

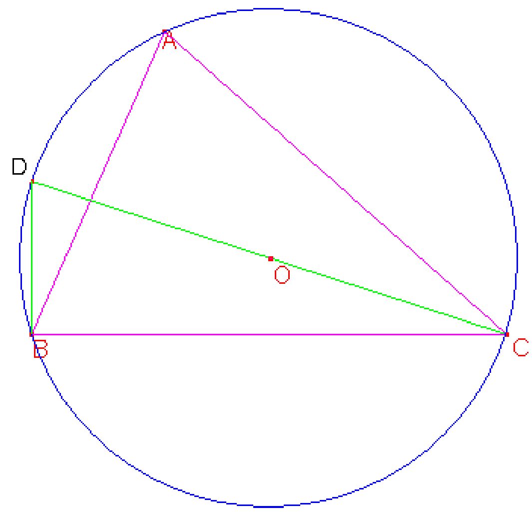
Misalkan *a*, *b*, *c* adalah panjang sisi *BC*, *AC*, *AB* dan *R* adalah jari-jari lingkaran luar ΔABC maka

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Bukti :

Buat sebuah garis yang melalui titik *C* dan titik pusat lingkaran luar ΔABC.

Titik *D* diperoleh dari perpotongan garis tersebut dengan lingkaran luar ΔABC.



Gambar 20

$$\sin D = \frac{a}{CD} = \frac{a}{2R}$$

$\angle A = \angle D$, karena menghadap busur yang sama yaitu busur BC.

$$\sin A = \sin D = \frac{a}{2R}.$$

$$2R = \frac{a}{\sin A}$$

Lakukan cara yang sama pada titik A dan B sehingga diperoleh

$$2R = \frac{b}{\sin B}$$

$$2R = \frac{c}{\sin C}$$

Maka terbukti bahwa

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Besar jari-jari dari lingkaran luar ΔABC di atas adalah

$$\frac{abc}{4.[ABC]}$$

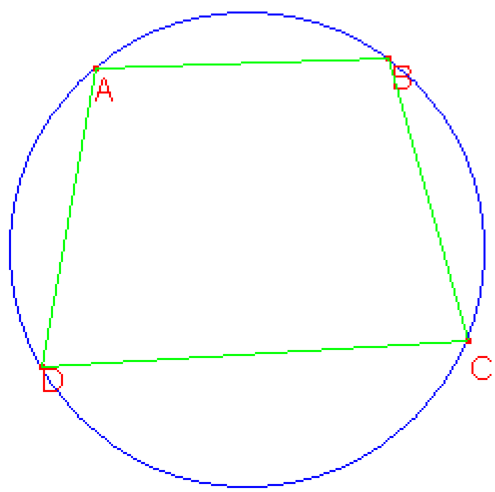
dengan [XYZ] adalah luas ΔXYZ. Pembuktiannya adalah sebagai berikut.

$$[ABC] = \tfrac{1}{2}.a.b.\sin C = \frac{\tfrac{1}{2}a.b.c}{2R} = \frac{abc}{4R}$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{abc}{4R}$$

d. Segiempat Talibusur

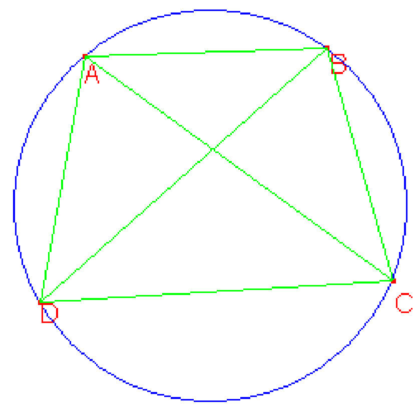
Segiempat talibusur dibentuk oleh 4 titik berbeda pada suatu lingkaran. Pada segiempat talibusur berlaku jumlah dari sudut yang saling berhadapan adalah 180°.



Gambar 21

Misalkan pada gambar di atas besar $\angle DAB = a$, $\angle ABC = b$, $\angle BCD = c$, $\angle CDA = d$, maka $a + c = b + d = 180°$.

e. Teorema Ptolemy



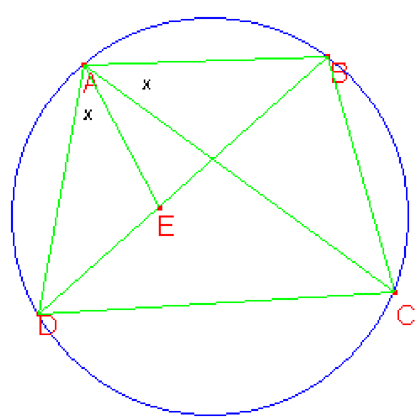
Gambar 22

Misalkan *ABCD* adalah segiempat talibusur seperti pada *Gambar 22* di atas. Maka

$$AB \,.\, CD + AD \,.\, BC = AC \,.\, BD$$

Bukti :

Misalkan *E* adalah suatu titik yang terletak pada garis *BD* sehingga $\angle DAE = \angle CAB$. Maka segitiga *ADE* sebangun dengan segitiga *ABC* dan segitiga AEB sebangun dengan segitiga *ADC*.



Gambar 23

Dengan demikian dapat diperoleh

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC} \text{ dan } \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$$

sehingga

$$AD \,.\, BC = DE \,.\, AC \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(1)$$

$$AB \,.\, AD = AE \,.\, AC \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Dengan menjumlahkan kedua persamaan diperoleh

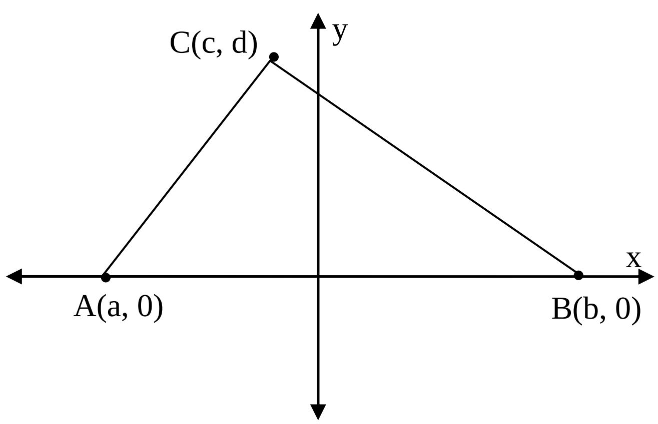
$$AD \,.\, BC + AB.\, AD = DE.\, AC + AE.\, AC$$

$$\Leftrightarrow AD \,.\, BC + AB.\, AD = AC \,.\, (DE + AE)$$

$$\Leftrightarrow AD \,.\, BC + AB.\, AD = AC \,.\, BD \quad \text{(terbukti)}$$

C. Geometri Analit

Geometri analit atau disebut juga sebagai geometri *Cartesian* merupakan geometri dengan menggunakan prinsip aljabar. Dalam memanipulasi suatu bidang datar, garis, kurva, ataupun lingkaran digunakan sistem koordinat *Cartesian* dalam dimensi dua bahkan terkadang dalam dimensi tiga.

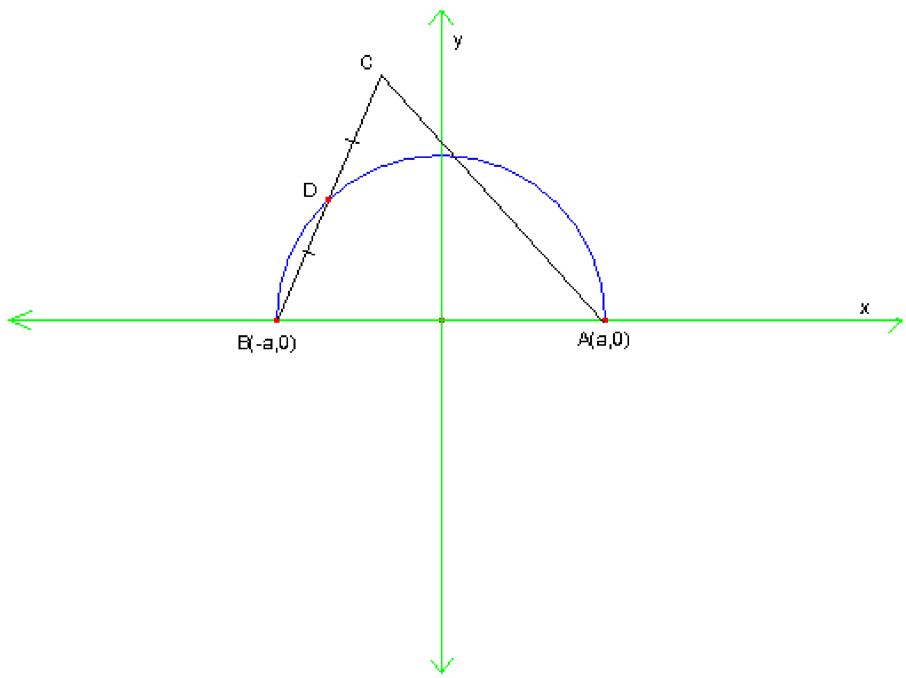


Gambar 24

Misalkan pada *Gambar 24* di atas, segitiga *ABC* dipindahkan ke dalam koordinat *Cartesian* dengan memisalkan titik *A* terletak pada (a, 0), titik *B* terletak pada (b, 0) dan titik *C* pada (c, d).

Contoh : Garis tengah sebuah lingkaran berimpit dengan alas *AB* dari ΔABC. Titik sudut *C* bergerak sedemikian rupa, sehingga titik tengah sisi *AC* selalu terletak pada setengah lingkaran. Berupa apakah lengkungan tempat kedudukan titik *C* ?

Jawab :



Gambar 25

Misalkan perpotongan garis AB dengan lingkaran adalah titik D. Lingkaran di atas memiliki jari-jari *a* sehingga persamaan lingkarannya adalah

$$x^2 + y^2 = a^2$$

sehingga misalkan absis dari titik D adalah b, maka koordinat titik D adalah $(b, \sqrt{a^2 - b^2})$. Karena jarak BD dan CD sama, maka koordinat titik C adalah $(2b + a, 2\sqrt{a^2 - b^2})$.

Perhatikan titik C.

$x = 2b + a$ dan $y = 2\sqrt{a^2 - b^2}$.

$x - a = 2b$

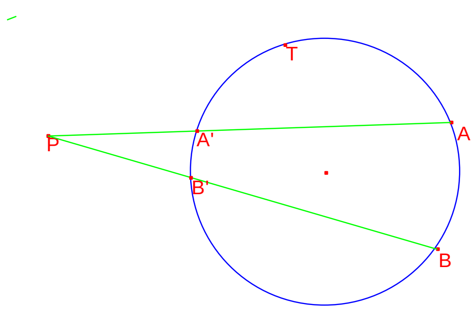
$(x - a)^2 + y^2 = (2b)^2 + (2\sqrt{a^2 - b^2})^2 = (2a)^2$.

Dari persamaan di atas dapat diketahui bahwa tempat kedudukan titik *P* adalah setengah lingkaran (mengapa?) dengan titik pusat $(a, 0)$ dan jari-jari $2a$.

D. Latihan

1. Misalkan p dan q adalah jari-jari lingkaran yang melalui titik A dan menyinggung sisi BC di titik B dan C. Misalkan pula R adalah jari-jari lingkaran luar segitiga ABC. Buktikan $pq = R^2$.

2. Jika s adalah ½ keliling segitiga ABC, r jari-jari lingkaran dalam, R jari-jari lingkaran luar, dan a, b, c sisi-sisi dari segitiga tersebut, buktikan bahwa $abc = 4srR$.

3. 

   Perhatikan gambar di samping. Buktikan bahwa :

   $$PA \times PA' = PB \times PB' = PT^2$$

4. Jika dalam segitiga ABC yang panjang sisinya a, b, c dan panjang garis berat yang melalui titik sudut A, B, C berturut-turut adalah m_a, m_b, m_c, buktikan

$$m_a{}^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2$$

$$m_b{}^2 = \frac{1}{2}(a^2 + c^2) - \frac{1}{4}b^2$$

$$m_c{}^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - \frac{1}{4}c^2$$

5. Misalkan sisi-sisi pada suatu segitiga ABC adalah *a*, *b*, dan *c* tentukan panjang masing-masing dari garis bagi segitiga tersebut.

6. Diketahui segitiga ABC, titik P terletak dalam segitiga tersebut. Jika d_1, d_2, d_3 merupakan jarak dari titik P ke sisi BC, CA, AB dan h_1, h_2, h_3 adalah garis tinggi yang ditarik dari titik A, B, C, buktikan

$$\frac{d_1}{h_1} + \frac{d_2}{h_2} + \frac{d_3}{h_3} = 1$$

7. Pada segitiga ABC, BM dan CN adalah dua garis berat yang saling tegak lurus. Buktikan bahwa $b^2 + c^2 = 5a^2$, jika BC = a, AC = b dan AB = c.

8. Diketahui segitga ABC, titik D, E, F titik-titik pada sisi BC, CA, dan AB sehingga AD, BE, dan CF berpotongan di titik O. Buktikan

(a) $\frac{OD}{AD} + \frac{OE}{BE} + \frac{OF}{CF} = 1$

(b) $\frac{AO}{OD} = \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC}$

9. Suatu garis transversal memotong sisi AB, BC, CD, DA dari segiempat ABCD masing-masing di titik P, Q, R, S. Buktikan bahwa

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1$$

10. Diketahui bujur sangkar ABCD, titik E dan F masing-masing pada sisi AB dan AD. Misalkan titik P adalah perpotongan garis EF dan AC. Buktikan bahwa

    (a) $\frac{1}{AE}+\frac{1}{AF}=\frac{\sqrt{2}}{AP}$

    (b) $AP^2 \leq \frac{AE.AF}{2}$

11. Diketahui segitiga ABC dengan sisi a, b, dan c. Jika $\angle$BAC = 60° dan a = 1, buktikan bahwa b + c ≤ 2.

12. Misalkan CH dan CM masing-masing garis tinggi dan garis berat dalam segitiga ABC. Garis bagi $\angle$BAC memotong CH dan CM masing-masing di P dan Q. Jika $\angle$ABP = $\angle$PBQ = $\angle$QBC, buktikan

    (a) Segitiga ABC siku-siku

    (b) BP = 2CH.

13. Andaikan E titik potong antara diagonal AC dan BD dari segiempat talibusur ABCD. Buktikan bahwa jika $\angle$BAD = 60° dan AE = 3CE, maka jumlah dari dua sisi dari segiempat tersebut sama dengan jumlah dua sisi lainnya.

14. Dalam segitiga ABC, $\angle$A = 60°, dan garis tinggi BD dan CE berpotongan di titik H. Jika O adalah titik pusat lingkaran luar, buktikan bahwa HO adalah bisektor dari $\angle$EHB.

15. Diberikan ABCD segiempat talibusur dan R jari-jari lingkaran luarnya. Jika a, b, c, d menyatakan panjang sisi-sisinya dan S luasnya, buktikan bahwa

$$R^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{16S^2}$$

16. Misalkan ABCD sebuah bujursangkar dengan panjang sisi 1. Titik M terletak pada sisi BC dan N pada sisi CD sedemikian sehingga keliling segitiga MCN adalah 2.
    (a) Tentukan $\angle$MAN.
    (b) Jika P adalah kaki tegak lurus dari A ke MN, tentukan tempat kedudukan titik P selama M dan N bervariasi.

17. Misalkan ABC segitiga, M titik tengah BC, N titik tengah AM dan O titik pusat lingkaran luar segitiga ABC. Buktikan bahwa BN tegak lurus ON jika dan hanya jika AB = AM.

18. Lingkaran dalam sebuah segitiga ABC berpusat di I dan menyinggung AB di D. H terletak pada sinar ID sedemikian sehingga DH sama panjang dengan setengah keliling segitiga ABC. Buktikan bahwa AHBI segiempat talibusur jika dan hanya jika $\angle$=90°.

19. Misalkan ABCD adalah segiempat konveks sedemikian sehingga

$$\angle ADB = 2\angle ACB \text{ dan } \angle BDC = 2\angle BAC$$

    Buktikan bahwa AD = CD.

20. Lingkaran dalam sebuah segitiga ABC menyinggung sisi AB dan BC masing-masing di titik P dan Q. Garis PQ memotong garis bagi $\angle$BAC di titik S. Buktikan bahwa garis bagi tersebut tegak lurus terhadap garis SC.

BAB IV

ALJABAR

A. Sistem Bilangan Real

Notasi yang akan digunakan dalam menyatakan himpunan bilangan adalah **R** untuk himpunan bilangan real, **Q** untuk himpunan bilangan rasional, **Z** untuk himpunan bilangan bulat, dan **N** untuk himpunan bilangan asli. Masing-masing dari himpunan ini dilengkapi dengan operasi tambah dan operasi kali dan disebut *sistem bilangan*. Berikut ini adalah dua aksioma yang berkaitan dengan sistem bilangan real.

a. Aksioma Lapangan

1. Sifat asosiatif
   (i) $(a + b) + c = a + (b + c)$
   (ii) $(ab)c = a(bc)$

2. Sifat komutatif
   (i) $a + b = b + a$
   (ii) $ab = ba$

3. Identitas
   (i) Terdapat 0 di **R** yang memenuhi
   $$a + 0 = a$$
   untuk semua a di **R**.
   (ii) Terdapat 1 di **R** yang memenuhi
   $$a\,1 = a$$

untuk semua a di **R**.

4. Invers
   (i) Untuk setiap a di **R** terdapat $-a$ di **R** sehingga
   $$a + (-a) = 0$$
   (ii) Untuk setiap a di **R** yang tak nol terdapat a^{-1} di **R** sehingga
   $$aa^{1} = 1$$

5. Distributif
   $$a(b + c) = ab + ac$$

b. Aksioma Urutan

1. Untuk setiap a dan b suatu bilangan real berlaku salah satu dari $a < b$, $a = b$, atau $a > b$.
2. Jika $a < b$ dan $b < c$ maka $a < c$
3. Jika $a < b$ maka $a + c < b + c$
4. Jika $a < b$ dan $c > 0$ maka $ac < bc$.

B. Polinom

Suat polinom atau suku banyak $f(x)$ berderajat n memiliki bentuk umum

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots. + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

dengan $a_0, a_1, \ldots, a_n$ merupakan suatu konstanta real. Sehingga $x^2 + 2x + 1$ merupakan polinom, sedangkan $(x + 2)^y$ dan $\dfrac{1}{x-1}$ bukan merupakan polinom.

Pada suatu polinom berderajat n terdapat suatu $g(x) \neq 0$, $h(x)$ dan $r(x)$ yang tunggal sehingga

$$f(x) = g(x)\, h(x) + r(x)$$

dengan $g(x)$ merupakan pembagi, $h(x)$ hasil bagi, dan $r(x)$ sisa bagi dan derajat $r(x)$ lebih kecil dari derajat $g(x)$.

Teorema Sisa

Misalkan $f(x)$ adalah suatu polinom. Maka nilai r sebagai sisa pembagian dapat dihasilkan dari pembagi linier $x - a$, untuk suatu a konstanta real.

$$f(x) = (x - a)\, h(x) + r(x)$$

karena derajat $r(x)$ lebih kecil dari derajat $(x - a)$ maka $r(x)$ memiliki derajat 0. Misalkan $r(x) = r$ dengan r adalah suatu bilangan real. Dengan mengganti nilai x dengan a maka diperoleh

$$f(a) = r$$

Contoh : Misalkan $f(x)$ suatu polinom atas **R**. Jika $f(x)$ dibagi $x - 1$ bersisa 2 dan jika dibagi $x + 1$ bersisa 3. Tentukan sisa $f(x)$ jika dibagi $x^2 - 1$.

Jawab :

Derajat sisa bagi lebih kecil dari derajat pembagi. Misalkan sisa bagi $f(x)$ dengan $x^2 - 1$ adalah $ax + b$.

$f(x) = (x^2 - 1)\, h(x) + (ax + b) = (x - 1)(x + 1)\, h(x) + (ax + b)$

$f(1) = a + b = 2$ ……………………(1)

$f(-1) = -a + b = 3$ …………………..(2)

Dengan melakukan eliminasi dan substitusi persamaan (2) dengan (1) diperoleh $a = -\frac{1}{2}$ dan $b = \frac{5}{2}$. Sehingga sisa baginya adalah $-\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Teorema Faktor

Teorema faktor merupakan teorema untuk mencari faktor dari suatu polinom. Suatu pembagi linier $x - a$ disebut faktor dari suatu polinom $f(x)$ apabila sisa pembagian $f(x)$ dengan $x - a$ adalah nol, yaitu :

$$f(x) = (x - a)\, g(x) + r(x)$$

$$r(x) = 0$$

sehingga

$$f(x) = (x - a)\, g(x)$$

$$\Leftrightarrow f(a) = 0$$

Dalam hal ini a disebut akar dari $f(x)$.

Contoh. Periksa apakah $x + 4$ merupakan faktor dari

$$f(x) = 5x^4 + 16x^3 - 15x^2 + 8x + 16$$

Jawab :

$x + 4$ merupakan faktor dari $f(x)$ jika dan hanya jika $f(-4) = 0$.

$f(-4) = 5(-4)^4 + 16(-4)^3 - 15(-4)^2 + 8(-4) + 16 = 0$.

Teorema Vieta

Misalkan $f(x)$ adalah suatu polinom berderajat n yaitu

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots. + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Misalkan pula $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah akar-akar dari $f(x)$ maka

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n) + (x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_2x_n) + \cdots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

. . .

$$x_1x_2 \cdots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Contoh : Misalkan x_1, x_2, dan x_3 adalah akar-akar dari $x^3 + 3x^2 - 7x + 1$. Tentukan $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Jawab :

$x_1 + x_2 + x_3 = -3$

$x_1x_2 + x_2 x_3 + x_1x_3 = -7$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 – 2(x_1x_2 + x_2 x_3 + x_1x_3) = (-3)^2 – 2(-7) = 9 + 14 = 23.$

C. Pertidaksamaan

a. QM - AM - GM - HM

Misalkan a_0, a_1, …, a_n adalah bilangan real positif. *Arithmetic Mean* (AM), *Geometric Mean*(GM), *Harmonic Mean*(HM), dan *Quadratic* Mean(QM) dari ke-n bilangan tersebut berturut-turut adalah

$$\text{AM} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

$$\text{GM} = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

$$\text{HM} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}$$

$$\text{QM} = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}}$$

Maka berlaku

$$\text{QM} \geq \text{AM} \geq \text{GM} \geq \text{HM}$$

Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $a_0 = a_1 = … = a_n$.

Contoh. Misalkan a, b, c bilangan real positif yang memenuhi\

$$(1 + a)(1 + b)(1 + c) = 8$$

Buktikan bahwa $abc \leq 1$. Kapan kesamaan terjadi?

Jawab :

AM $\geq$ GM.

$\frac{1+a}{2} \geq \sqrt{a}$

$1+a \geq 2\sqrt{a}$ …………………….(1)

dengan cara yang sama diperoleh

$1+b \geq 2\sqrt{b}$ …………………….(2)

$1+b \geq 2\sqrt{b}$ …………………….(3)

Dengan mengalikan ketiga persamaan di atas diperoleh

$8 = (1+a)(1+b)(1+c) \geq 8\sqrt{abc}$.

$1 \geq \sqrt{abc}$.

sehingga $abc \leq 1$.

Kesamaan terjadi jika dan hanya jika a = b = c = 1.

D. Latihan

1. Tentukan $\frac{yz+zx+xy}{x^2+y^2+3z^2}$ jika $\frac{x+2y}{6} = \frac{2y+3z}{10} = \frac{3z+x}{8}$.

2. Tentukan nilai x, y, z real yang memenuhi

$$\frac{xy}{x+y} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{yz}{y+z} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{xz}{x+z} = \frac{1}{7}$$

3. Tentukan hasil dari

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)....\left(1-\frac{1}{2006}\right)\left(1-\frac{1}{2007}\right).$$

4. Tentukan jumlah dari

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{2006.2007}+\frac{1}{2007.2008}$$

5. Tentukan jumlah dari

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{2006}+\sqrt{2}007}+\frac{1}{\sqrt{2007}+\sqrt{2008}}$$

6. Tentukan jumlah dari

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+...+\frac{1}{1+2+3+....+2007}$$

7. Tentukan jumlah dari

$$\frac{1}{2007^{-2007}+1}+\frac{1}{2007^{-2006}+1}+...+\frac{1}{2007^{2006}+1}+\frac{1}{2007^{2007}+1}$$

8. Hitung $\sum_{k=1}^{n} k!(k^2+k+1)$.

9. Tentukan jumlah dari

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+....+\sqrt{1+\frac{1}{2006^2}+\frac{1}{2007^2}}$$

10. Tentukan nilai dari $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ jika diketahui

$$\frac{1}{xy} + x + y = 11$$

$$x^2 y^2 (x + y)^2 = 61x^2 y^2 - 1$$

11. Tentukan x, y, z real yang memenuhi

$$x^2 + 2yz = x$$

$$y^2 + 2xz = y$$

$$z^2 + 2xy = z$$

12. Jika diketahui x, y, z, t adalah bilangan real yang tidak sama dengan nol dan

$$x + y + z = t$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{t}$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1000^3$$

Tentukan $x + y + z + t$.

13. Tentukan nilai x, y real yang memenuhi

$$y^2 = x^3 - 3x^2 + 2x$$

$$x^2 = y^3 - 3y^2 + 2y$$

14. Tiga bilangan x, y, z memenuhi

$$x^2 + xy + \frac{y^3}{3} = 25$$

$$\frac{y^2}{3} + z^2 = 9$$

$$z^2 + zx + x^2 = 16$$

Tentukan nilai dari $xy + 2yz + 3xz$.

15. Jika a dan b adalah akar persamaan $x^2 - x + 1 = 0$, buktikan bahwa ab adalah akar dari persamaan $x^3 + x^2 - 1 = 0$.

16. Jika $x^2 - x - 1$ adalah akar dari $px^{17} + qx^{16} + 1 = 0$ tentukan nilai p.

17. Buktikan bahwa jika a, b, c real dan $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ maka

$$-\tfrac{1}{2} \leq ab + bc + ca \leq 1$$

18. Buktikan bahwa $\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n < \left(1+\tfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.

19. Buktikan bahwa $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}} > 24$.

20. Misalkan a_1, a_2, …, a_n dan b_1, b_2, …, b_n adalah bilangan real positif yang memenuhi $a_1 a_2 \ldots a_n = b_1 b_2 \ldots b_n$. Buktikan bahwa

$$\frac{(a_1b_1+1)(a_2b_2+1)\cdots(a_nb_n+1)}{b_1b_2\cdots b_n} \geq 2^n$$